A.P. IUȘKEVICI

ISTORIA MATEMATICII ÎN EVUL MEDIU

ADOLF-ANDREI PAVLOVICI IUȘKEVICI

ISTORIA MATEMATICII ÎN EVUL MEDIU

PREFAȚĂ

Obiectul lucrării de față îl constituie istoria matematicii pînă la începutul epocii Renașterii.

În problema stabilirii perioadelor de dezvoltare a matematicii, autorii s-au condus după principiul evoluției acestei științe de la o treaptă de abstractizare la alta, mai înaltă, ținînd seama totodată de varietatea condițiilor sociale, economice și geografice. Trăsăturile principale ale acestei periodizări a matematicii sînt exprimate de A. N. Kolmogorov în articolul Matematica, *publicat în volumul 26 al celei de-a doua ediții a* Marii Enciclopedii Sovietice. *Se poate spune astfel că în lucrarea de față sînt analizate perioada de apariție a matematicii și perioada matematicii elementare.*

Lucrarea este alcătuită din două cărți. Prima, scrisă de E. Kolman, este consacrată istoriei matematicii în antichitate. În ea se analizează apariția noțiunilor matematice și dezvoltarea matematicii la popoarele creatoare ale celor mai vechi civilizații (egiptenii, babilonienii, fenicienii, evreii, maya, incașii și aztecii; despre matematica Chinei și Indiei antice se vorbește în capitolele celei de-a doua cărți, consacrate acestor țări); mai departe se prezintă istoria matematicii în Grecia antică, în statele elenistice și în Imperiul Roman.

Cea de-a doua carte, scrisă de A.P. Iușkevici, cuprinde istoria matematicii din evul mediu în China și India (începînd cu antichitatea), în țările Islamului (țările arabe, Asia centrală, Iran, Azerbaidjan) și în Europa. Istoria matematicii din Orient este expusă în conformitate cu cele mai noi cercetări, în urma cărora au fost descoperite multe fapte necunoscute înainte vreme, dar care au dus și la o nouă concepție asupra acestei epoci din istoria matematicii. Bineînțeles, aceste capitole au un volum relativ mare în comparație cu ceea ce se propusese inițial. Unele mici părți din textul primei cărți îi aparțin lui A.P. Iușkevici, iar din cea de-a doua — lui E. Kolman.

Expunerea ajunge pînă la începutul secolului al XVI-lea. Deşi perioada matematicii elementare se încheie abia în cursul secolului al XVI-lea, autorii au considerat totuşi necesar să se oprească la secolul precedent, deoarece în secolul al XVI-lea, în embrionul noii algebre se pregătea descoperirea calculului infiniţilor mici şi al geometriei analitice; iar activitatea unui şir de învăţaţi, îndeosebi a lui Viète, a contribuit nemijlocit la formarea matematicii mărimilor variabile, a ştiinţei despre funcţii şi despre transformările geometrice.

Autorii şi-au propus ca scop să lămurească cu precădere dezvoltarea istorică a noţiunilor matematice fundamentale, a metodelor şi a algoritmilor, ţinînd seama pe cît posibil de tendinţele dezvoltării contemporane a ştiinţei. Noile probleme ce stau în faţa ştiinţei conduc la o modificare a perspectivei istorice a trecutului. De pildă, dezvoltarea vijelioasă a matematicii calculatorii pune acum în faţa istoricilor problema de a lumina mai deplin metodele aproximative de calcul, începînd cu antichitatea.

Prezentarea creaţiei diferiţilor învăţaţi este subordonată acestui scop. Dezvoltarea matematicii se poate urmări pe diferite planuri. Se pot accentua legăturile interne în creaţia unui singur om, se poate urmări istoricul problemei, lăsînd deoparte complet sau parţial legăturile ei cu altele, se poate vorbi despre istoria unei şcoli ştiinţifice ş.a. În cartea noastră, consacrată dezvoltării matematicii ca un tot unitar, străduindu-ne să nu ne îndepărtăm de scopul propus, am menţinut în sfera atenţiei şi legăturile reciproce dintre matematică şi ştiinţele naturii, dintre matematică şi tehnică, dintre matematică şi filozofie, precum şi legăturile internaţionale, ţinînd seama de particularităţile naţionale ale dezvoltării ştiinţei în diferite perioade de timp. Acest fapt a determinat de la sine ca expunerea noastră să se desfăşoare, în diferitele părţi şi capitole ale lucrării pe planuri multiple — fără să mai vorbim de particularităţile pur individuale, proprii autorilor. Cu toate acestea, principiul conducător al lucrării a fost ideea că specificul matematicii ca ştiinţă constă în caracterul deosebit de general şi de abstract al noţiunilor şi metodelor ei şi că, dezvoltîndu-se sub influenţa activităţii practice a oamenilor şi a cerinţelor societăţii (uneori această influenţă manifestîndu-se direct, alteori — doar în ultima instanţă), ea are posibilitatea să dezvolte în mod independent, într-o măsură sau alta, abstracţiile create de ea.

Cu privire la istoria matematicii există o literatură imensă, dar pînă-n prezent nu se găsesc aproape de loc lucrări de generalizare scrise de pe poziţii marxiste. De aceea, autorii au avut de rezolvat multe probleme, care mai fuseseră puse înainte. Se înţelege de la sine că nu considerăm răspunsurile şi soluţiile noastre ca definitive.

Cîteva observații asupra caracterului expunerii. Referirile din text la literatura de specialitate sînt date între paranteze drepte, iar lucrările propriu-zise, inclusiv primele ediții ale surselor, sînt prezentate la sfîrșitul fiecărei cărți în „Bibliografie“. Transcripția originală a numelor oamenilor de știință despre care se vorbește e reprodusă în indicatorul alfabetic nominal; pentru învățații din Orient numele lor a fost transcris fonetic.

Cuvintele între paranteze drepte din interiorul citatelor ne aparțin nouă, sau traducătorilor textelor respective.

Autorii mulțumesc prof. B.A. Rozenfeld, care a citit întregul manuscris, precum și corecturile, și care ne-a dat un șir de indicații foarte prețioase.

Autorii roagă pe cititori să trimită observațiile și propunerile lor pe adresa Editurii de stat pentru fizică și matematică: Москва, В—71, Ленинский проспект, 15.

Moscova 24 februarie 1958

E. KOLMAN
A. P. IUȘKEVICI

Înainte de a fi dat la cules, am completat textul, bazîndu-mă pe unele lucrări noi publicate de la începutul anului 1958 și pînă la mijlocul anului 1960. Cîteva rezultate ale unor cercetări recente au trebuit să fie totuși lăsate, limitîndu-mă la introducerea lucrărilor respective în „Bibliografie“. Relativ la aceasta, trebuie să spun că „Bibliografia“ nu este exhaustivă. În operele indicate în „Bibliografie“, cititorul va găsi însă indicații pentru articole speciale care nu au fost prezentate în lucrare.

Îmi exprim recunoștința față de candidata în științele fizico-matematice E.I. Beriozkina, care mi-a făcut cunoscute multe lucrări în limba chineză și a verificat transcripția numelor și termenilor chinezești în ediția de față.

Moscova 2 decembrie 1960 *A. P. IUȘKEVICI*

Încă mult înainte de descompunerea Imperiului Roman, a început un nou și mare ciclu de dezvoltare a matematicii în Extremul Orient — în China și India; acest ciclu și-a găsit continuarea în țările arabe, în Iran și Asia centrală, apoi în Europa, și a luat sfîrșit aproximativ în secolele al XV-lea — al XVI-lea.

În Babilonul antic, matematica ajunsese la o mare dezvoltare cu 20 de secole înaintea erei noastre. În centrul atenției se aflau pe atunci probleme de aritmetică practică, măsurarea unor figuri relativ simple, iar mai tîrziu, probleme de astronomie care cereau calcule mai complicate. Este caracteristică larga utilizare în calcule a unor tabele de înmulțire și împărțire. Pe un plan de dezvoltare mai abstractă, s-a trecut la inversarea unui șir de probleme: mărimi practic date erau luate ca necunoscute, iar cele căutate — ca date; aceasta a fost una dintre premisele elaborării metodelor algebrice. Drept culmi ale realizărilor la babilonieni se pot cita: sistemul sexagesimal pozițional de reprezentare a numerelor întregi și a fracțiilor, mai tîrziu cu utilizarea parțială a semnului zero; rezolvarea prin radicali a ecuațiilor de gradul al doilea și a sistemelor cu două necunoscute care se reduc la asemenea ecuații; procedeul iterativ de extragere aproximativă a rădăcinii pătrate cu ajutorul mediilor aritmetice, din aproximări prin lipsă și prin adaos[1]; așa — numita teoremă a lui Pitagora. Probabil că au

[1] Aceasta este o ipoteză a lui Otto Neugebauer și care constă în următoarele: fie α o valoare aproximativă (de exemplu, prin lipsă) a $\sqrt{A}$; atunci $\beta = \frac{A}{\alpha}$ va fi o valoare aproximativă (prin adaos) a $\sqrt{A}$, media aritmetică $\frac{\alpha+\beta}{2}$ va constitui o valoare aproximativă (totdeauna prin lipsă) a $\sqrt{A}$, în general mai bună ca α. Procesul ar putea fi continuat (sau, în locul mediei aritmetice $\frac{\alpha+\beta}{2}$, s-ar putea considera alte medii ca, de exemplu, media armonică).

existat și embrioane de demonstrații sub forma unor transformări algebrice și construcții geometrice (în texte ele nu există). La un nivel ceva mai coborît se afla, pare-se, matematica egipteană. Aici la înmulțire și la împărțire se folosesc dublarea și înjumătățirea; operațiile cu fracții se reduc la operații cu fracții cu numărător unitatea[1] și la folosirea unui tabel de descompunere a fracțiilor de forma $\frac{2}{2n+1}$ în sume de astfel de fracții. Probleme ce conduc la ecuații de gradul al doilea lipsesc. Expunerile din tăblițele ceramice cu scriere cuneiformă și de pe papirusuri au forma unor prescripții, fără nici un fel de fundamentare; uneori se prezintă și verificări.

În stadiul ei timpuriu, matematica grecilor antici preia din matematica orientală un bogat material faptic, dar în epoca sa clasică din secolele V—III î.e.n. capătă trăsături principial noi. În studiile matematice pătrund adînc demonstrațiile; ca mijloc conducător în descoperirea de adevăruri noi se situează pe primul loc raționamentul logic, combinat desigur cu observația și inducția. Domenii mari ale matematicii se structurează în sisteme deductive, se construiește o teorie a demonstrației matematice, și toate acestea își găsesc expresia în stilul de expunere al manualelor didactice și al lucrărilor științifice. Problemele directe de calcul, după ce dau naștere unei serii de teorii superioare, trec pe ultimul plan. În virtutea unui șir de împrejurări, algebra ecuațiilor de gradul al doilea apare ca un ansamblu de teoreme geometrice privind aplicarea ariilor; descoperirea numerelor iraționale

---

Aplicată cazului $\sqrt{a^2 + b^2}$ (cu a mult mai mare ca b) și $\alpha = a$, metoda conduce la

$$\sqrt{a^2 + b^2} \approx a + \frac{b^2}{2a}$$

În această formă apare aproximată rădăcina pătrată în unele tăblițe ceramice sumeriene. — *I.P.*

[1] Fără a insista asupra originii, știm că scribii egipteni foloseau numai fracții cu numărătorul egal cu unitatea (deci inverse de numere întregi), cu excepția fracției $\frac{2}{3}$; orice altă fracție trebuia redusă la această formă. Deoarece înmulțirea era redusă la dublare (ceea ce implică cunoașterea faptului că orice întreg se poate exprima în bază de numerație 2 — deci ca o sumă de puteri ale lui 2), scribii egipteni au întocmit tabele pentru $\frac{2}{2n+1}$ ($n = 2, 3, \ldots, 50$) — *I.P.*

duce la crearea unei teorii generale a rapoartelor[1], dezvoltată însă doar parțial și de aceea incapabilă să înlocuiască pe un plan larg teoria numărului real. În secolul al III-lea înaintea erei noastre, se încheie alcătuirea fundamentelor geometriei, se pun bazele teoriei numerelor, ale teoriei secțiunilor conice și ale formelor antice ale metodelor de calcul integral și diferențial. În aceste capitole un aport esențial se va aduce de-abia cu două mii de ani mai tîrziu. În sfîrșit, se pun primele pietre de temelie ale cunoașterii matematice a naturii: teoria muzicii, mecanica, inclusiv mecanica fluidelor, optica, cosmografia.

Începînd cu secolul al II-lea, dezvoltarea matematicii în direcțiile ei clasice se oprește aproape cu totul. Totuși, în statele elenistice cultura Greciei intră în contact strîns cu cea a Orientului, și în legătură cu diferite probleme de astronomie și geodezie se dezvoltă acum cu succes alte discipline, precum: geometria sferică, trigonometria, calculele aproximative. Interesele încep să încline spre matematica calculatorie; se preiau parțial sistemul sexagesimal și fracțiile cu numărător unitatea; se dezvoltă algebra numerică a ecuațiilor liniare și de gradul al doilea, rezolvarea prin numere raționale a ecuațiilor nedeterminate; se creează, la scară modestă, o simbolică a algebrei. Acest curent durează numai puțin timp în condițiile descompunerii lumii antice. El lasă însă o importantă moștenire pentru mai tîrziu în regiunile fostului Imperiu Roman din Asia și Africa.

După descompunerea societății antice sclavagiste, dezvoltarea științelor matematice timp de multe secole are loc mai cu seamă în țările Orientului. Matematica medievală din Orient este desigur o disciplină a mărimilor constante și a figurilor geometrice invariabile — dar o asemenea caracterizare nu este totuși destul de concretă. Ea este în primul rînd o matematică calculatorie, un ansamblu de algoritmi de calcul pentru rezolvarea unor probleme de aritmetică, algebră, geometrie, la început mai simple, iar apoi tot mai complicate; mai întîi algoritmi izolați, reuniți însă mai tîrziu în întregi discipline științifice. Dezvoltarea matematicii orientale începe în evul mediu de la un nivel mult mai coborît decît cel atins în statele elenistice; către sfîrșitul acestei perioade, într-o serie de domenii ea lasă cu mult în

---

[1] **Trebuie totuși să menționăm faptul că teoria generală a rapoartelor — elaborată probabil de Eudoxus din Cnidos — așa cum apare în *Elementele* lui Euclid, este surprinzător de asemănătoare celei elaborate la peste două milenii de către Dedekind (definiția numărului real prin „tăietură") — *I.P.***

urmă știința timpurilor Ptolemeilor, ca de pildă: aritmetica comercială, algebra numerică și aplicațiile ei, calculele aproximative, teoria numerelor și trigonometria. Toate cele spuse se referă la China, India și țările arabe (din lipsă de surse de informație, sîntem nevoiți să lăsăm deoparte Horezmul antic, Vietnamul și Indonezia).

Direcția generală în dezvoltarea matematicii din Asia medievală este condiționată în ultimă instanță de înrudirea structurii sociale a țărilor Orientului. Populația se ocupă aici cu agricultura, cu diferite meserii și cu negoțul, în forme proprii orînduirii feudale care se consolidează treptat. Sub raport politic, statele Orientului medieval sînt state despotice șubrede, care uneori reunesc sub puterea lor teritorii vaste timp de secole, sau doar zeci de ani, alteori se descompun și devin pradă ușoară pentru cuceritori.

O chestiune de viață și de moarte pentru aceste state erau irigarea artificială a ogoarelor, crearea și menținerea permanentă a sistemelor de irigație, lupta împotriva revărsărilor catastrofale ale rîurilor etc.

„De aici — scria Marx, — apare acea funcție economică, pe care erau nevoite s-o îndeplinească toate administrațiile asiatice, și anume funcția de organizare a lucrărilor publice" [5, p. 337]. Același lucru îl subliniază și Engels: „Prima condiție pentru agricultură este aici irigația artificială, fiind fie o chestiune a comunității, fie a provinciilor, fie a guvernului central. Guvernele din Orient au avut totdeauna doar trei departamente: finanțe (jaf în interiorul țării), război (jaf în interiorul țării și jaf în țări străine) și lucrări publice (grija pentru reproducție)". Fertilitatea solului se bazează în întregime pe irigație și prin aceasta, — adaugă Engels, — se explică „acel fapt, că era suficient un singur război pustiitor, pentru a depopula țara și a distruge civilizația ei pe sute de ani" [6, p. 75].

Printre problemele pe care trebuiau să le rezolve matematicienii orientali din cele mai vechi timpuri și în decursul întregii perioade analizate, un loc important îl ocupă problemele ce apăreau la construcția de canale și baraje, de drumuri, fortificații militare, construcții de palate și temple ș.a. Aici se cereau măsurarea volumelor și a suprafețelor, calcularea necesarului de materiale și de mînă de lucru, precum și a hranei și plății lucrătorilor. Departamentele financiare aveau de-a face cu repartiția impozitelor în funcție de diferitele norme de impunere, cu cote în natură, care depindeau de calitatea pămîntului, de distanța de

transport ș.a. La toate acestea se adăugau tot felul de probleme de aritmetică comercială, și, îndeosebi în țările arabe, probleme de împărțire a moștenirilor în conformitate cu canoanele destul de complicate ale dreptului de moștenire musulman. Un interes practic evident îl aveau măsurarea distanțelor pînă la obiecte inaccesibile, ca și calculul dimensiunilor lor. Toate acestea au furnizat un material bogat pentru punerea în evidență a unor clase de probleme tipice de proporții, de ecuații liniare și sisteme de ecuații de acest fel, de extragere a rădăcinilor pătrate și cubice, iar printr-o oarecare complicare, ecuații de gradul al doilea și chiar al treilea.

În acest sens este semnificativ tratatul clasic chinezesc *Matematica în nouă cărți* (Țzin cijan șuan șu) [42], compus aproximativ în secolele al II-lea—I î.e.n., după surse mai vechi și care nu au ajuns pînă în zilele noastre. Aceasta este o culegere de probleme cu răspunsuri și reguli laconice de rezolvare. Înseși denumirile cîtorva dintre cărțile componente ale acestui tratat vorbesc de la sine: *Măsurarea ogoarelor*, *Raportul între diferite feluri de culturi cerealiere* etc. O mie de ani mai tîrziu, unul dintre fondatorii matematicii și astronomiei arabe, Muhammed ibn Musa al-Horezmi, la începutul lucrării sale *Scurtă carte despre calculul algebrei și al almukabalei* (Al-kitab al-muhtasar fi hisab al-djabar va-l-mukabal), scria că a introdus în ea acele lucruri „care sînt în permanență necesare oamenilor la moștenire și în testamente, la împărțiri de avere și procese judecătorești, în toate relațiile lor reciproce, precum și la măsurarea ogoarelor, la construirea canalelor și în geometrie și alte diferite chestiuni“ [104, p. 4].

Problematica matematicii nu era totuși determinată numai de nevoile nemijlocite ale vieții economice sau de stat. Practica stimula dezvoltarea matematicii și prin intermediul altor științe, îndeosebi prin cel al astronomiei. Studiul legilor fenomenelor cerești și calculele calendaristice impuneau procedee specific matematice. Lucrări încununate de succes asupra calendarului și punerea în concordanță a anului solar cu lunile lunare s-au efectuat în China încă din secolul al XIV-lea î.e.n. În China și India, tot de astronomie este legată rezolvarea în numere întregi a ecuațiilor liniare nedeterminate, care mai tîrziu se întîlnesc și în literatura arabă. Și tot astronomia cheamă la viață o serie întreagă de lucrări chinezești de interpolare cu ajutorul unor formule empirice, pînă la gradul al treilea inclusiv. În India, iar mai tîrziu în țările arabe, se elaborează bazele trigonometriei și aparatul de calcul aproximativ pentru nevoile astronomiei. În

Califatul de la Bagdad, geodezia acționează în același sens: după exemplul Alexandriei, aici se efectuează în secolul al IX-lea măsurători ale meridianului. Cu o sută de ani mai devreme, lungimea unui grad de meridian se măsurase și în China. Este caracteristic faptul că majoritatea matematicienilor Orientului erau totodată și astronomi.

În toate societățile, în care cunoștințele matematice depășesc cadrul folosirii unor numere mici și al celor mai simple măsurători, întîlnim o dezvoltare proprie mai mult sau mai puțin intensă a matematicii. În virtutea caracterului foarte abstract, general și interdependent al noțiunilor și metodelor ei, matematica a lucrat totdeauna, cel puțin în parte, cu folos și pentru viitor. Acest lucru se observă încă în Babilon și Egipt. O situație asemănătoare există în China și India. În aceeași antică *Matematică în nouă cărți*, unde nenumărate probleme și cărți întregi au o importanță nemijlocită și pe de-a întregul practică, există alte capitole mari apărute din analiza chestiunilor practice, dar prezentînd pentru acele vremuri un interes cu precădere abstract. Tocmai în cadrul dezvoltării imanente a matematicii apare de pildă algoritmul pentru rezolvarea unui sistem canonic de ecuații liniare cu orice număr de necunoscute, expus în cartea a VIII-a din *Matematică*. Același lucru se referă și la procedeul general de rezolvare numerică a ecuațiilor algebrice de orice grad, care a apărut prin generalizarea procedeului de extragere a rădăcinii pătrate și cubice din numere întregi. Exemple de acest gen, ca, de pildă, procedeul ciclic de rezolvare a ecuației lui Pell, nu sînt rare nici în matematica Indiei, nemaivorbind despre cea arabă.

Am caracterizat în linii generale obiectul cercetărilor matematicienilor din țările răsăritene în evul mediu. Să spunem cîteva cuvinte și despre metoda acestor cercetări.

În unele lucrări de istorie a științei s-a emis părerea că matematica Chinei antice ar fi fost pur empirică. S-a arătat că vechile cărți chinezești nu conțin demonstrații, că ele sînt de fapt doar niște culegeri de rețete explicate prin exemple. Într-adevăr, multe opere chinezești de matematică nu conțin concluzii teoretice. Dar prin aceasta cărțile chinezești se înrudesc cu multe cărți de aritmetică practică sau de geometrie, scrise de autori indieni, arabi și europeni din evul mediu. Trebuie să facem o distincție între maniera de expunere legată în cea mai mare parte de destinația cărții și procedeele de cercetare. Dogmatismul expunerii, învățarea mecanică pe de rost a diferitelor reguli, însesi mulțimea și fărîmițarea acestor reguli sînt condiționate de faptul că

literatura didactică medievală fusese destinată pentru oameni de afaceri: negustori, topometri, funcționari, constructori ș.a. Asemenea cititori au nevoie de reguli mecanice și pe cît posibil concise pentru rezolvarea unui cerc strict limitat și îngust de probleme.

Să observăm mai departe că nu toate lucrările vechi chinezești de matematică sînt lipsite de deducții și explicații. Acestea există de pildă într-o serie de opere care lămuresc și dezvoltă *Matematica în nouă cărți*. Multe rezultate științifice nici nu s-au putut obține, de altfel, în mod empiric și inductiv, ci au trebuit să se bazeze pe o deducție logică. Nu există îndoială că în timpul instruirii specialiștilor — matematicieni și astronomi —, acestora li se transmiteau verbal și unele demonstrații.

Diferitele părți ale matematicii se aflau bineînțeles în interdependență. Pe bază geometrică se demonstrau uneori propoziții aritmetice, ca de pildă regulile de sumare a unor serii; pe de altă parte, algebra se aplica la rezolvarea unor probleme de geometrie, exprimate prin ecuații. Cu toate acestea, în matematica Chinei antice nu găsim sisteme deductive ample, caracteristice pentru Grecia clasică, nu găsim o separare a axiomelor geometrice, o aritmetică teoretică construită pe baze logice etc. Matematica chineză nu se împarte clar în discipline relativ de sine stătătoare, deși germeni ai unei asemenea împărțiri există în felul de grupare a regulilor și a problemelor. În particular, geometria nu se degajă ca o știință aparte. Aici se poate face o paralelă cu știința babiloniană despre care O. Neugebauer scria: „În comparație cu algebra și cu știința numerelor, rolul geometriei este destul de neînsemnat în matematica Babilonului. Aceasta nu e de mirare. Problema centrală a dezvoltării matematicii din vechime este rezolvarea numerică, care satisface anumite condiții". Și mai departe: „... «geometria» nu este o știință matematică distinctă, ci e tratată în același mod ca și orice altă formă a relațiilor numerice dintre diferite obiecte ale practicii" [48 a, p. 44—45]. În treacăt fie zis, volumul cunoștințelor de geometrie a fost cu mult mai mare în China decît în Babilon.

Chestiunea privitoare la cauzele acestei particularități a matematicii chineze este foarte complexă. O altă latură a aceleiași chestiuni este problema apariției și a dezvoltării încununate de succes a științei deductive în Grecia. Ne vom limita la observația că probabil toate se reduc în cele din urmă la deosebirile profunde dintre structura și ideologia polisurilor grecești — state sclavagiste cu o formă de conducere relativ democratică — și

cea a despoțiilor orientale agrar-birocratice, feudale sau semifeudale.

Nivelul teoretic al matematicii în India și îndeosebi în țările Orientului Apropiat și Mijlociu este mai ridicat decît în China. Aici se manifestă influența științei elene, mai superficial în India, unde legăturile cu îndepărtatele centre ale lumii elenistice stabilite în urma expedițiilor lui Alexandru Macedon nu fuseseră destul de intense, și mult mai profund în țările Islamului, care încorporează teritoriile fostelor state elenistice. Învățații din țările Orientului Apropiat și Mijlociu preiau în secolele al VIII-lea—al IX-lea de la greci nu numai o rezervă imensă de cunoștințe concrete, ci își însușesc profund și metoda lor deductivă de cercetare și de expunere. Tocmai aceasta deosebește matematica țărilor arabe de cea chineză și, într-o măsură mai mică, de cea indiană, și tocmai aceasta a asigurat avantaje deosebite.

În centrul atenției matematicienilor din Orientul Apropiat și Mijlociu stăteau aceleași probleme ca și în China și India; bazîndu-se pe moștenirea elenă, ei au putut înainta însă cu mult mai departe în elaborarea matematicii calculatorii. În timp ce, de pildă, indienii se limitaseră în trigonometrie la înlocuirea coardei prin sinus, la introducerea cosinusului și a sinusului-versus, și la folosirea pentru calcul a unor tabele mici de legături simple bazate doar pe teorema lui Pitagora — în schimb, matematicienii țărilor Islamului creează trigonometria ca o știință vastă și ramificată. Marele interes față de problemele algebrice ale geometriei duce aici nu numai la elaborarea unor procedee de rezolvare numerică a ecuațiilor, ca în China, ci și la transformarea algebrei într-o disciplină independentă. Un exemplu viu al prelucrării teoretice a procedeelor concrete ale matematicii calculatorii îl constituie dezvoltarea teoriei generale a rapoartelor și introducerea noțiunii de număr irațional (pozitiv). Nu afirmăm de loc că matematicienii arabi s-ar fi ocupat exclusiv de probleme de calcul sau de generalizări legate de acestea. Ele se aflau pe primul plan și greutatea lor specifică creștea o dată cu timpul. În același timp, în țările Islamului au fost obținute rezultate prețioase și în domenii clasice, ca de pildă în ce privește bazele geometriei, în studiul problemei dreptelor paralele.

Studiile de matematică în diferitele țări ale Asiei au în general baze comune care s-au menținut datorită legăturilor comerciale, politice și culturale. În acele vremuri, contactele științifice erau desigur neregulate, se întrerupeau adesea, dar dacă luăm în considerare intervale mari de timp, constatăm rolul lor important.

Aceste contacte nu au fost studiate pe deplin nici pînă astăzi și cercetarea lor este îngreuiată de lipsa de referiri la lucrările altor învățați în operele respective. În această privință sîntem nevoiți să ne bazăm pe date din istoria generală, pe succesiunea cronologică a descoperirilor, pe călătoriile cunoscute ale învățaților antici, pe coincidența problemelor și metodelor etc. Numai ansamblul tuturor acestor date poate crea un tablou mai mult sau mai puțin clar, în care rămîn totuși multe goluri.

Primele trei capitole din această carte sînt consacrate matematicii din țările Orientului, iar cel de-al patrulea capitol — matematicii din Europa. În Europa medievală, matematica începe să se dezvolte pornind de la un nivel coborît. La Roma și în provinciile ei din Europa occidentală n-au existat centre științifice de cercetare a științelor naturii de tipul celor din regiunile răsăritene ale imperiului. Noile state feudale ale francilor, germanilor, celților, slavilor și altor popoare au moștenit doar cunoștințe modeste de aritmetică și geometrie aplicată, suficiente pentru stadiul inițial de dezvoltare a feudalismului european, cu tehnica lui primitivă, cu comerț slab și legături aproape inexistente cu exteriorul. Situația se schimbă în epoca feudalismului dezvoltat, a construirii orașelor și a formării monarhiilor naționale. Din secolele al XI-lea—al XII-lea, bogățiile culturii arabe și a celei antice devin accesibile europenilor din Peninsula Iberică, în urma expedițiilor războinice sau a călătoriilor cu scop comercial în țările musulmane din Asia și Africa și în Bizanț. În consecință, începe o asimilare rapidă a literaturii filozofice și științifice arabe, iar prin intermediul ei și în parte și direct — a celei antice. Se creează o literatură proprie în limba latină, iar mai tîrziu și în alte limbi naționale noi. Ideile și metodele matematice ale Orientului feudal prind rădăcini puternice în țările Europei, apropiate în ceea ce privește condițiile sociale, și dau aici rod nou. În secolele al XIII-lea—al XIV-lea, învățații din Italia, Franța, Anglia și Germania nu numai că intră în mod creator în posesia celei mai mari părți a cunoștințelor matematice și astronomice a dascălilor lor, dar într-o serie de domenii, ca de pildă în algebră, pășesc înainte. Mai mult decît atît, aici apar în embrion ideea de funcție, de reprezentare a ei grafică, și noi procedee de calcul infinitesimal — primii vestitori ai apropiatei intrări a matematicii într-o nouă perioadă de dezvoltare, perioada matematicii mărimilor variabile.

Generalități. Despre matematica Chinei în cea mai veche perioadă a istoriei ei există informații disparate de pe la mijlocul celui de-al II-lea secol î.e.n.; ele se bazează îndeosebi pe date asupra calendarului. Încă de pe atunci agricultura constituia ocupația principală a populației, și determinarea corectă a perioadelor de însămînțare și de recoltare a orezului și altor cereale căpătase o importanță hotărîtoare pentru întreaga economie. De aceea, observarea zilelor de echinocțiu și solstițiu, de pildă, după culminația anumitor stele era efectuată de multă vreme în China de către funcționari speciali, calificați, iar perfecționarea calendarului de-a lungul mileniilor prezintă o funcție importantă a aparatului de stat. Încă din secolul al XIV-lea astronomii erau preocupați de coordonarea calendarului lunar de uz curent, cu calendarul solar. Împărțirea în luni mari și mici, respectiv, de cîte 30 și 29 de zile, era determinată de fazele Lunii, dar anul compus din 12 luni (format din 354 de zile) era destul de incomod pentru necesitățile agriculturii. Zilele de schimbare a celor patru anotimpuri ale anului din acest calendar nu sînt rigid legate de anumite date și luni: anul lunar este cu 11 zile mai scurt decît cel tropic, a cărui durată fusese stabilită destul de exact de către chinezi la 365 și 1/4 zile. În China, în jurul anului 600 î.e.n., la fiecare 19 ani, se introduceau 7 luni suplimentare: ciclul solar de 19 ani diferă față de 235 luni lunare cu mai puțin de o zi. În Grecia, atenianul Meton a introdus un ciclu similar cu aproape 150 de ani mai tîrziu [39].

Asemenea calcule calendaristice presupun cunoștințe aritmetice înaintate. Totuși, nu dispunem de date suficient de amănunțite cu privire la dezvoltarea matematicii în China pînă aproape de începutul erei noastre.

Încă în prima lucrare specială de matematică, ajunsă pînă în zilele noastre, *Matematica în nouă cărți*, găsim un ansamblu foarte

bogat de cunoștințe care caracterizează starea științei în perioada primei dinastii Han (206 î.e.n.—25 e.n.). Imperiul Han, în care relațiile feudale căpătaseră o mare dezvoltare, își extinde puterea pe teritorii vaste. În această perioadă se fac lucrări mari de construcție a drumurilor — cu puțin înainte se începuse construcția Marelui Zid chinezesc —, se desfășoară pe larg construcțiile hidrotehnice. Cîrmuitorii din dinastia Han își consolidează cu stăruință un aparat de stat ramificat, care conduce toate lucrările mari de construcții și de strîngere a impozitelor, avînd totodată în evidență desfășurarea prestațiilor de muncă etc.

În perioada stăpînirii ambelor dinastii Han (pînă în anul 220 e.n.) se continuă cu succes o serie de lucrări de astronomie, și anume: precizarea și extinderea cataloagelor de stele, perfecționarea calendarului solar și altele. Pe lîngă ceasul de apă, folosit din vechime, apare și ceasul solar. Observațiile ating o mare perfecțiune. De pildă, cu 100 de ani înaintea erei noastre durata revoluției planetei Saturn se considera egală cu 28 de ani, iar cu puțin înaintea erei noastre se stabilise la 29,79 de ani, pentru ca la sfîrșitul primului secol să ajungă la 29,51 de ani, adică doar cu 0,05 ani mai mare decît valoarea ei reală. Eminentul astronom Cijan Hen (secolele I -- al II-lea), constructorul globului rotativ și al unui planetariu, vorbește despre sfericitatea Pămîntului, despre infinitatea Universului în spațiu și în timp. Tot el pune bazele unei serii de lucrări pentru calculul mai exact al valorii numărului π. În jurul anului 330, Iu Si descoperă din nou precesia echinocțiilor, iar cercetătorii continuă să se ocupe și mai tîrziu de precizarea valorii acesteia.

Literatura matematică chineză din primul mileniu al erei noastre ni s-a păstrat doar într-o mică măsură. După lucrările și cronicile istorice ajunse pînă la noi se vede că, în primele cinci secole, metodele din *Matematica în nouă cărți* s-au dezvoltat în continuare prin comentatorii eminenți ai acestei cărți, cum a fost de pildă Liu Huei (secolul al III-lea), precum și prin lucrările lui Sun-Țzî (secolul al III-lea sau al IV-lea), Tzu Ciun-ciji (secolul al V-lea), Liu Cijo (secolul al VI-lea), Li Ciun-fen (secolul al VII-lea) și alții.

În pofida numeroaselor războaie externe și interne, cît și a frecventelor răscoale țărănești, imperiul chinez se întărește. În perioada dinastiei Tan (618—907), China devine un stat întins de la Oceanul Pacific pînă în Tibet și de la Marele Zid pînă în Vietnam. În orașele mari înfloresc diferite meșteșuguri. În această perioadă inginerii chinezi fac o serie de invenții tehnice

dintre cele mai prețioase. Pentru dezvoltarea științei a fost de mare importanță invenția tiparului — cu table gravate — în secolul al VII-lea, și cu litere mobile — în secolul al IX-lea; hîrtia se fabrica încă din secolul I sau al II-lea. Un model minunat al activității inginerilor chinezi este Marele canal care leagă regiunile sudice ale țării de cele nordice. Construcția acestui canal începe în secolul al VII-lea și se desfășoară cu întreruperi; după terminare (secolul al XIII-lea), lungimea canalului atinge 1 700 km.

Sub dinastia Tan cresc considerabil legăturile internaționale. Încă la sfîrșitul secolului al II-lea î.e.n. China face comerț prin caravane cu Asia centrală, iar prin intermediul Asiei centrale, cu Europa; mătăsurile și brocartul chinezesc erau vestite la Roma. În secolul I se întăresc legăturile cu India, fapt despre care vorbește răspîndirea în acea vreme a budismului în China. Călători chinezi parcurg întreaga Indie, așa cum a făcut de pildă Fa Sian la sfîrșitul secolului al IV-lea și începutul secolului al V-lea. Pe calea apelor, prin Marea Chinei și Oceanul Indian se mențin legăturile Chinei cu Indonezia, India, Persia și Arabia. În secolul al VII-lea, în China lucrează cîțiva învățați indieni. Despre starea înfloritoare a raporturilor de afaceri cu alte țări în perioada Tan aduce mărturie un călător arab, care arată că în orașul capitală Guan Cijou (Canton) locuiau în acea vreme 120 000 de străini.

În perioada Tan se formează definitiv ierarhia sui-generis a aparatului birocrat în care intră și instituții științifice, ca de pildă Camera învățaților și Biroul de astronomie. Pentru a obține o funcție în aparatul de stat, în China trebuiau trecute diferite examene, printre care se număra și cel de matematică.

De observat că în China predarea matematicii ocupă un loc marcant din timpuri străvechi. Încă din perioada dinastiei Cijou (1027—249 î.e.n.) se elaborează un sistem de predare a aritmeticii la copii, începînd cu vîrsta de 6—8 ani. Învățămîntul și examenele de matematică capătă o bază serioasă în a doua jumătate a primului mileniu al erei noastre. În programul de învățămînt al Academiei imperiale în epoca dinastiei Tan, printre cele șase discipline se află și matematica, al cărei studiu dura timp de șapte ani. China dispune de numeroase cadre de matematicieni, așa încît, de pildă, în timpul împăratului Tai-țzun (627—649) se numărau 3 260 de matematicieni diplomați.

Una dintre cele mai remarcabile inițiative științifice ale acestei perioade este măsurarea gradelor de meridian. Ideea de a măsura gradul de meridian cu ajutorul unei frînghii, pentru rezolvarea unor probleme disputate, este emisă încă în jurul anului 600 de

Liu Cijo, dar realizată abia în anul 725, de către astronomul Nan Gu-șo. La măsurarea meridianului participă și I Sin, care după Liu Cijo se ocupă de elaborarea metodelor de interpolare pentru nevoile astronomici. Nu putem aprecia precizia acestei măsurători, deoarece nu știm să transformăm rezultatul — 351 li 80 pu — în unitățile noastre de măsură. Contemporan cu I Sin este și astronomul și algebristul Van Siao-tun care, printre altele, se ocupă și de rezolvarea ecuațiilor numerice de gradul al treilea.

O a treia perioadă importantă în dezvoltarea științei chineze ține de perioada dinastiei Sun (960—1279). O dezvoltare și mai mare o capătă atunci comerțul de peste mări, înfloritor, de altfel, încă din epoca Tan. Se dezvoltă construcția corăbiilor, iar navigatorii încep să folosească busola, descoperită cu mult înainte. Una dintre primele descrieri științifice ale însușirilor acului magnetic o datorăm lui Șen Ko, inginer și matematician din secolul al XI-lea, care se ocupă și de astronomie, propunînd un calendar mai corespunzător particularităților climaterice ale celor patru anotimpuri. Praful de pușcă își găsește întrebuințare în tehnică și arta militară. Legate de extinderea relațiilor externe, se amplifică lucrările geografice și de întocmire a hărților. Algebra atinge o înaltă treaptă de dezvoltare, și în secolul al XIII-lea îi sînt consacrate tratatele clasice ale lui Țin Țziu-șao, Li E, Ian Huei și Ciju Șițze; la aceste nume trebuie adăugat numele astronomului și matematicianului Go Șou-țzin. La sfîrșitul secolului al XIII-lea și începutul celui de-al XIV-lea, Go Șou-țzin conduce o rețea întinsă de observatoare de unde se fac observații astronomice și geografice foarte precise; la fel cu mulți alți matematicieni chinezi și acesta este un eminent reformator al calendarului.

Cuceririle mongole din secolul al XIII-lea duc la întărirea legăturilor între China și Asia centrală, învățații chinezi se îndreaptă spre observatoarele țărilor arabe, iar la Pekin lucrează specialiști din Asia centrală. Aceste contacte au o influență atît asupra progresului astronomiei, cît și a matematicii. Realizările învățaților chinezi în algebră se răspîndesc spre Apus, aparatele și cunoștințele științifice ale astronomilor arabi devin un patrimoniu al chinezilor. În secolele al XIII-lea — al XIV-lea, în China apar meșteri și negustori din Europa.

Jugul mongol sfărîmat abia la mijlocul secolului al XIV-lea, războaiele lungi și grele și îndeosebi conservarea relațiilor birocratice-feudale și stagnarea economică opresc pentru mult timp progresul științei în China. În secolul al XVIII-lea ordinea feudală se consolidează prin venirea la putere a cotropitorilor manciu-

rieni, iar mai tîrziu — prin aservirea marii țări de către puterile capitaliste străine. Pînă în vremurile noastre au ajuns multe zeci de cărți de aritmetică comercială din secolele al XIV-lea—al XVII-lea, foarte căutate în trecut de oamenii de afaceri, dar din punct de vedere matematic interesul lor este însă neînsemnat. De la sfîrșitul secolului al XVI-lea, chinezii fac cunoștință cu noile descoperiri ale matematicienilor europeni. Totuși, în cursul unei perioade lungi din timpul Renașterii, nivelul cercetărilor științifice originale de matematică rămîne mai coborît în China decît în Europa. Matematica pășește în China pe o cale nouă de dezvoltare creatoare, doar în urma avîntului impetuos al mișcării naționale de eliberare din ultimele decenii și, îndeosebi, după victoria poporului chinez și întemeierea Republicii Populare Chineze.

Mai sus am amintit că multe opere străvechi chineze de matematică nu s-au păstrat pînă-n vremurile noastre. Mai trebuie adăugat că și literatura ajunsă pînă în zilele noastre nu s-a studiat în suficientă măsură, iar operele originale ale clasicilor matematicii chineze sînt inaccesibile multor persoane. În limbi europene s-au tradus integral doar lucrarea *Matematica în nouă cărți* și o mică lucrare de geometrie; în rest, putem face aprecieri numai după reproduceri [34—40]. Multe lucrări foarte importante privind istoria matematicii în China sînt și ele publicate în limba chineză [35, 36, 37].

Numerația antică chineză. Cele mai vechi inscripții numerice din China se întîlnesc pe oase de ghicit, din secolele al XIV-lea—al XI-lea î.e.n., pe obiecte de ceramică sau de bronz și pe monede din secolele al X-lea—al III-lea; cel mai mare număr întîlnit este 30 000. Încă de pe atunci numărătoarea are un caracter zecimal. Cifrele corespunzătoare pentru numerele de la 1 pînă la 10 se dau în tabelul 1. Principiul formării cifrelor pentru primele patru numere este foarte simplu: acestea sînt niște liniuțe paralele. Nu se cunoaște originea cifrelor pentru numerele 5—9. Și numărul 10 se notează printr-o linie, dar aceasta este verticală.

În scrierea numerelor mari se folosesc atît principiile aditive, cît și cele multiplicative, iar pentru numerele 100 și 1 000 există semne deosebite. Astfel, pentru numerele 11—14, la liniuța verticală se adaugă numărul necesar de liniuțe orizontale, mai mici însă. Numerele 20—40 se reprezintă sub forma a 2—3—4 zimți sau tăind semnul 10 prin semnele 2,3,4. De pildă, pentru 50 sau 80, deasupra cifrelor 5 sau 8 se pune semnul lui 10; combinații între semnele lui 2,3 etc. cu semnele lui 100 și 1 000 reprezintă

sute și mii. Cîteva din elementele acestui sistem de numerații intră apoi în componența unei scrieri mult mai sistematice, cu ajutorul așa-numitelor cifre-bastonașe.

Tabelul 1

Cifre în China antică și medievală

(după cartea lui J. Needham)

Cifre	Cifre hieroglife	Pronunția	Cifre pe oase de ghicit din secolele XIV-XI î.e.n.	Cifre pe obiecte din bronz și monede din secolele X-III î.e.n.	Cifre-bastonașe: Secolul II î.e.n. — Secolul XII e.n. U.	Cifre-bastonașe: Secolul II î.e.n. — Secolul XII e.n. Z.	Cifre-bastonașe: Secolul XII unități	Cifre-bastonașe: Secolul XII zeci
1	一	*i*	一	一	𝍠	𝍩	𝍠	𝍩
2	二	*r*	二	二	𝍡	𝍪	𝍡	𝍪
3	三	*san*	三	三	𝍢	𝍫	𝍢	𝍫
4	四	*si*	亖	亖	𝍣	𝍬	𝍣 X	𝍬 X
5	五	*u*	⧖	⧖	𝍤	𝍭	𝍤 Ō	𝍭 ♁
6	六	*liu*	∧ ⋒	⋒	𝍥	𝍮	𝍥	𝍮
7	七	*ți*	+	+	𝍦	𝍯	𝍦	𝍯
8	八	*da*	)(	)(	𝍧	𝍰	𝍧	𝍰
9	九	*țziu*	[illegible]	[illegible]	𝍨	𝍱	𝍨 X	𝍱 X
10	十	*și*	|	⫯				
100	百	*dai*	[illegible]	[illegible]				
1000	千	*țuani*	[illegible]					
10000	萬	*van*						
0	零	*lun*					○	

Din secolul al IV-lea și pînă în era noastră, dar poate și mai înainte, chinezii folosesc în calcule cifrele-bastonașe (tabelul 1) rămase în circulație timp de o mie cinci sute de ani, pînă în

secolul al XIII-lea și mai tîrziu chiar. Aceste cifre se formează de asemenea după principiul aditiv, din segmente verticale și orizontale. O îngrămădire prea mare de segmente, care ar fi lipsit scrierea de un caracter ilustrativ, se evita dînd unui bastonaș valoarea 5 pentru numerele 6—9 și respectiv valoarea 50, pentru numerele 60—90. Poate că aici avem de-a face cu un ecou al unei numerații mai vechi cu baza 5. În această numerație, sînt doar 18 cifre: pentru unități — de la 1 pînă la 9, și pentru zeci — de la 10 pînă la 90; ambele grupe de cifre sînt foarte asemănătoare, deosebindu-se doar prin așezare. La scriere, cifrele-bastonașe se reprezintă direct, așa după cum se reprezintă un număr pe abac (tabla de calcul) prin intermediul unor bastonașe veritabile. Calculul cu ajutorul cifrelor-bastonașe are un caracter pozițional. Cifrele unităților servesc și pentru scrierea sutelor, a zecilor de mii etc., iar cifrele zecilor — pentru mii, sute de mii etc. Învățatul chinez Sun Țzî din secolul al III-lea sau al IV-lea exprimă clar principiul valorii poziționale, scriind: „În calcule trebuie să cunoaștem în primul rînd pozițiile numerelor. Unitățile sînt verticale, iar zecile — orizontale; sutele stau în picioare, în timp ce miile stau culcate; astfel, miile și zecile au același aspect, iar zecile de mii seamănă cu sutele“ [34, p.27].

Numerele se scriu în linie. De pildă, numărul 6 728 se reprezintă astfel:

𝍮𝍦𝍪𝍧

Numerația cu ajutorul cifrelor-bastonașe este cel mai vechi dintre sistemele zecimale poziționale, așa după cum numerația babilonienilor este cel mai vechi sistem sexagesimal pozițional. În ambele numerații, principiul pozițional n-a fost dus totuși pînă la sfîrșit: în numerația scrisă cu ajutorul cifrelor-bastonașe lipsește semnul lui zero. Aceasta se explică prin legătura directă dintre calculul cu cifrele-bastonașe și abac. Lipsa semnului lui zero nu produce nici un impediment: rîndurile respective de pe abac rămîn pur și simplu goale. Probabil că tocmai faptul că majoritatea calculelor continuă să se facă pe abac, chiar și după ce apare hîrtia, frînează perfecționarea sistemului chinezesc pozițional de scriere și introducerea semnului lui zero.

Simbolul lui zero este adus dinafară în China. Despre el se amintește pentru întîia oară într-un tratat de astronomie și astrologie, întocmit între anii 718 și 729. Autorul tratatului este indianul Gauthama Sidharta, care a lucrat la Biroul de astronomie din China; numele lui chinezesc este Țiutan Sida. Expunînd

procedeele indiene de calcul, Ţiutan Sida arată că pentru a însemna locul gol într-o coloană a abacului, trebuie pus un punct [40, p.12]. Această inovaţie n-a prins imediat rădăcini. Semnul lui zero sub forma unui cerculeţ se întîlneşte pentru întîia oară în tipar în anul 1247, în opera *Nouă cărţi de matematică* a lui Ţin Ţziu-şao. Totuşi, unii savanţi chinezi moderni presupun că semnul lui zero fusese introdus în mod independent în China.

În China au existat şi alte procedee de scriere a numerelor. Foarte vechi şi cele mai întrebuinţate în scriere sînt cifrele hieroglife (tabelul 1), a căror formă s-a desăvîrşit încă în secolul al III-lea î.e.n., ele rămînînd pînă-n ziua de azi în circulaţie, deşi în literatura ştiinţifică au fost înlocuite prin aşa-numitele cifre arabe. În acest sistem există semne speciale pentru unităţile cîtorva ranguri zecimale superioare, iar la scrierea numerelor se aplică principiul multiplicativ de care este strîns legat şi principiul valorii poziţionale. Aici nu există hieroglife speciale pentru 20, 200, 2 000 etc. ca în sistemul alfabetic, ci, de exemplu, pentru scrierea numărului 200 trebuie puse alături hieroglifele 2 şi 100. Totodată, hieroglifele zecilor, ale sutelor etc. se întrebuinţează numai pentru stabilirea rangului cifrei precedente a unităţilor, ele neputînd fi cifre independente. Pentru a exprima numărul 325, trebuie scris succesiv unul dedesubtul celuilalt, hieroglifuI lui 3, hieroglifuI lui 100, al lui 2, al lui 10 şi al lui 5; dacă pentru rangul zecilor am folosi cifre romane, iar pentru unităţi — cele arabe şi am scrie în linie, atunci numărul s-ar prezenta astfel: 3C 2X5. O asemenea numeraţie scrisă, reflectă pe de-a-ntregul graiul vorbit (trei-sute-două-zeci-cinci). Ea s-ar putea numi sistem zecimal poziţional concret, lipsit de semnul lui zero.

Nu ne vom opri asupra varietăţilor de cifre hieroglife, cum ar fi de pildă, cifrele comerciale.

Încă din secolul al II-lea e.n., aceleaşi hieroglife ale rangurilor zecimale superioare au diferite valori. După Siu E (în jurul anului 190) există trei variante ale sistemului de numeraţie: „superioară“, „mijlocie“ şi „inferioară“.

	Numeraţie superioară	Numeraţie mijlocie	Numeraţie inferioară
van	10^4	10^4	10^4
i	10^8	10^8	10^5
cijao	10^{16}	10^{12}	10^6
ţzin	10^{32}	10^{16}	10^7

Rangul superior se numeşte ţzai, ceea ce corespunde în numeraţie mijlocie lui 10^{44}; între altele, însuşi Siu E nu merge mai departe de rangurile indicate în tabel. După Şen Ko, din cele trei sisteme de numeraţie, cea mai veche este cea „inferioară".

Un fenomen similar se întîlneşte şi la alte popoare. Astfel, conform manuscriselor ruseşti de matematică din secolul al XVII-lea, la mijlocul secolului în Rusia existau două sisteme diferite de unităţi de bază pentru rangurile zecimale superioare — „număr mic" şi „număr mare".

	Număr mic	Număr mare
tima*	10^4	10^6
leghion	10^5	10^{12}
leodr	10^6	10^{24}
voron	—	10^{48}

O altă paralelă o prezintă calculul cu milioanele, bilioanele, trilioanele etc., dezvoltat în Europa în secolele al XIV-lea-al XV-lea. Chiar şi pînă-n prezent în unele ţări, bilioanele, trilioanele etc. se notează prin 10^9, 10^{12} etc., adică prin puterile miilor, iar în altele — 10^{12}, 10^{18},... adică prin puterile milionului.

Cifrele hieroglife chineze se foloseau de obicei pentru scrierea numerelor, dar nu şi în calcule. Mult mai tîrziu, se întîlnesc uneori inscripţii şi calcule în sistem zecimal poziţional, dar cu semne hieroglife pentru primele 10 cifre şi un cerculeţ în locul lui zero (vezi fig. 1 dintr-o aritmetică chineză din anul 1355 în care se prezintă operaţia $3069 \cdot 5 = 138105$). Cu un fenomen similar ne-am mai întîlnit în matematica alexandrină şi ne vom mai întîlni din nou în numeraţia Europei medievale.

Fig. 1

* Interesant este faptul că termenul slavon „tima" înseamnă 10^4 (zece mii), dar şi „întuneric". În vechi scrieri romîneşti (ca de exemplu, în cele ale diaconului Coresi—secolul al XVI-lea) o mare mulţime de oameni etc. e exprimată prin „întuneric" — *I. P.*

Abacul. După cum s-a mai spus, calculele ceva mai complicate se făceau pe abac cu ajutorul unor bastonaşe. De fapt, nu era necesar un abac special: pentru aceasta putea servi orice suprafaţă plană, orizontală, pe care se aşezau în coloane bastonaşele de calcul. În China antică, bastonaşele aveau o lungime pînă la 15 *cm* şi o grosime pînă la ½ *cm*; se confecţionau din lemn, mai tîrziu din fontă, iar pentru oamenii bogaţi, din fildeş. Aceleaşi bastonaşe aşezate în poziţie orizontală reprezintă unităţi, sute etc., iar în poziţie verticală — zeci, mii etc.

Să analizăm prin cîteva exemple cum se efectuează cele mai simple operaţii aritmetice cu ajutorul bastonaşelor [41]. Să adunăm 9876 cu 5647. Mai întîi ambele numere se reprezintă alături unul de altul. Apoi, miile celui de-al doilea termen se adaugă la miile primului; se obţine 14 876, iar din al doilea termen rămîne 647. Mai departe, sutele celui de-al doilea termen se adaugă la sutele primei sume intermediare; în mod analog se procedează cu cea de-a doua sumă intermediară şi cu zecile celui de-al doilea termen etc. Toate fazele operaţiei sînt prezentate în tabelul 2 (calculele trebuie citite de jos în sus).

Tabelul 2

1	5	5	2	3				
1	5	5	1	6				7
1	5	4	7	6			4	7
1	4	8	7	6		6	4	7
	9	8	7	6	5	6	4	7

În cazul înmulţirii, de exemplu 234 cu 24 (tabelul 3), rangul inferior al înmulţitorului 24 se aşază dedesubtul rangului superior al deînmulţitului şi înmulţitorul se înmulţeşte cu 2. Rezultatul 48 se scrie pe linia de mijloc. Apoi înmulţitorul 24 se mută cu un

rang spre dreapta, cifra 2 din deînmulțit se neglijează, 24 se înmulțește cu 3 în două reprize — mai întîi 2 ori 3, iar 6 se adaugă la 48, ceea ce dă 54, apoi se înmulțește 4 cu 3, iar 12 se adaugă la 540, ceea ce dă 552 etc.

Tabelul 3

234	234	34	34	34	4	4	4	
	48	·48	54	552	552	560	5616	5616
24	24	24	24	24	24	24	24	

Calculul descris se deosebește de cel modern prin aceea că operațiile încep de la rangurile superioare și treptat trec la cele inferioare. O asemenea ordine impune să se introducă succesiv corecții în rezultatele găsite la fazele intermediare ale calculului. O altă particularitate este faptul că de pe abac dispar treptat rezultatele intermediare și cifrele întrebuințate o dată dintr-unul sau din ambele numere inițiale. Aceste două situații se întîlnesc și în matematica hindusă, iar mai tîrziu — și în matematica arabă[1].

Dăm mai jos și un exemplu de împărțire 5 616 : 24 = 234 (vezi tabelul 4).

Tabelul 4

	2	2	23	23	234	234
5616	5616	1616	816	216	96	
24	24	24	24	24	24	

Să observăm că, înainte de a începe împărțirea, se determină numărul de ranguri al cîtului. Pentru aceasta, împărțitorul, care la început se așază după ranguri dedesubtul deîmpărțitului, se mută spre stînga atîta timp cît cifrele de la începutul deîmpărțitului nu vor forma cel mai mic număr posibil, care să întreacă totuși împărțitorul. Atunci, numărul de coloane cu care trebuie mutat împărțitorul, mărit cu o unitate, dă tocmai numărul de semne al cîtului. Dacă împărțirea se face cu rest, pe abac rămîne, în cele din urmă, partea întreagă a cîtului, dedesubtul ei restul,

---

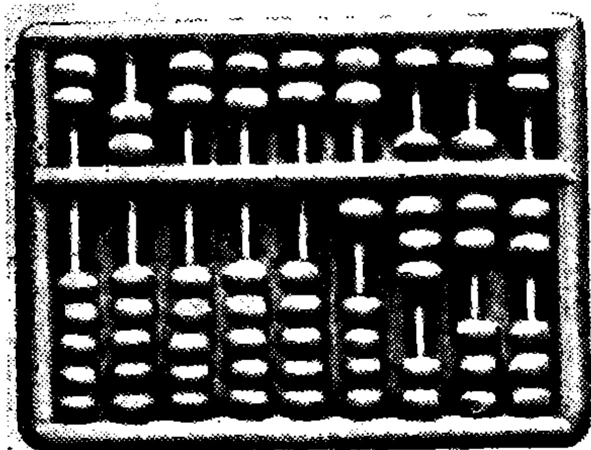
[1] Grecii antici, cel puțin la înmulțire, începeau de asemenea cu rangurile superioare. — *N.A.*

iar și mai jos apare împărțitorul, așa încît rezultatul se poate citi ca un întreg cu fracție.

Pe același plan cu calculul pe abac, în China se folosește și calculul verbal, dar, bineînțeles, în limite mult mai mici. Cunoașterea tablei de înmulțire pînă la 9×9 face parte integrantă din educația matematică încă din secolul al VIII-lea î.e.n. Asemenea table s-au păstrat scrise pe scîndurele de lemn lăcuite, conținînd produsele de la 1×1 pînă la 9×9; arheologii consideră că ele sînt din secolul I e.n.

Matematicienii chinezi ating o mare artă în calculul cu bastonașele. Folosindu-le, ei efectuează nu numai cele patru operații de aritmetică, ci extrag și rădăcini și rezolvă numeric ecuații algebrice. Pe calculatori nu-i intimidează numerele mari. În *Matematica în nouă cărți* se întîlnesc numere foarte mari — cel mai mare este de pildă 1 644 866 437 500, iar acesta mai trebuie înmulțit cu $\frac{16}{9}$.

Nu dispunem de dovezi precise despre felul cum și cînd s-a creat cealaltă formă a abacului chinezesc — suanipanul (ad litteram — tablă de calcul) (fig. 2). Se știe că cel tîrziu în secolul al VI-lea e.n., dar poate chiar încă în secolul al II-lea e.n., odată cu calculul cu ajutorul bastonașelor încep să se folosească și alte forme de calcul instrumental. Într-o carte foarte veche, pe care Cijan Luan (în jurul anului 570) o atribuie lui Siu E, sînt descrise două procedee de acest fel. Într-un caz este vorba despre o tablă cu cîteva sfori paralele, pe fiecare dintre ele fiind înșirate cîte cinci bile. Ultima bilă de pe fiecare sfoară are o culoare diferită de a celorlalte patru și indică cinci unități de rang corespunzător, așa încît toate la un loc pot reprezenta numere pînă la 9. Un alt abac este alcătuit din zece drepte orizontale desenate, iar perpendicular pe ele se mișcă niște bile, de-a lungul coloanelor; valoarea numerică a unei bile dintr-o coloană este determinată de fîșia în care aceasta se află [40, p. 77].


Fig. 2. Suanipanul chinezesc (abacul) pe care sînt înscrise numerele 10^8 și 1872

Probabil că prin evoluția primei forme de abac apare suanipanul descris în literatura secolelor al XV-lea—al XVI-lea. Suanipanul

amintește „scioturile“ rusești. În rama dreptunghiulară a suanipanului sînt întinse niște sîrme sau sfori paralele, în număr de 9 sau chiar mai multe; perpendicular pe direcția sîrmelor, o riglă împarte suanipanul în două părți neegale. În compartimentul mare, pe fiecare sîrmă se înșiră cîte cinci bile mobile, iar în compartimentul mai mic, cîte una sau, mai des, cîte două; primele cinci bile par să corespundă celor cinci degete, iar celelalte — unei mîini sau la două mîini. Sîrmele corespund rangurilor zecimale; fiecare bilă din compartimentul mic are o valoare de cinci ori mai mare decît a bilelor de pe aceeași sîrmă, dar din compartimentul mare. Pentru reprezentarea numerelor, bilele se mută spre rigla transversală. La adunare, scădere și înmulțire este suficient să se folosească cîte una din bilele compartimentului mic, dar la împărțire este mai avantajos să se folosească ambele. Ca și la „scioturile“ rusești, calculele cu suanipanul se pot efectua cu o mare viteză.

La sfîrșitul evului mediu, suanipanul capătă o largă răspîndire nu numai în China, dar și în Japonia, unde poartă numele de soroban. În compartimentul mic al sorobanului se înșiră cîte o bilă avînd o valoare de cinci ori mai mare decît în compartimentul mare. Aceste instrumente își păstrează în ambele țări o mare popularitate pînă în zilele noastre, de altfel ca și „scioturile“ rusești în U.R.S.S.

Fracțiile. Fracțiile obișnuite de forma $\frac{m}{n}$ sînt cunoscute în China din vechime. Un semn special pentru fracții nu există, și în general vorbind fracția $\frac{m}{n}$ se scrie sub forma „*n* părți din *m*“. Pentru fracțiile mai uzuale se păstrează de asemenea denumiri și hieroglife vechi speciale. Așa de pildă, în cărțile II—VIII din *Matematica în nouă cărți*, jumătatea *(ban)* se reprezintă prin hierogliful 半, treimea — „jumătatea mică“ *(șao-ban)* 太半 iar două treimi — „jumătatea mare“ *(tai-ban)* 少半 În manualul de aritmetică a lui Siao Ian, întocmit în jurul anului 500, mai există o denumire și pentru sfert — „jumătatea slabă“. După cîte știm, semne speciale pentru fracțiile de bază, cum sînt de pildă 1/2, 1/3, 2/3, au lipsit nu numai în matematica chineză; aceeași situație o întîlnim și în cea elenă.

Operațiile cu fracții se efectuează tot pe abac și sînt elaborate foarte detaliat în aritmetica chineză, aplicîndu-se pe larg reducerea fracțiilor. Despre aceasta ne spune cel puțin faptul că primele probleme din *Matematica în nouă cărți* sînt consacrate reducerii fracțiilor și precedă operațiile de adunare și scădere. Regula reducerii fracțiilor sună astfel:

„Ceea ce poți împărți în jumătate, împarte în jumătate; dacă nu se poate împărți în jumătate, atunci stabilește cantitățile numitorului și ale numărătorului; din ce este mai mare, scade ce este mai mic; continuă să micșorezi reciproc pînă cînd vei obține — [numere] egale; cu acest număr egal fă reducerea“ [42, p. 440].

Această regulă laconică nu este altceva decît căutarea celui mai mare divizor comun a două numere naturale, cu ajutorul așa-numitului algoritm al lui Euclid. Algoritmul lui Euclid pentru două numere neprime între ele a și b se poate prezenta prin schema:

$$\begin{aligned} a - bq &= r_1 \\ b - r_1q_1 &= r_2 \\ &\dots\dots\dots\dots \\ r_{n-2} - r_{n-1}\, q_{n-1} &= r_n \\ r_{n-1} &= r_nq_n; \end{aligned}$$

Între altele, la Euclid, la fel ca și la matematicienii chinezi, nu este vorba de a împărți pe r_{k-1} prin r_k, ci de a scădea pe r_k din r_{k-1} de un număr cît mai mare posibil de ori. Cel mai mare divizor comun se obține cînd „prin scăderea permanentă a numărului mai mic din cel mai mare va rămîne un număr oarecare [tocmai r_n — *N.A.*], care va măsura precedentul“ [33a, I, p. 12]. Prezentînd schematic algoritmul din *Matematica în nouă cărți*, trebuie să înlocuim doar ultima linie a egalităților scrise mai sus prin următoarea:

$$r_{n-1} - r_n(q_n - 1) = r_n;$$

cel mai mare divizor comun r_n apare aici cînd „se obțin numere egale“. Primele cuvinte ale regulii chineze păstrează, poate, urma timpurilor cînd se reduceau cele mai simple fracții, avînd la numitor și la numărător numere pare.

În cărțile antice chinezești operațiile cu fracții se descriu foarte comprimat și nu totdeauna clar. Aceasta se mai referă și la alte multe reguli, care se explicau mai amănunțit verbal și de aceea în scriere erau foarte concise. Conform unei reguli din cartea I din

Matematica în nouă cărți, numitorul sumei unor fracții se obține pur și simplu prin înmulțirea numitorilor termenilor de adunat; nu se vorbește nimic despre găsirea celui mai mic multiplu comun. După adunarea fracțiilor, suma obținută se reduce. În cartea a IV-a, din aceeași lucrare, în problemele 1—11 se cere să se adune consecutiv fracțiile:

$$1 + \frac{1}{2},\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ,\ldots, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{12}$$

și ca numitori comuni se iau 2, 6, 12, 60, 120, 420, 840, 2 520, 27 720, 83 160. Aici, toți numitorii, cu excepția a doi (120 și 83 160), sînt cei mai mici multipli comuni. Poate că în cazul de față s-a folosit un procedeu mai perfecționat de obținere a celui mai mic numitor comun pentru cîteva fracții, dar acest lucru nu se formulează în mod explicit. Regula modernă de aducere la cel mai mic numitor comun o formulează Abu-l-Vafa (secolul al X-lea) în Orient, iar în Europa — Leonardo Pisano, și ea capătă o largă întrebuințare de-abia în secolele al XVI-lea—al XVII-lea [33, I, pp. 171—172].

Pentru a împărți un număr la o fracție, deîmpărțitul se înmulțește direct cu numitorul împărțitorului și rezultatul se împarte la numărător. Această regulă atît de obișnuită pentru noi, se întîlnește pentru întîia oară în matematica chineză; mai tîrziu, o găsim la învățații indieni Brahmagupta (secolul al VII-lea), Magavira (secolul al IX-lea) și Bhaskara (secolul al XII-lea).

Matematicienii din antichitate și evul mediu împart fracțiile ordinare aducîndu-le mai întîi pe amîndouă la același numitor, iar apoi împart numărătorul deîmpărțitului prin numărătorul împărțitorului. Așa procedează grecii antici și bizantinii, matematicienii din țările arabe și din Europa medievală. De-abia în anul 1544, M. Stiefel formulează din nou regula împărțirii printr-o fracție conform căreia operația se realizează prin înmulțire cu fracția inversă și totodată el subliniază în mod special că acest procedeu este foarte simplu.

Merită să observăm că învățații chinezi consideră încă din timpuri străvechi că întregii sînt un caz particular al fracțiilor; aceasta se vede chiar din primele probleme ale cărții a IV-a din *Matematica în nouă cărți*.

Fracțiile zecimale. Calculul zecimal se extinde în China și asupra fracțiilor: aici, mai devreme decît oriunde în altă parte,

se ajunge la fracții zecimale; acest lucru este în legătură cu dezvoltarea sistemului zecimal de măsură. Încă în secolul al II-lea î.e.n. în China se folosește un sistem dezvoltat de măsură pentru lungimi:

1 ci (picior)	=	10 țun
1 țun	=	10 feni
1 fen	=	10 li
1 li	=	10 fa
1 fa	=	10 hao

În secolul al III-lea, acest sistem de măsură pentru lungimi se dezvoltă mai departe și tot atunci, odată cu alte sisteme, apar sisteme zecimale pentru volume și greutăți. La sfîrșitul secolului al X-lea se stabilește în mod oficial un sistem zecimal de măsură pentru greutăți cu unități descrescătoare:

1 lan	=	10 țiani
1 țian	=	10 feni
1 fen	=	10 li
1 li	=	10 hao
1 hao	=	10 sî
1 sî	=	hu

Istoricul sistemelor zecimale de măsură chineze nu este studiat încă complet. Probabil că ele s-au dezvoltat datorită răspîndirii mari a abacului cu structură zecimală în viața de toate zilele și în activitatea economică. Există o presupunere că termenii metrologici au servit inițial pentru a denumi rangurile coloanelor abacului. Într-un fel sau altul, acești termeni au căpătat o semnificație matematică ca denumiri ale rangurilor în fracțiile zecimale.

Locul important rezervat în cărțile de matematică pentru măsurarea suprafețelor și a volumelor a contribuit la pătrunderea fracțiilor zecimale în matematică. Liu Huei, comentatorul *Matematicii în nouă cărți*, exprima în secolul al III-lea o lungime de 1 355 de picioare în unități de măsură pentru lungimi, după cum urmează: 1 ci 3 țuni 5 feni 5 li. La extragerea rădăcinilor fracțiilor tot el recomandă să se folosească fracții cu numitorii egali cu 10, apoi 100 etc.

Astfel, fracțiile zecimale apar sub formă de numere concrete — ca unități ale sistemului zecimal de măsură; treptat, ele capătă caracter de fracții zecimale abstracte. Chiar și în secolul al VII-lea,

aproximarea zecimală a lui $\pi \approx 3,141\,592\,7$, obținută de Țzu Ciun-ciji încă în secolul al V-lea, pentru un diametru egal cu 10^8 picioare, se scrie sub forma: 3 cijani 1 ci 4 țuni 1 fen 5 li 9 hao 2 miao 7 hu. Curînd după aceasta însă încep să se omită uneori denumirile diferitelor ranguri, separîndu-se doar printr-un hieroglif special *dian* (punct), partea întreagă a numărului, de fracție.

Exemple cu fracții zecimale — sisteme de măsură și extragerea rădăcinilor fracțiilor zecimale — se întîlnesc în operele matematicienilor din secolul al XIII-lea. De exemplu, Ian Huei transformă într-o serie de cazuri fracțiile ordinare în fracții zecimale și numai după aceea trece la calcul. Determinînd aria unui cîmp dreptunghiular avînd lățimea de 24 de pași, 3 și $\frac{4}{10}$ picioare și lungimea de 36 de pași și $\frac{8}{10}$ picioare, el le transformă pe toate în fracții zecimale de pas (1 pas = 5 picioare) și apoi înmulțește $24,68 \times 36,56 = 902,3008$.

Nu ne vom opri asupra particularităților de terminologie a unor învățați din secolul al XIII-lea, cum au fost: Ian Huei, Țin Țziu-șao, Li E și Ciju Și-țze. Vom observa doar că ultimul folosește termenul *șiao-șu*, care și astăzi înseamnă fracție zecimală. După cum se pare, învățații chinezi din secolul al XIII-lea au apreciat la justa valoare comoditatea calculelor cu fracții zecimale. Între altele, încă în secolul al V-lea sau al VI-lea, Siao Ian spune că la împărțire prin puteri ale lui 10 nu este nevoie de fapt să se facă împărțirea [40, p. 82 și urm.].

Descoperirea fracțiilor zecimale este o remarcabilă realizare a matematicienilor din China. Totuși, fracțiile zecimale rămîn strîns legate de metrologia zecimală pînă la sfîrșitul perioadei considerate. Sistemul de fracții zecimale capătă o dezvoltare mai completă și mai sistematică la Djemșid al-Kași în secolul al XV-lea, iar mai tîrziu, în secolul al XVI-lea, la olandezul S. Stevin.

Matematica în nouă cărți. Să ne referim acum la opera centrală din literatura matematică a Chinei antice *Matematica în nouă cărți (Țziu cijan suan șu)* [42, 43]. În acest tratat se face un bilanț al activității de multe secole a matematicienilor din mileniul I î.e.n. El are o influență foarte puternică asupra întregii dezvoltări ulterioare a matematicii în China și, parțial, în afara hotarelor ei. După cum s-a mai spus, acest tratat este cea mai veche operă chineză specială de matematică, ajunsă pînă în zilele

noastre. *Matematica* este scrisă în limba antică care diferă considerabil de limba chineză modernă.

Timpul exact al compunerii, sursele și autorii *Matematicii în nouă cărți* nu se cunosc. Liu Huei, comentînd *Matematica* în secolul III, arată că ea fusese alcătuită după opere mai vechi de Cijan Țan, funcționar de vază din serviciul finanțelor, care timp de mulți ani a ocupat postul de ministru. În conformitate cu o cronică antică chineză, Cijan Țan a murit în anul 152 î.e.n. Același Liu Huei spune că, aproximativ cu 100 de ani mai tîrziu, cartea mai fusese prelucrată și de un alt funcționar superior și ministru, Ghen Ciou-cian, a cărui activitate înfloritoare se situează în perioada de domnie a împăratului Siuan Di (73—49 î.e.n.).

Matematica a ajuns pînă în zilele noastre în redactarea lui Liu Huei (anul 263) și a înlocuit alte cărți similare din perioada Han, din care însă nu s-a păstrat nici una. Această lucrare fusese transcrisă și comentată de nenumărate ori, iar în timpul dinastiei Han este inclusă în culegerea *Zece tratate model de matematică*, adoptată oficial ca manual de bază încă în anul 656. Prima ediție tipărită cunoscută a acestei culegeri apare în anul 1084.

Conținutul *Matematicii în nouă cărți* este variat. De fapt lucrarea este o enciclopedie a cunoștințelor matematice pentru topometrii și constructori, lucrători în domeniul finanțelor și economiști, negustori și meseriași etc. În fiecare carte și aproape în fiecare problemă se simte pulsul vieții economice și administrative a unui vast organism statal: aici este vorba despre schimbul de produse, construcția canalelor și a barajelor, ridicarea zidurilor de cetăți, angajarea lucrătorilor, impozite, împărțirea produselor etc. Am prezentat mai sus cîteva din titlurile caracteristice ale unora din cele 9 cărți, ca de pildă *Măsurarea ogoarelor*. De altfel, lucrarea conține și cărți cu denumiri pur matematice. Repartiția materialului în această *Matematică* este foarte originală. Probleme diferite ca gen sînt adesea adunate într-o carte, iar ca principiu de unificare nu servește caracterul general al metodei, ci unitatea obiectului problemelor sau legătura dintre probleme, din punct de vedere al interesului profesional etc. De pildă, în cartea a IX-a sînt adunate probleme în care se consideră triunghiurile dreptunghice, în unele, rolul principal îl joacă teorema lui Pitagora, în altele — asemănarea; într-unele se cere să se rezolve ecuații de gradul al doilea, iar în altele, mărimea necunoscută se găsește dintr-o simplă proporție.

În *Matematică* se reflectă evident acea stare nediferențiată a științei noastre despre care s-a vorbit mai sus [vezi p. 15]. Geome-

tria apare separat și este caracteristic faptul că o parte din informațiile geometrice sînt expuse în cartea I, cu titlul *Măsurarea ogoarelor*, o altă parte (măsurarea volumelor) — în cartea a V-a cu titlul *Estimarea lucrărilor*, iar probleme cu triunghiuri dreptunghice — în cartea a IX-a.

Expunerea *Matematicii* este strict dogmatică. Întreaga lucrare este o culegere de 246 de probleme fără texte introductive, lămuriri prealabile și altele. De fiecare dată, la început se formulează problema, apoi se indică răspunsul și, în sfîrșit, într-o formă concisă se indică procedeul de rezolvare începînd cu cuvintele „conform regulii...". În multe cazuri, textul nu este suficient pentru ca un cititor, inteligent chiar, să-l poată înțelege singur. Folosirea acestei lucrări impunea cunoașterea prealabilă a anumitor noțiuni de bază (ca de pildă, calculele și folosirea abacului) și necesita numeroase lămuriri verbale din partea profesorului.

Cartea I din *Matematică*, purtînd titlul *Măsurarea ogoarelor*, conține regulile pentru calculul suprafețelor cîtorva figuri simple rectilinii, a cercului și a părților lui, precum și informații auxiliare cu privire la operațiile aritmetice asupra fracțiilor.

Cartea a II-a, *Raportul între diferitele feluri de culturi de cereale*, începe cu un tabel vast cu norme pentru schimburi de diferite cereale: meiul se ia (50), crupe de mei prelucrate brut (30), crupe de mei curate (27), crupe de mei și mai curate (24), crupe de mei pentru prinți (21), bobul, grîul, mazărea, orezul, drojdia de vin și altele. Urmează apoi 31 de probleme în care se cere să se determine cantitatea dintr-un anumit sort de produs pentru a fi schimbat cu o cantitate dată dintr-un alt sort. La aceste probleme, care se exprimă prin proporții cuprinzînd o necunoscută, se asociază probleme pentru calculul costului unuia sau al cîtorva obiecte similare după costul cunoscut al unui număr dat de aceleași obiecte. Asemenea probleme capătă mai tîrziu în Europa denumirea de probleme cu regula de trei simplă. În ultimele probleme din cartea a II-a se determină costul cîtorva obiecte diferite în ceea ce privește condițiile, dar care se exprimă prin sisteme liniare nedeterminate avînd, este adevărat, o singură soluție întreagă.

Cartea a III-a despre *Împărțirea în trepte* cuprinde cîteva probleme de diviziune a unor mărimi, proporțional cu niște numere date. În literatura europeană medievală asemenea probleme se grupează la rubrica „regula asociației". De pildă, în prima problemă din cartea a III-a se cere să se împartă 5 cerbi vînați între funcționari de diferite ranguri, proporțional cu numerele 5 : 4 : 3 : 2 : 1.

În a cincea problemă se cere să se determine cîți lucrători trebuie scoși la muncă de prestație din fiecare județ, dacă sînt trei județe, numărul total de oameni necesari este 378, iar cotele județelor în funcție de numărul contribuabililor sînt proporționale cu numerele 8 758 : 7 236 : 8 356. Răspunsurile trebuie rotunjite, deoarece calculele dau numere fracționare $135\frac{11\,637}{12\,175}$, $112\frac{4\,004}{12\,175}$ și $129\frac{8\,709}{12\,175}$. Tot acolo există și probleme cu regula de trei.

În cartea a IV-a, *Ṣao guan*[1], este vorba de determinarea laturii unui dreptunghi dacă se cunoaște aria sa și cealaltă latură, despre determinarea laturii unui pătrat după aria sa și a muchiei unui cub după volumul lui, precum și a diametrelor cercului și sferei.

Cartea a V-a, *Estimarea lucrărilor*, are ca obiect măsurarea volumelor de ziduri, canale, baraje, șanțuri de diferite forme și uneori destul de complicate și calculul efectivului de lucrători necesari la diferite lucrări de construcții. De pildă, se dau volumul total al unei lucrări și producția unui lucrător pe timp de iarnă, vară, primăvară și toamnă; răspunsurile sînt adesea fracționare și trebuie rotunjite.

În cartea a VI-a, *Repartiția proporțională*, sînt adunate probleme liniare cu diferite conținuturi. O serie importantă de probleme se consacră calculului volumelor de cereale ce trebuie furnizate de patru județe, ținînd seama de condiții din ce în ce mai complicate: cantitățile de furnizat sînt proporționale cu numărul curților, invers proporționale cu numărul zilelor de drum pînă la locul de livrare; apoi se iau în considerare costul grînelor în județul respectiv și distanța de transport etc. Tot aici se găsesc diferite probleme pentru determinarea drumului parcurs (sau a timpului scurs) pînă la locul de întîlnire a doi pietoni care merg unul după altul sau unul în întîmpinarea celuilalt, precum și probleme cu privire la bazine, care, aproximativ în aceeași epocă, se rezolvă și în îndepărtata Alexandrie. Este foarte interesantă o problemă de progresii aritmetice, la care vom mai reveni [pp. 101—102].

În cartea a VII-a, *Adaos și lipsă*, se dau procedee pentru rezolvarea sistemelor de două ecuații de gradul întîi cu două necunoscute. Unul dintre procedee este regula celor două poziții false, aplicată mai întîi la o ecuație cu o necunoscută.

Cartea a VIII-a, *Fan-cen*, conține un algoritm general de rezolvare a unor sisteme liniare determinate, cu mai multe necunoscute[2].

---

[1] Acest termen este greu de tradus și este tălmăcit în diferite feluri — *N.A.*
[2] *Fan-cen* este tocmai denumirea acestui algoritm — *N.A.*

În sfîrșit, cartea a IX-a, *Gou-gu*, după cum s-a spus, cuprinde o serie de probleme cu triunghiuri dreptunghice. Printre ele există probleme pentru determinarea distanțelor pînă la obiecte inaccesibile, adîncimea unui puț etc. Cartea se numește *Gou-gu*, deoarece *gou* este numele catetei mici, dintr-un triunghi dreptunghic, iar *gu* este numele catetei mari, verticale. *Gou-gu* mai înseamnă și însăși relația exprimată prin teorema lui Pitagora.

Este incontestabil că unele cărți din *Matematică* s-au scris în perioade diferite și corespund la niveluri diferite ale dezvoltării științei. Uneori, în cuprinsul aceleiași cărți, problemele se deosebesc printr-un grad foarte diferit de abstractizare. Unele au într-adevăr un caracter practic și pot servi ca model pentru rezolvarea unor probleme similare sau apropiate de măsurători de pămînt, comerț etc. Altele sînt exerciții cu conținut abstract, deși apar exprimate într-o formă pseudopractică. Acestea sînt probleme teoretice de origine mai tîrzie, provenite din problemele din prima grupă prin complicarea sau modificarea lor voită, ca de pildă, prin inversarea datelor și a mărimilor căutate. Multe asemenea probleme apar în ultimele trei cărți cu caracter algebric; ele se întîlnesc însă și în primele cărți, care se pare că sînt de origine mai veche. Este interesantă problema 18 din cartea I, unde se cere să se împartă o anumită sumă între $3\frac{1}{3}$ oameni. Nimic asemănător nu se întîlnește în manualele de matematică ale altor popoare antice.

În virtutea unei asemenea neomogenități, *Matematica în nouă cărți* depășește cu mult, în ansamblul ei, necesitățile cercurilor largi de funcționari inferiori, negustori etc. pentru care se publicau multe alte manuale mai elementare, conținînd date de bază, despre cele patru operații de aritmetică, cele mai simple probleme de regulă de trei și de măsurarea celor mai simple figuri.

Să analizăm acum cele mai importante metode și idei pe care le conține *Matematica în nouă cărți*.

Probleme liniare; prima metodă a adaosului și a lipsei. Felul de a trata problemele ce se reduc la sisteme de ecuații de gradul întîi. expuse în cărțile VII și VIII din *Matematica în nouă cărți*, merită o analiză amănunțită. În cazul de față, precum și în altele, avem de-a face în tratatul chinezesc cu o stratificare a unor procedee elaborate în perioade de timp destul de îndepărtate unele de altele.

Pe întregul cuprins al operei se observă o complicare treptată a problemelor liniare și o perfecționare a metodelor de rezolvare a lor începînd cu simpla proporționalitate (regula de trei etc.); continuînd cu regulile de rezolvare a tipurilor particulare de sisteme de ecuații cu două necunoscute, apoi cu rezolvarea unor probleme similare pentru sisteme arbitrare după procedeul celor două false poziții și terminînd cu algoritmul general de rezolvare a oricărui sistem determinat, cu multe necunoscute, redus la forma canonică. Metodele mai generale și evident mai tîrzii, de rezolvare a sistemelor cu mai multe necunoscute, n-au înlocuit procedeele particulare de rezolvare a sistemelor cu două necunoscute. Nu se dau indicații despre legăturile dintre diferitele procedee.

Cele mai vechi sînt desigur cele două metode ale „adaosului și lipsei", aplicate în cartea a VII-a la sisteme liniare de două ecuații cu două necunoscute. Prima metodă a „adaosului și a lipsei" se aplică într-o serie de probleme (problemele 1—8) unde coeficienții de pe lîngă una din necunoscute sînt egali cu unitatea. Denumirea metodei este legată de faptul că în unele probleme este vorba despre prisosul sau lipsa unei sume oarecare de bani. De pildă, în problema a doua din cartea a VII-a se caută numărul de cumpărători și costul unui obiect cumpărat în următoarele condiții:

a) dacă fiecare cumpărător va aduce „norma" 9, atunci prisosul va fi 11;

b) dacă fiecare va aduce „norma" 6, atunci lipsa va fi 16. Regula de rezolvare este formulată în cuvinte. Din text rezultă clar că toate calculele se efectuează cu abacul pe care se înregistrează coeficienții dați. De altfel, regula se dă numai după problema nr. 4.

Întrucît autorii *Matematicii* operează în cartea a VII-a numai cu numere pozitive, de aceea metoda „adaosului și a lipsei" se împarte în trei reguli diferite. În prima este vorba despre rezolvarea unor probleme care transpuse în notațiile noastre se exprimă prin sistemul:

$$\left.\begin{aligned} a_1x &= y + d_1 \\ a_2x &= y + d_2 \end{aligned}\right\} \qquad (a_1 > a_2); \qquad (1)$$

aici normele sînt a_1, a_2, prisosul, d_1 iar lipsa, d_2.

Conform regulii, pe abac trebuie înscrise normele fiecăruia, dedesubtul lor se așază prisosul și lipsa corespunzătoare, se înmulțesc ambele în cruce și se scrie suma *și* a acestor produse, suma pri-

sosului și a lipsei *fa*, precum și diferența între norma mare și cea mică. Câturile rezultate din împărțirea lui *și* și *fa* prin diferența dintre norme dau respectiv costul obiectului și numărul cumpărătorilor. Dacă există fracții, ele se aduc în prealabil la același numitor; în acest fel, în toate calculele ulterioare vom avea de-a face numai cu numere întregi.

În notațiile noastre, algoritmul de rezolvare a sistemului (1) arată astfel: din numerele

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 \\ d_1 & d_2 \end{matrix}$$

se formează

$$\text{și} = a_1 d_2 + a_2 d_1$$
$$\text{fa} = d_1 + d_2$$
$$\text{diferența} = a_1 - a_2$$

și necunoscutele se calculează prin formulele:

$$x = \frac{d_1 + d_2}{a_1 - a_2}, \qquad y = \frac{a_1 d_2 + a_2 d_1}{a_1 - a_2}. \tag{2}$$

Aceeași regulă conține și o altă variantă de rezolvare. Mai întîi se determină:

$$x = \frac{d_1 + d_2}{a_1 - a_2},$$

iar apoi din ecuațiile (1) se află

$$y = a_1 x - d_1,$$

sau

$$y = a_2 x + d_2.$$

Evident că regula pentru calculul lui y în prima variantă s-a obținut cu ajutorul unor transformări algebrice. Cel mai probabil este că aici se elimină x prin egalarea coeficienților: tocmai acest procedeu se și folosește în cartea a VIII-a din *Matematica*.

La regula „adaosului și a lipsei“ se asociază alte două reguli analoge: „două adaosuri — două lipsuri“ și „adaos — echilibru sau lipsă — echilibru“.

În regula „ambele adaosuri — ambele lipsuri“ se analizează probleme ce se exprimă prin sisteme de forma:

$$\left.\begin{aligned} a_1 x &= y + d_1, \\ a_2 x &= y + d_2 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

sau

$$\left.\begin{aligned} a_1x &= y - d_1, \\ a_2x &= y - d_2 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

cu soluțiile (pozitive):

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{d_1 - d_2}{a_1 - a_2}, \\ y &= \frac{a_2d_1 - a_1d_2}{a_1 - a_2} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

sau

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{d_2 - d_1}{a_1 - a_2}, \\ y &= \frac{a_1d_2 - a_2d_1}{a_1 - a_2} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

În a doua variantă de rezolvare:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{d_1 - d_2}{a_1 - a_2} \\ y &= a_1x - d_1 = a_2x - d_2 \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

sau

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{d_2 - d_1}{a_1 - a_2} \\ y &= a_1x + d_1 = a_2x + d_2 \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Regula „adaos — echilibru sau lipsă — echilibru“ se aplică la probleme ce se traduc prin sisteme de forma:

$$\left.\begin{aligned} a_1x &= y + d_1 \\ a_2x &= y \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

sau

$$\left.\begin{aligned} a_1x &= y - d_1, \\ a_2x &= y, \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

cu soluțiile

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{d_1}{a_1 - a_2}, \\ y &= a_2x \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

sau

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{d_1}{a_2 - a_1} \\ y &= a_2 x. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

În regulile descrise și-a găsit oglindire cea mai importantă trăsătură a matematicii Chinei antice, trăsătură care ulterior apare din ce în ce mai vădit; tendința de a crea algoritmi elaborați amănunțit pentru rezolvarea unor anumite grupe de probleme. După cîte se cunoaște, un asemenea procedeu regulat de rezolvare a sistemelor liniare de ecuații cu două necunoscute se întîlnește pentru prima oară în literatura chineză.

Am vorbit aici despre ecuații în care coeficienții uneia din necunoscute sînt egali cu unitatea. Un caz mai general de sistem de două ecuații cu două necunoscute se rezolvă mai departe în aceeași carte a VII-a printr-un alt procedeu, care, de altfel, la început nici nu este scos în evidență și figurează chiar sub aceeași denumire. Acest al doilea procedeu de rezolvare a problemelor liniare capătă apoi o largă răspîndire în literatura hindusă, arabă și europeană. În limba arabă, acest procedeu a fost denumit regula celor două erori (p. 222), iar în Europa, regula celor două false poziții — *regula duorum falsorum positionum*.

Probleme liniare; a doua metodă a adaosului și a lipsei sau regula celor două false poziții. Regula celor două false poziții aplicată la o ecuație liniară cu o necunoscută:

$$ax = b, \qquad (1)$$

sau

$$ax + c = b \qquad (1')$$

constă în aceea că necunoscutei i se dau două valori x_1 și x_2 diferite de valoarea reală, care introduse în partea stîngă dau naștere la erorile d_1 și d_2

$$\left.\begin{aligned} ax_1 &= b + d_1, \\ ax_2 &= b + d_2 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

De aici e ușor de obținut proporția:

$$\frac{x_1 - x}{x_2 - x} = \frac{d_1}{d_2} \qquad (2')$$

și valoarea lui x:

$$x = \frac{x_1 d_2 - x_2 d_1}{d_2 - d_1}. \tag{3}$$

Desigur, la probleme de tipul (1) n-are vreun sens deosebit să se aplice regula celor două false poziții. Rolul istoric al regulii celor două false poziții este determinat de faptul că ea ne pune la dispoziție un algoritm comod pentru rezolvarea automată a oricăror probleme, oricît de complicate, exprimate printr-o ecuație liniară cu o necunoscută; pentru aceasta nu e necesară nici analiza problemei, nici prezentarea ei sub forma unei ecuații algebrice și nici aducerea ei la forma „canonică" (1). Mai mult decît atît, regula se extinde asupra sistemelor de ecuații cu mai multe necunoscute. Dacă de pildă se dă sistemul:

$$\left.\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1, \\ a_2 x + b_2 y &= c_2, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

atunci, dînd lui x valorile x_1 și x_2, determinînd apoi valorile respective pentru y_1 și y_2 din prima ecuație a sistemului și trecînd totul în cea de-a doua, reducem de fapt sistemul la o singură ecuație, cu o necunoscută:

$$a_2 x + b_2 \left(\frac{c_1 - a_1 x}{b_1}\right) = c_2. \tag{5}$$

În cartea a VII-a din *Matematică*, prin regula falsei poziții, se rezolvă problemele 9—20 cu una sau cu două necunoscute. În toate cele 12 cazuri, o falsă poziție dă un rezultat cu lipsă, iar cealaltă — cu adaos, așadar erori de semne diferite. De aceea, dacă ne folosim numai de numere pozitive, soluția are forma:

$$x = \frac{x_1 d_2 + x_2 d_1}{d_2 + d_1}. \tag{3'}$$

Probabil că asemănarea structurală dintre expresia (2) pentru y din prima metodă a „adaosului—lipsei" și expresiile (3') pentru x din cea de-a doua metodă[1] este cauza denumirii comune pe care o poartă ele și a grupării acestor două procedee diferite în esență, care de altfel se referă și la probleme de tipuri diferite. Primele nouă probleme privitoare la metoda falselor poziții trebuie să fi prezentat o mare dificultate pentru cititor, deoarece, ca formulare,

[1] Precum și a ecuațiilor (1) din paragraful precedent și (2) din cel de față (d_2 în ultimul caz apare ca scăzător) [vezi 43 *a*].

ele nu seamănă de loc cu cele precedente[1], iar sfatul de a aplica aici regula „adaosului și a lipsei“ este de neînțeles fără lămuriri suplimentare, deoarece, de exemplu, în expresia (3′) împărțitorul este suma dintre adaos și lipsă, iar în prima metodă, această sumă dă deîmpărțitul (pentru x), iar ca împărțitor, apare diferența dintre norme. Regula se formulează abia la problema 18 pe care o vom și analiza, observînd în prealabil că unitatea de măsură pentru greutăți este 1 tzin = 16 lani = 16 • 24 ciju.

În problemă se caută greutățile unui lingou de aur și ale unuia de argint în următoarele condiții: 1) greutatea a 9 lingouri de aur este egală cu greutatea a 11 lingouri de argint, 2) dacă se inversează locul unui lingou de aur cu al unuia de argint, atunci aurul va deveni mai ușor cu 13 lani. Cu alte cuvinte:

$$\left.\begin{aligned} 9x &= 11y, \\ 8x + y + 13 &= 10y + x. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Calculele se fac pe abac, și după cum s-a mai vorbit despre prima metodă a „adaosului și a lipsei“ nu se calculează numitorii comuni.

Mai întîi se ia „norma“ $x_1 = 3$ țzini $= 40$ lani, așa încît după prima ecuație din sistemul (6) avem:

$$y_1 = 2\frac{5}{11} \text{ țzini} = 39\frac{3}{11} \text{ lani};$$

prin urmare, în a doua ecuație din sistemul (6) în stînga există o lipsă de $\frac{49}{11}$ lani — în text se vorbește despre o lipsă de 49. Apoi se ia „norma“ $x_2 = 2$ țzini $= 32$ lani și

$$y_2 = 1\frac{7}{11} \text{ țzini} = 26\frac{2}{11} \text{ lani};$$

---

[1] Iată primele două probleme pentru regula celor două false poziții: nr. 9) într-un butoi de 10 dou există o cantitate necunoscută de crupe de mei. Butoiul se completează cu mei necurățat; dacă ultimul se curăță, atunci în total se vor obține 7 dou de crupe de mei. Problema se poate exprima prin ecuația:

$$x + \frac{3}{5}(10 - x) = 7$$

$\frac{3}{5}$ este coeficientul de trecere de la mei la crupele de mei din cartea a II-a a *Matematicii*. În tratat se iau „normele“ $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ — *N.A.*
nr. 10) Pe un zid de 90 țuni crește un dovleac a cărui tulpină se ridică într-o zi cu 7 țuni; jos crește un dovlecel a cărui tulpină se ridică într-o zi cu 10 țuni. Cînd se vor întîlni ei? Problema se poate exprima prin ecuația $(7 + 10)x = 90$. În tratat se ia $x_1 = 5$ și $x_2 = 6$ — *N. A.*

prin urmare, în a doua ecuație din sistemul (6) în stînga există adaosul de $\frac{15}{11}$ lani — în text se vorbește despre un adaos de 15. Mai departe se recomandă să se înmulțească cruciș adaosul 15 și lipsa 49 cu normele adoptate, adică cu 2 și 3, iar suma produselor să se împartă la suma adaosului și a lipsei, ceea ce va da greutatea lingoului de aur:

$$x = \frac{2 \cdot 49 + 3 \cdot 15}{15 + 49} \text{ țzini} = 2 \text{ țzini } 3 \text{ lani } 18 \text{ ciju}. \qquad (7)$$

În sfîrșit, din prima ecuație a sistemului (6) se găsește:

$$y = \frac{9}{11} x = 1 \text{ țzin } 13 \text{ lani } 6 \text{ ciju}. \qquad (8)$$

În *Matematică* se analizează cazul regulii celor două false poziții, cînd erorile sînt de semne diferite. Analiza cazurilor cu erori de același semn se întîlnește mai tîrziu și în literatura arabă.

Regula celor două false poziții dă soluția exactă a problemelor liniare și este totodată una dintre metodele de aproximare a soluției ecuațiilor neliniare și a problemelor de interpolare. Pentru interpolarea liniară, ea a fost utilizată de astronomul Ptolemeu din Alexandria pentru a întocmi tabelele coardelor de cerc.

Sisteme de ecuații liniare cu mai multe necunoscute. Metoda fan-cen expusă în cartea a VIII-a reprezintă o culme a realizărilor învățaților chinezi în rezolvarea problemelor liniare. Acesta este un algoritm regulat de rezolvare a unui sistem de n ecuații liniare cu n necunoscute. Folosindu-ne de simboluri, se poate spune că metoda fan-cen este aplicabilă la un sistem canonic de forma:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Sistemul se reprezintă pe abac prin tabelul fan-cen care înlocuiește pe deplin ecuațiile (1) și este într-un oarecare sens mai sim-

plu, deoarece nu mai cere punerea în evidență a simbolurilor necunoscutelor. Coeficienţii din fiecare ecuaţie se scriu de sus în jos, ordinea ecuațiilor fiind de la dreapta spre stînga:

$$\left.\begin{array}{cccc} a_{n1} & \ldots & a_{21} & a_{11} \\ a_{n2} & \ldots & a_{22} & a_{12} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{nn} & \ldots & a_{2n} & a_{1n} \\ b_n & \ldots & b_2 & b_1 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Tabelul (2), sau, exprimîndu-ne în limbaj modern, matricea sistemului (1), se transformă prin scăderea succesivă a elementelor din prima coloană (din dreapta) din numerele corespunzătoare din coloana a doua, a treia etc. înmulţită cu a_{11}, scăderea efectuîndu-se pînă cînd toată linia întîi, cu excepţia elementului a_{11}, va fi formată din locuri goale[1]. Mai departe, se procedează în mod analog cu partea tabelului transformat, încadrat între linii:

$$\left.\begin{array}{ccc|c} & & & a_{11} \\ \hline a_{n2}^{(1)} & \ldots & a_{22}^{(1)} & a_{12} \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \\ a_{nn}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} & a_{1n} \\ b_n^{(1)} & \ldots & b_2^{(1)} & b_1 \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Continuarea acestui proces duce în cele din urmă la tabelul:

$$\left.\begin{array}{cccccc} & & & & & a_{11} \\ & & & & a_{22}^{(1)} & a_{12} \\ & & & a_{33}^{(2)} & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{nn}^{(n-1)} & \ldots & & a_{3n}^{(2)} & a_{2n}^{(1)} & a_{1n} \\ b_n^{(n-1)} & \ldots & & b_3^{(2)} & b_2^{(1)} & b_1 \end{array}\right\} \qquad (4)$$

[1] Coeficienţii problemelor din *Matematică* sînt numere întregi — *N.A.*

Este evident că transformările corespund cu eliminarea succesivă a necunoscutelor și cu alcătuirea unui sistem auxiliar de forma:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \end{array}\right\}. \qquad (5)$$

Necunoscutele x_n, $x_{n-1}, \ldots, x_1$ se calculează apoi pe rînd cu ajutorul tabelului (4).

Să ilustrăm această schemă generală cu ajutorul primei probleme din cartea a VIII-a, pe baza căreia se formulează regula fan-cen:

Fig. 3.

3 snopi dintr-o recoltă bună, 2 snopi dintr-o recoltă mijlocie și 1 snop dintr-o recoltă slabă dau 39 dou de boabe; 2 snopi de recoltă bună, 3 de recoltă mijlocie și 1 de recoltă slabă dau 34 dou; 1 snop bun, 2 snopi mijlocii și 3 slabi dau 36 dou (fig. 3). Se întreabă ce cantitate de boabe va da fiecare snop din recolta bună, mijlocie și slabă? În textul cărții problema se expune în cuvinte. Tabelul inițial fan-cen e prezentat în fig. 3.

Etapele principale de transformare a tabelului nu sînt transcrise în tratatul chinezesc, dar se definesc direct prin regula exprimată în cuvinte și sînt următoarele:

Tabelul inițial:

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39.

Transformarea coloanei a doua, ale cărei elemente se înmulțesc cu 3 este:

1		3
2	5	2
3	1	1
26	24	39.

Transformarea coloanei a treia, ale cărei elemente se înmulțesc de asemenea cu 3 este:

$$\begin{array}{cc|c} & & 3 \\ \hline 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39. \end{array}$$

Transformarea coloanei din stînga a tabelului redus, ale cărei elemente se înmulțesc cu 5, este:

$$\begin{array}{c|cc} & & 3 \\ & 5 & 2 \\ \hline 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39. \end{array} \qquad (4')$$

Ultimul tabel exprimă următorul sistem de ecuații:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 39, \\ 5y + z &= 24, \\ 36z &= 99. \end{aligned}\right\}$$

Procedeul pentru calculul necunoscutelor din tabelul transformat (4′) se formulează pentru a fi aplicat la operațiile pe abac cu numere întregi, evitînd operațiile cu fracții. În regulă se spune că numărul de sus al coloanei din stînga este numitorul fracției care-l exprimă pe z, iar numărul de jos este numărătorul ei. Acest număr de sus se ia ca numitor comun pentru toate trei necunoscutele. Numărătorul pentru y se găsește din coloana de mijloc în felul următor: din produsul dintre numărul de jos al coloanei de mijloc și numitorul comun se scade numărătorul fracției pentru z, iar diferența se împarte la numărul de sus al coloanei de mijloc. În sfîrșit, numărătorul pentru x se obține astfel: din produsul dintre numărul de jos al coloanei din dreapta și numitorul comun se scad numărătorul fracției pentru z și numărătorul fracției pentru y, înmulțit cu al doilea număr al coloanei din dreapta, iar diferența se împarte la numărul de sus al coloanei din dreapta. Astfel:

$$z = \frac{99}{36} = 2\frac{3}{4},$$

$$y = \frac{24 \cdot 36 - 99}{5} : 36 = \frac{153}{36} = 4\frac{1}{4},$$

$$x = \frac{39 \cdot 36 - 99 - 2 \cdot 153}{3} : 36 = \frac{333}{36} = 9\frac{1}{4}.$$

În cartea a VIII-a există de asemenea probleme cu sisteme cu 2, 4 și 5 necunoscute. Iată un exemplu de problemă cu 5 necunoscute, exprimată în simboluri moderne:

$$\left.\begin{aligned} 9x + 7y + 3z + 2u + 5v &= 140,\\ 7x + 6y + 4z + 5u + 3v &= 128,\\ 3x + 5y + 7z + 6u + 4v &= 116,\\ 2x + 5y + 3z + 9u + 4v &= 112,\\ x + 3y + 2z + 8u + 5v &= 95. \end{aligned}\right\}$$

Aici $x = 7, y = 4, z = 3, u = 5, v = 6$.

Deși regula fan-cen se explică în *Matematică* printr-un exemplu concret de sistem cu 3 necunoscute, ea se expune totuși într-un mod destul de general. Învățații din alte țări rezolvau și mai înainte probleme liniare, dar algoritmul unitar pentru rezolvarea unui sistem canonic de ecuații liniare cu orice număr de necunoscute este o descoperire a învățaților din China.

Transformarea tabelului fan-cen (2) ne amintește operațiile asupra coloanelor matricelor și determinanților. În dezvoltarea sa ulterioară în Orient[1], metoda fan-cen este transformată într-un fel de teorie a determinanților, în primul rînd în opera manuscrisă a matematicianului japonez Seki Șen-suke Kowa (1683). În Europa, primul pas spre o rezolvare regulată a sistemelor de ecuații liniare îl întîlnim la Leonardo Pisano, iar apoi la G. Cardano (1545)[2]. Ideea introducerii determinanților pentru eliminarea necunoscutelor este clar exprimată de G.W. Leibniz în scrisoarea către G.F. l'Hospital (1693); G. Cramer (1750) elaborează detaliat această idee și o aplică la rezolvarea sistemelor liniare.

Numerele negative. În cartea a VIII-a din *Matematică* se întîlnește pentru prima oară în istoria științei o diferențiere între numerele pozitive și negative. După toate probabilitățile, nume-

---

[1] Despre probleme cu metoda fan-cen, vezi la Sun-țzi [43 b].

[2] Cardano a dat o regulă mecanică de rezolvare a sistemelor de 2 ecuații:

$$a_1x + b_1y = c_1, \quad a_2x + b_2y = c_2.$$

Scriind coeficienții numerici în două linii, el formulează următoarea regulă pe un exemplu:

$$x = \frac{\frac{c_1b_2}{b_1} - c_2}{\frac{a_1b_2}{b_1} - a_2}.$$

rele negative se introduc tocmai prin extinderea metodei fan-cen asupra oricăror probleme liniare. Numerele negative fuseseră necesare încă la întocmirea tabelului canonic (2), deoarece, în general vorbind, condițiile inițiale ale problemelor nu se exprimă de la început prin sisteme de forma (1). Numerele negative sînt necesare de asemenea pentru a aduce tabelul (2) la forma (4). Aici are o mare importanță folosirea abacului unde trebuiau deosebite, într-un fel oarecare, bastonașele care reprezentau coeficienții mărimilor ce se adaugă, de cele care se scad; pînă atunci, bastonașele „trăiseră" o viață independentă de condițiile problemei.

Transformările tabelului 2 pentru a fi adus la forma canonică, efectuate prin trecerea termenilor dintr-o parte într-alta a egalității, le întîlnim în cîteva probleme din cartea a VIII-a, unde este din nou vorba despre determinarea unor cantități de boabe din snopi de recoltă bună, mijlocie și slabă. Astfel, pentru problema nr. 4, care se exprimă direct prin condițiile:

$$5x - 11 = 7y,$$
$$7x - 25 = 5y,$$

tabelul fan-cen va fi:

7	5
—5	—7
25	11.

Într-o altă problemă (nr. 5), cu condițiile:

$$6x - 18 = 10y,$$
$$15x - 5 = 5x,$$

tabelul trebuie să aibă următoarea formă:

—5	6
15	—10
5	18.

Pentru a deosebi coeficienții pozitivi de cei negativi (și chiar și anumite numere!) se introduc termeni și bastonașe speciale, iar mai tîrziu — semne. Elementele pozitive ale tabelului se numesc cijen, iar cele negative — fu[1]. După Liu Huei, primele

[1] Cuvîntul *cijen* înseamnă corect, just etc. Cuvîntul *fu* are sensul de datorie, lipsă etc., precum și de fals — *N.A.*

se reprezentau pe abac prin bastonașe roșii, iar celelalte — prin bastonașe negre. Un asemenea procedeu de reprezentare se aplică apoi și la tipărirea cărților. În epoca Sun, numerele pozitive se tipăresc adesea în culoare roșie, iar cele negative — în culoare neagră. Au existat și alte procedee de diferențiere, în care, de pildă, numerele cijen se reprezintă prin bastonașe de secțiune triunghiulară, iar numerele fu, prin bastonașe de secțiune pătrată, sau în primul caz — bastonașele se așază vertical, iar în al doilea — înclinat. La mijlocul secolului al XIII-lea, Li E reprezintă numerele negative prin cifre-bastonașe, tăind oblic ultima cifră, așa încît, de exemplu, —10 724 se scrie:

IOTT=卌

În dezvoltarea noțiunilor matematice, nu este ușor de stabilit o limită dincolo de care ele capătă un nou sens. E greu de spus de pildă, cînd anume este conceput coeficientul negativ ca atare, și din ce moment are el dreptul de a fi înțeles ca număr negativ. Diofant și probabil unii precursori ai lui cunoșteau regulile operațiilor asupra coeficienților de pe lîngă cantitățile ce se scad și care intră în componența polinoamelor pe același plan cu cantitățile ce se adaugă și care se scriu în mod obligatoriu imediat după acestea. Diofant formulează chiar următoarea regulă: scăzătorul înmulțit cu scăzătorul dă ceea ce se adună, iar scăzătorul înmulțit cu ceea ce se adună dă scăzătorul. Cu toate acestea, la Diofant nu apar numere negative. La el numerele ce se scad nu reprezintă un obiect independent și regulile operațiilor asupra semnelor sînt doar în legătură cu termenii diferențelor de felul lui $a—b$ al nostru sau $ax^2—bx$ etc., unde descăzutul este mai mare decît scăzătorul. În matematica Chinei antice, coeficienții scăzători apar ca obiecte independente. Însuși procedeul de reprezentare pe abac contribuie la conceperea lor independent de alte numere sau de acele cantități ai căror coeficienți ar fi putut ei fi. Un simbol de tipul $—a$ figurează în știința chineză nu numai în componența unor diferențe cu descăzutul mai mare decît scăzătorul, ci și ca un rezultat al scăderii unei cantități mai mari dintr-una evident mai mică. Aceasta este o idee principial nouă, de o importanță excepțională.

E de presupus că metoda fan-cen s-a folosit la început în probleme unde transformările tabelului (2) impuneau să se scadă din numere date, altele mai mici. Aplicarea aceluiași algoritm la alte probleme a întîmpinat în mod inevitabil dificultatea de a

scădea numere mai mari din altele mai mici sau, cum s-ar spune, din nimic.

Vom prezenta cea de-a treia problemă din cartea a VIII-a, unde pentru întîia oară se vorbește despre numere cijen și fu. Condițiile problemei impun să se introducă diferențe negative; tot aici se formulează regulile cele mai simple ale operațiilor asupra numerelor negative.

„La doi snopi de recoltă bună, trei snopi de recoltă mijlocie și patru snopi de recoltă slabă le lipsește pînă la 1 dou, respectiv cîte un snop de recoltă mijlocie, slabă și bună. Se întreabă cîte (grăunțe) s-au obținut din fiecare snop de recoltă bună, mijlocie și slabă?“ [42 p. 500].

Problema se exprimă prin ecuațiile:

$$2x = 1 - y,$$
$$3y = 1 - z,$$
$$4z = 1 - x.$$

În regula de rezolvare se spune că trebuie întocmit tabelul fan-cen (lipsă, de altfel, din text):

1		2
	3	1
4	1	
1	1	1.

Este evident că operațiile prescrise de metoda fan-cen asupra coloanelor conduc aici la numere negative. De aceea, mai departe se recomandă să se procedeze conform regulii cijen-fu, care se formulează prin următoarele cuvinte:

„Dacă sînt de același nume, se scad; dacă sînt de nume diferite, se adună; dacă este pozitiv și fără pereche, atunci [devine] negativ; dacă este negativ și fără pereche, [devine] pozitiv. Dacă sînt de nume diferite, se scad; dacă sînt de același nume, se adună; dacă este pozitiv și fără pereche, atunci [devine] pozitiv; dacă este negativ și fără pereche, atunci [devine] negativ“ [42, p. 500].

Transcrisă în simbolurile noastre, prima parte a regulii sună:

$$(\pm a) - (\pm b) = \pm (a - b),$$
$$(\pm a) - (\mp b) = \pm (a + b),$$
$$0 - (\pm b) = \mp b.$$

Partea a doua a regulii se exprimă astfel:

$$(\pm a) + (\mp b) = \pm (a - b),$$
$$(\pm a) + (\pm b) = \pm (a + b),$$
$$0 + (\pm b) = \pm b.$$

Regulile corespunzătoare de înmulțire și împărțire nu sînt expuse în *Matematică* și nu sînt necesare pentru problemele ei.

Vechii matematicieni chinezi operau în voie cu numere negative. În problemele din cartea a VIII-a sînt uneori negative nu numai elementele intermediare, ci și cele inițiale ale coloanelor tabelului fan-cen (vezi p. 51) și chiar termenii liberi ai ecuației. Mai mult chiar, învățații Chinei se apropie de cea mai simplă interpretare reală a numerelor negative, după cum se vede din problema nr. 8, unde lipsa de bani se exprimă printr-un număr fu. În problemă se cere să se determine costul unui bivol, al unui berbec și al unui porc, în următoarele condiții: 1) vînzîndu-se doi bivoli și cinci berbeci și cumpărîndu-se 13 porci, rămîn 1 000 țiani; 2) vînzîndu-se 3 bivoli și 3 porci, banii ajung exact pentru cumpărarea a 9 berbeci; 3) vînzîndu-se 6 berbeci și 8 porci, se cumpără 5 bivoli, dar n-ajung 600 țiani. Tabelul trebuie să fie:

—5	3	2
6	—9	5
8	3	—13
—600		1 000.

În regula de rezolvare a problemei se spune:

„Întocmește tabelul fan-cen. Stabilește că 2 bivoli și 5 berbeci sînt pozitivi, 13 porci sînt negativi, iar rămășița de țiani este pozitivă. Mai stabilește că 3 bivoli sînt pozitivi, 9 berbeci-negativi și 3 porci—pozitivi; mai stabilește că 5 bivoli sînt negativi, 6 berbeci sînt pozitivi și 8 porci sînt pozitivi, iar lipsa de țiani este negativă. Calculează după procedeul cijen-fu" [42, p.502].

Să observăm totodată că aici întîlnim pentru întîia oară condiția echivalentă cu o ecuație cu partea din dreapta nulă: $(3x - 9y + 3z = 0)$.

Matematica chineză nu cunoaște soluții negative ale ecuațiilor pînă la sfîrșitul perioadei pe care o analizăm.

Introducerea numerelor negative și a regulilor pentru adunarea și scăderea lor este una dintre cele mai importante descoperiri ale învățaților chinezi. Mai tîrziu, numerele negative se răspîndesc

în matematica indiană; pentru prima oară le găsim aici în operele lui Brahmagupta, adică la începutul secolului al VII-lea. În Europa, Leonardo Pisano se apropie de introducerea numerelor negative la începutul secolului al XIII-lea, dar într-o formă explicită le aplică doar N. Chuquet la sfîrșitul secolului al XV-lea și M. Stiefel, de-abia la mijlocul secolului următor.

Merită atenție faptul că numerele negative se introduc în China pentru a se extinde în mod formal algoritmul de rezolvare a ecuațiilor liniare asupra oricăror probleme corespunzătoare. Un fenomen analog îl întîlnim mai tîrziu în istoricul extinderii noțiunii de număr: după cum se știe, matematicienii italieni din secolul al XV-lea introduc numere imaginare pentru a păstra semnificația generală a algoritmilor descoperiți de ei în vederea rezolvării prin radicali a ecuațiilor de gradul al treilea.

Ecuații liniare nedeterminate. Am amintit că în cartea a II-a din *Matematică* există o serie de probleme unde se cere să se calculeze costul unuia sau al cîtorva obiecte, după costul unui număr dat de obiecte de același fel. După aceste probleme cu proporții, în aceeași carte urmează probleme pentru determinarea costului a două obiecte diferite. Aceste două categorii de probleme sînt grupate prin similitudinea întrebării, dar în esență ele nu se aseamănă. Problemele pentru calculul costului a două obiecte se exprimă prin sisteme de trei ecuații cu patru necunoscute care se pot reduce ușor la o singură ecuație cu două necunoscute. În fiecare problemă, această ultimă ecuație are o soluție întreagă unică.

Iată prima și cea mai simplă dintre aceste probleme (38): 78 de trunchiuri de bambus mari și mici costă 576 țiani; se întreabă cît costă fiecare? În condiție nu este dată ipoteza că diferența dintre prețul unui trunchi mare și al unuia mic de bambus este de 1 țian (același lucru se întîmplă în toate cele 9 probleme) și că prețurile se presupun întregi.

Dacă cantitățile căutate se notează prin x și y, iar prețurile corespunzătoare pe bucată — prin u și v, atunci problema se poate prezenta prin sistemul:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 78, \\ ux + vy &= 576, \\ v &= u + 1, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

de unde:

$$78u + y = 576$$

adică

$$u + \frac{y}{78} = 7 + \frac{30}{78}.$$

Unicele valori pozitive întregi ale lui u și y care satisfac prima și ultima ecuație sînt $u = 7, y = 30$, de unde $v = 8$, iar $x = 48$.

Cîteva dintre problemele ce urmează se deosebesc de precedenta prin faptul că, ceea ce se cumpără (în cazul dat, fire de mătase) se exprimă în numere concrete în diferite sisteme de unități. În aceste probleme care implică calcule destul de complicate, avem:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= \frac{m}{n}, \\ ux + vy &= A, \\ v &= u + 1 \end{aligned}\right\} \quad (An > m) \tag{2}$$

În esență, rezolvarea constă în aceea că, sistemul (2), prin intermediul substituției:

$$x' = xn, \quad y' = yn \tag{3}$$

se transformă într-un alt sistem, cu coeficienți întregi:

$$\left.\begin{aligned} x' + y' &= m, \\ ux' + vy' &= An, \\ v &= u + 1. \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

Acum,

$$\left.\begin{aligned} um + y' &= An, \\ u + \frac{y'}{m} &= \frac{An}{m}. \end{aligned}\right\}$$

Mai departe, u se găsește ca partea întreagă a lui $\frac{An}{m}$, iar y' — ca numărător al părții fracționare.

Regula din tratatul chinezesc arată doar cum se alcătuiește numărătorul și numitorul fracției $\frac{An}{m}$ din care se găsește u și y'.

Extragerea rădăcinii pătrate și cubice. Procedeele din *Matematică* pentru extragerea rădăcinilor pătrate și cubice se bazează pe dezvoltarea pătratului și a cubului unui binom, despre care, de altfel, nu se vorbește absolut nimic. Aceste procedee seamănă

cu acelea care pînă de curînd se învățau la cursul de algebră în școlile medii (din U.R.S.S.), dar ele au unele particularități importante. Vom analiza două exemple din cartea a IV-a folosind regulile generale formulate tot acolo. Regulile sînt concise și incomplete și au putut fi reconstituite abia de curînd [44].

Algoritmul pentru extragerea rădăcinii dintr-un pătrat sau cub perfect întreg, constă în determinarea consecutivă a cifrelor fiecărui rang zecimal al rădăcinii. Calculul se împarte în atîtea etape, cîte cifre are rădăcina. În fiecare etapă calculul constă în a găsi prin încercări partea întreagă a rădăcinii unei anumite ecuații sau inecuații, de gradul doi sau trei, printr-o substituție liniară de forma $10^n x = x_1$, și se urmărește de fiecare dată ca rădăcina să fie mai mică decît 10. Fiecare ecuație, în afară de cea inițială, se obține din precedenta cu ajutorul unei substituții liniare de forma $x = p + y$. Desigur, textul chinezesc nu vorbește despre ecuații și substituții, dar calculele sînt pe deplin adecvate celor spuse mai sus.

Extragerea rădăcinii pătrate dintr-un pătrat perfect o vom arăta pe exemplul $\sqrt{55\ 225}$ (problema 12), care corespunde cu determinarea rădăcinii pozitive $x = 100\,p + 10\,q + r$ a unei ecuații cu doi termeni:

$$x^2 = 55\ 225. \qquad (1)$$

Să scriem pe două coloane mersul calculelor, lăsînd de o parte detaliile mai puțin importante: în coloana din stînga — după regula reconstituită din *Matematică*, iar în coloana din dreapta — cu semne algebrice moderne. Numărul cifrelor rădăcinii se găsește în esență ca și în timpurile noastre.

Determinarea sutelor rădăcinii

Pe abac se înscrie numărul dat, adică „deîmpărțitul“ — *și*, iar în dreptul rangului zecilor de mii punem un *țze-suan*, adică un bastonaș care reprezintă numărul 10 000

5 52 25 și
1 00 00 țze-suan

Alegem prima cifră a rădăcinii $p = 2$ cel mai mare întreg, astfel

Luăm în (1)

$$x = 100 \cdot x_1$$

unde $x_1 = p + y$, cu p întreg,

$$p < 10, \quad 0 \leqslant y < 1.$$

Avem:

$$10\ 000\ x_1^2 = 55\ 225. \quad (1')$$

Alegem $p = 2$, astfel încît

$$x_1 = 2 + y.$$

încît $(p \cdot 10\,000) \cdot p \leqslant 55\,225$ sau $p^2 \leqslant 5$. Această cifră o introducem în linia rădăcinii *fan* deasupra numărului dat, la rangul sutelor.

La rangul zecilor de mii, corespunzător cifrei găsite $p = 2$, punem două bastonașe care reprezintă „împărțitorul" — *fa*, egal cu $p \cdot 10\,000$, adică 20 000, așa-numitul *so-de*:

2		fani
5 52 25		și
2 00 00		fa
1 00 00		țze-suan

Împărțim pe *și* prin *fa*, cîtul este o cifră găsită a rădăcinii, restul îl scriem în locul lui *și*, înlocuind prima cifră a lui *și*, adică pe 5 prin 1:

2		fani
1 52 25		rest
2 00 00		fa
1 00 00		țze-suan

Dublăm pe *fa* și apoi cifra 4 o mutăm cu un rang spre dreapta, ceea ce ne dă „împărțitorul fixat" — *din-fa*, adică 4 000. Mutăm pe *țze-suan* cu două ranguri spre dreapta.

Dacă se introduce $x_1 = 2 + y$ în (1′) atunci se obține:

$$40\,000 + 40\,000y + \\ + 10\,000y^2 = 55\,225.$$

sau:

$$40\,000y + 10\,000y^2 = 15\,225. \quad (2)$$

Matematicienii chinezi găsesc restul 15 225 nu prin scădere, ci prin împărțire cu *fa* = 2 10 000.

În regulă se arată cum se alcătuiesc coeficienții ecuațiilor (2) și (2′) care se dă mai departe.

Luăm în (2) $10y = y_1$. Aceasta ne dă (2′) (vezi mai departe).

Acum avem schema pentru determinarea numărului zecilor rădăcinii q:

2 3	fani
1 52 25	rest
40 00	din-fa
1 00	țze-suan

Luăm $q = 3$ ca cel mai mare număr întreg care satisface inegalitatea (2'') din dreapta (probabil, împărțind restul prin *din-fa*)[1].

De fapt, în regulă nu se spune cum se găsește q. Cifra 3 găsită o introducem în linia *fan* în rangul zecilor. Noul *țze-suan*, adică 100, îl înmulțim cu numărul zecilor rădăcinii, adică cu 3, ceea ce ne dă un nou *so-de* egal cu 300. Acest produs 300 îl adăugăm la *din-fa*, adică la 4 000, ceea ce ne dă un nou *din-fa* 4 300. Restul 15 225 îl împărțim cu *din-fa* 4 300, obținînd la cît cea de-a doua cifră a rădăcinii găsită înainte (totodată verificăm și cifra găsită) și un nou rest 2 325. La noul *din-fa* adăugăm noul *so-de*, adică 300. Suma 4 300 și 300, așa-numitul *țzun din-fa* sau „împărțitorul fixat suplimentar", adică 4 600, îl mutăm cu un rang spre dreapta. Pe *țze-suan* îl mutăm din nou cu două ranguri spre dreapta.

$$4000\, y_1 + 100\, y_1^2 = 15\,225, \quad (2)$$

unde

$$y_1 = q + z,$$

cu q întreg,

$$q < 10, \ 0 \leqslant z < 1,$$

așa încît

$$(4000 + q)\cdot q \leqslant 15\,225 \quad (2'')$$

și

$$q = 3, \text{ iar } y_1 = 3 + z.$$

Dacă se scrie (2') sub forma

$$(100\, y_1 + 4000)\, y_1 = 15\,225$$

și se introduce

$$y_1 = 3 + z,$$

atunci obținem:

$$[100\,(3 + z) + 4000] \cdot (3 + z) = 15\,225,$$

adică:

$$(300 + 400 + 100\, z) \times (3 + z) = 15225,$$

sau:

$$(4300 + 100\, z)\cdot(3 + z) = 15\,225.$$

În partea din stînga, termenul liber este 12 900, iar coeficientul lui z este 4 300 + 300.

[1] Despre folosirea „împărțitorilor" pentru alegerea cifrelor rădăcinii în matematica indiană, vezi mai departe la pp. 139-140—*N.A.*

Obținem ecuația:

$$4\,600\,z + 100\,z^2 = 2325. \quad (3)$$

Restul 235 din stînga se află din nou prin împărțire și nu prin scădere. În regulă se arată cum se alcătuiesc coeficienții ecuațiilor (3) și (3'), care apar mai departe.

Luăm în (3) $10\,z = z_1 = r$. Acesta ne va da (3') (vezi mai departe).

Determinarea unităților rădăcinii

Avem acum schema pentru determinarea unităților rădăcinii r:

2	3
23	25 rest
4	60 țzun din-fa
1	țze-suan

De unde $r = 5$ (poate că cifra următoare a rădăcinii se alege la fel prin împărțirea restului cu *țzun-din-fa*).

$$460z_1 + z_1^2 = 2\,325 \quad (3')$$

$$z_1 = r = 5,$$

$$x = 200 + 30 + 5 = 235.$$

Pentru comparație prezentăm mai jos textul regulii:

„Stabilește aria [pătratului] drept de împărțit. Ia un bastonaș și pășește peste una [coloană]. Judecă pe *so-de*. Prima [cifra aleasă a rădăcinii] înmulțește-o cu *țze-suan*, acesta este împărțitorul. Împarte [prin el]. După împărțire, dublează împărțitorul, acesta este împărțitorul fixat. Înapoiază-l [cu o diviziune], [vei obține] împărțitorul [fixat] micșorat. Dedesubt, întoarce înapoi cu un pas bastonașul așezat. [Continuă] ca și înainte. O [cifră] aleasă înmulțește-o cu aceasta. Pe *so-de* adaugă-l la împărțitorul fixat [micșorat]. Și împarte. Adaugă pe *so-de* la împărțitorul fixat, scurtează-l prin înapoiere, vei obține împărțitorul supli-

mentar fixat [micșorat]. Mai departe, la fel ca mai sus [42, pp. 468—469].

În terminologia din *Matematică* se oglindește legătura dintre operațiile de împărțire și de extragere a rădăcinii. Numărul de sub radical se numește *și* — deîmpărțit, unul din numerele auxiliare ale fiecărui pas este *fa* (sau *din-fa* sau *țzun din-fa*) — împărțitor și cu aceste *fa* se împarte succesiv fiecare rest. O asemenea legătură este condiționată probabil de faptul că extragerea rădăcinii pătrate fusese necesară într-o problemă de geometrie înrudită îndeaproape cu o altă problemă în care soluția se găsea prin împărțire. În cartea a IV-a sînt date mai întîi problemele unde se cere să se determine latura unui dreptunghi, fiind dată aria și o altă latură, iar după ele urmează probleme pentru determinarea laturii unui pătrat dat. În ambele cazuri aria se consideră ca deîmpărțit; regula pentru extragerea rădăcinii începe cu cuvintele: „stabilește [pe abac] aria drept deîmpărțit". Probabil că extragerea rădăcinii pătrate se consideră ca un caz al împărțirii, unde cîtul este egal cu împărțitorul. Se știe că în literatura medievală europeană, extragerea rădăcinii pătrate și cubice era considerată ca o variantă a împărțirii. Chiar și R. Descartes consideră extragerea rădăcinii de orice indice natural ca o formă a împărțirii.

Un interes deosebit îl prezintă formarea ecuațiilor auxiliare după substituția $x = p + y$. La baza întregii operații de extragere a rădăcinii se află regula:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

dar tocmai ea nu se folosește direct în cazul acestei substituții.

Să analizăm trecerea de la ecuația:

$$100\, y_1^2 + 4000\, y_1 = 15\,225 \qquad (2')$$

la ecuația:

$$100\, z^2 + 4600\, z = 2\,325. \qquad (3)$$

Introducînd $y_1 = 3 + z$ în (2′) și deschizînd parantezele, în

$$100 \cdot (3 + z)^2 + 4000 \cdot (3 + z) = 15\,225,$$

am fi obținut coeficientul lui z sub forma $100 \cdot 3 \cdot 2 + 4\,000 = 4\,600$, iar termenul liber din stînga, sub forma $100 \cdot 3^2 + 4\,000 \cdot 3 = 12\,900$. În *Matematică* calculele se conduc altfel. Mai întîi se formează „împărțitorul" — noul *din-fa* $3 \cdot 100 + 4\,000 = 4\,300$. Acest „împărțitor" 4 300 se folosește pentru a determina termenul liber al ecuației (3) ca un rest al împărțirii lui 15 225 prin 4 300:

împărțirea servește totodată și pentru a verifica dacă este bună sau nu cea de-a doua cifră a rădăcinii. Afară de aceasta, „împărțitorul" 4 300 adunat cu $3 \cdot 100$ dă coeficientul lui z care se obține acum prin intermediul unei adunări și nu sub forma $4000 + 100 \cdot 3 \cdot 2$. Un asemenea procedeu de formare a ecuației (3) ar fi putut apărea dacă (2′) s-ar fi scris mai întîi sub forma:

$$(100\, y_1 + 4000)\, y_1 = 15\,225,$$

unde $y_1 = 3 + z$, iar mai departe calculul s-ar fi efectuat după cum s-a arătat în coloana din dreapta la p. 59. Să observăm pentru cele ce urmează că mersul calculelor se poate prezenta sub forma următoarei scheme, care diferă doar prin așezarea scrierii:

$$\begin{array}{lll}
100 & 4\,000 & 15\,225 \\
 & +\,100\cdot 3 & -\,4\,300\cdot 3 \\
\hline
 & 4\,300 & \\
 & +\,100\cdot 3 & \\
\hline
 & 4\,600 & \\
\hline
100 & &
\end{array}$$

Particularitățile indicate mai sus, simplificînd calculele și fiind foarte naturale pentru calculul pe abac, se manifestă și la extragerea rădăcinii cubice.

Să observăm în prealabil că ecuația

$$ay^3 + by^2 + cy = d, \tag{4}$$

prin substituția $y = p + z$, se transformă în

$$az^3 + (3ap + b)\,z^2 + (3ap^2 + 2bp + c)\,z = d - (ap^3 + bp^2 + cp). \tag{5}$$

Coeficienții din (5) se pot calcula dezvoltînd $(p + z)^2$ și $(p + z)^3$, și reducînd apoi termenii asemenea. Dar ei se pot calcula și în succesiunea următoare:

$$[(ay + b)\; y + c]\; y = \{[a\,(p + z) + b]\;(p + z) + c\}\;(p + z)$$

sau, ceea ce este același lucru, după schema:

$$\begin{array}{llll}
a & b & c & d \\
 & +\,ap & +\,bp + ap^2 & -\,cp + bp^2 + ap^3 \\
\hline
 & b + ap & c + bp + ap^2 & d - (cp + bp^2 + ap^3) \\
 & +\,ap & +\,bp + 2ap^2 & \\
\hline
 & b + 2ap & c + 2bp + 3ap^2 & \\
 & +\,ap & & \\
\hline
 & b + 3ap & &
\end{array}$$

Această schemă, care în prezent se numește schema lui Horner, impune de fiecare dată doar înmulțirea cu p, și, în rest, numai adunări; de fapt am întîlnit-o și în cazul transformării ecuației de gradul al doilea.

Extragerea rădăcinii cubice din *Matematică* seamănă în multe privințe cu schema lui Horner.

Să calculăm rădăcina cubică dintr-un cub perfect 1 860 867 (problema 19), adică să rezolvăm ecuația cu doi termeni:

$$x^3 = 1\,860\,867. \tag{6}$$

Pentru simplitate, toate calculele le vom efectua prescurtat și vom folosi notațiile noastre.

Notăm $x = 100\, x_1$. Din

$$1\,000\,000\, x_1^3 = 1\,860\,867, \tag{6'}$$

prin încercări găsim:

$$x_1 = 1 + y \quad (0 < y < 1).$$

Ecuația (6′) se transformă în ecuația:

$$1\,000\,000\, y^3 + 3\,000\,000\, y^2 + 3\,000\,000\, y = 860\,867 \tag{7}$$

(matematicienii chinezi găsesc acest „rest“ prin împărțire cu *fa*). Notăm $10y = y_1$; atunci:

$$1000\, y_1^3 + 30\,000\, y_1^2 + 300\,000\, y_1 = 860\,867. \tag{7'}$$

Prin încercări găsim partea întreagă a lui y_1:

$$y_1 = 2 + z \quad (0 < z < 1).$$

Să analizăm acum trecerea la ecuația auxiliară următoare în raport cu z, folosind ecuațiile literale (4) și (5). Mai întîi se găsește în ordinea indicată valoarea:

$$app + bp + c = 1\,000 \cdot 2 \cdot 2 + 30\,000 \cdot 2 + 300\,000 = 364\,000.$$

Împărțind termenul liber din (7), adică 860 867 prin acest număr, se obține la rest termenul liber al ecuației căutate, adică:

$$d - (ap^3 + bp^2 + cp) = 132\,867.$$

Apoi se calculează:

$$app \cdot 2 + bp = 4\,000 \cdot 2 + 60\,000 = 68\,000,$$

și se formează coeficientul lui z:

$$(app + bp + c) + (app \cdot 2 + bp) = 3ap^2 + 2pb + c = 432\,000.$$

În sfîrșit,

$$ap = 2\,000, \ ap \cdot 3 = 6\,000, \ ap \cdot 3 + b = 36\,000;$$

ultimul este coeficientul lui z^2. Astfel se obține:

$$1\,000\, z^3 + 36\,000\, z^2 + 432\,000\, z = 132\,867, \quad (8)$$

iar cu ajutorul substituției $10\, z = z_1$ se obține ecuația:

$$z_1^3 + 360\, z_1^2 + 43\,200\, z = 132\,867, \quad (8')$$

de unde $z_1 = 3$ și $x = 123$.

Ulterior, matematicienii chinezi au transformat algoritmul extragerii rădăcinilor pătrate și cubice într-o metodă generală de calcul al rădăcinilor ecuațiilor algebrice cu coeficienți numerici.

Descrierea extragerii rădăcinii pătrate și cubice din *Matematică* este cea mai veche pe care o cunoaște istoria. În literatura greacă, extragerea rădăcinii pătrate bazată pe descompunerea pătratului unei sume, se întîlnește pentru întîia oară în comentariile lui Teon din Alexandria la lucrarea de astronomie a lui Ptolemeu. Regulile pentru extragerea rădăcinii pătrate și cubice le găsim apoi la indianul Aryabhata, în jurul anului 500, iar mai tîrziu la alți învățați din India, precum și în literatura arabă. Regula pentru extragerea rădăcinii pătrate se întîlnește în Europa abia în al doilea sfert al secolului al XII-lea iar cea pentru extragerea rădăcinii cubice — la Leonardo Pisano.

În exemplele pentru extragerea rădăcinilor din cartea a IV-a din *Matematică* se întîlnesc numere mari. În problema nr. 24 se cere să se determine diametrul unei sfere cu un volum de 1 644 866 437 500 ci, după regula $d = \sqrt[3]{\frac{V \cdot 16}{9}}$ (vezi p. 81); adică $d = 14\,300$ ci.

Pentru rădăcinile pătrate din fracții cu numitor nepătratic, se recomandă regula:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b};$$

iar pentru rădăcinile cubice, regula:

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{b}.$$

Regula extragerii rădăcinii pătrate dintr-un număr întreg se încheie în cartea a IV-a cu indicația că dacă operația nu se efectuează pînă la sfîrșit atunci „se poate continua, ca înainte". Nu este exclus că aici se are în vedere calculul părții fracționare a rădăcinii în fracții zecimale. E adevărat că o asemenea înțelegere a textului nu este confirmată de vreun exemplu, dar în principiu, continuarea operațiilor dincolo de partea întreagă a rădăcinii nu prezintă dificultăți, trebuind introduse doar niște coloane noi în abac[1].

Să mai observăm că matematicienii chinezi cunoșteau reguli aproximative pentru extragerea rădăcinii pătrate din numere care nu erau pătrate perfecte. De pildă, Liu Huei folosește aproximările și inegalitățile

$$a + \frac{r}{2a+1} < \sqrt{a^2 + r} < a + \frac{r}{2a},$$

unde a^2 este cel mai mare pătrat întreg conținut în $a^2 + r$.

Probleme care conduc la ecuații de gradul al doilea. Rezolvarea ecuațiilor de gradul al doilea nu constituie obiectul unui capitol separat în *Matematică*. Cîteva probleme de acest gen, printre altele, de gradul I, apar în cartea a IX-a consacrată aplicațiilor teoremei lui Pitagora. Pentru rezolvarea problemelor ce conduc la rezolvări de ecuații de gradul al doilea se folosesc două metode diferite.

Una este echivalentă cu regula noastră de rezolvare a ecuației de gradul al doilea cu trei termeni. O întîlnim în problema 11 pentru determinarea laturilor unui dreptunghi pentru care sînt date diferența $x - y = l = 6{,}8$ și diagonala $\sqrt{x^2 + y^2} = d = 10$. Transformările intermediare nu se dau în text. Necunoscutele se calculează direct după regulile:

$$y = \sqrt{\frac{1}{2}\left[d^2 - 2\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]} - \frac{l}{2} = 2{,}8,$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}\left[d^2 - 2\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]} + \frac{l}{2} = 9{,}6.$$

Dacă din condițiile date se elimină x și se calculează y ca rădăcină pozitivă a ecuației

$$2y^2 + 2ly + l^2 = d^2,$$

[1] Cuvintele date între ghilimele nu sînt unica traducere posibilă a textului originar neclar. Vezi [42, p. 540] și [44, p. 364] — *N.A.*

prin formulele noastre obișnuite, atunci schema pentru determinarea lui y va fi diferită de cea din *Matematică*. În tratatul lui Ian Huei, *Explicația amănunțită a regulilor matematice din cele nouă cărți și noua lor clasificare (Sian țze țziu cijan suan fa țzuan lei)* publicată în anul 1261, mersul rezolvării se explică în felul următor. Prin eliminarea lui x problema se reduce la o ecuație completă de gradul al doilea, scrisă sub forma

$$2y^2 + 4\left(\frac{l}{2}\right)^2 + 4\,\frac{l}{2}\,y = d^2.$$

Scăzînd pe $2\left(\frac{l}{2}\right)^2$ din ambele părți ale egalității și împărțind restul la doi, se obține

$$\left(y + \frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left[d^2 - 2\left(\frac{l}{2}\right)^2\right],$$

de unde:

$$y = \sqrt{\frac{1}{2}\left[d^2 - 2\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]} - \frac{l}{2}$$

și

$$x = y + l.$$

Trebuie avut în vedere că Ian Huei și-a scris comentariul la *Matematică* cu peste un mileniu mai tîrziu. Nu este exclus că în perioada Han, problema nu s-a redus dintr-o dată la o ecuație completă de gradul al doilea, ci la una binomă, necesitînd numai simpla extragere a rădăcinii pătrate. Soluția se poate obține introducînd necunoscuta auxiliară z, media lui x și y; cu cît x este mai mare decît z, cu atît y este mai mic decît z și, deoarece diferența $x - y$ este l, avem:

$$x = z + \frac{l}{2},\quad y = z - \frac{l}{2}.$$

De aici,

$$\left(z + \frac{l}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{l}{2}\right)^2 = d^2$$

$$2z^2 + 2\left(\frac{l}{2}\right)^2 = d^2$$

$$z = \sqrt{\frac{1}{2}\left[d^2 - 2\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]}$$

etc. O asemenea ipoteză este destul de verosimilă. Transformările ce se aplică aici sînt pe deplin accesibile celor care au întocmit *Matematica*. Într-adevăr, transformările liniare se folosesc de fapt la extragerea rădăcinilor. Formarea mediei aritmetice se întîlnește de asemenea în tratat: în cartea I există probleme pentru egalarea cîtorva fracții — formarea mediei lor aritmetice. Reducerea sistemelor

$$\left.\begin{aligned} x + y &= a, \\ xy &= b \end{aligned}\right\}$$

la o ecuație binomă prin substituții liniare se folosise, după cum se pare, încă în Babilon. Să observăm că în textele cuneiforme există probleme care se deosebesc de cele analizate, numai prin datele lor numerice; totuși, mersul calculelor este acolo altul.

Oricum ar fi, formula pentru rezolvarea ecuației complete de gradul al doilea, cunoscută babilonienilor și elenilor, nu este dovedită în știința chineză din perioada Han. Totodată, este incontestabil că pentru rezolvarea unor asemenea ecuații, autorii *Matematicii* aplică o altă metodă, și anume, algoritmul descris mai sus pentru extragerea rădăcinii pătrate dintr-un număr. În fiecare etapă a acestei operații, adică a rezolvării unei ecuații de gradul al doilea, după ce se găsește prima cifră, trebuie alese numere care să satisfacă inegalități sau ecuații de gradul al doilea cu trei termeni, de forma:

$$x^2 + px \leqslant q.$$

Cînd apăreau probleme exprimate nemijlocit printr-o ecuație completă de gradul al doilea, învățații chinezi își îndreptau desigur atenția asupra legăturii dintre acestea și problema ce se pune în permanență la extragerea rădăcinilor pătrate. Soluția prin radicali, adică reducerea ecuației trinome la una binomă, n-are importanță practică în aceste condiții și poate prezenta doar un interes pur teoretic; din punct de vedere al calculului, soluția prin radicali este adecvată doar cînd se dispune de tabele amănunțite de rădăcini pătrate.

Primele ecuații trinome de gradul al doilea la care se aplică algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate sînt tocmai ecuații de forma:

$$x^2 + px = q;$$

ele au totdeauna o rădăcină pozitivă unică. Iată, de exemplu, problema 20 din cartea a IX-a care duce la o asemenea ecuație:

pe mijlocul fiecărei laturi a unui oraș de forma pătrată există cîte o poartă. La 20 bu spre nord de poarta nordică se află un stîlp. Dacă de la poarta sudică ne depărtăm cu 14 bu spre sud și cotim spre apus cu 1 775 bu, atunci stîlpul devine vizibil. Care este lungimea laturii pătratului?

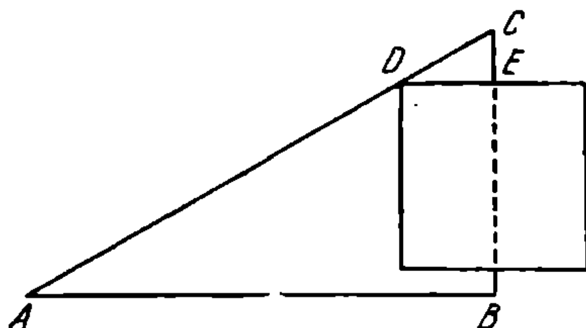


Fig. 4

Deducerea ecuației respective de gradul al doilea[1] și mersul rezolvării ei nu se dau (fig. 4). Textul regulii este totuși pe deplin clar. El arată cum se alcătuiesc coeficienții, iar terminologia regulii stă mărturie că în rezolvarea problemei se aplică algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate. Regula sună astfel: „cantitatea de bu, parcursă de la poarta nordică, înmulțește-o cu cantitatea dublă de bu [parcursă] spre vest, acesta este deîmpărțitul [*și*]. Adună cu cantitatea de bu parcursă de la poarta sudică — acesta este împărțitorul suplimentar [*țzun-fa*]. Extrage rădăcina pătrată și aceasta va fi latura orașului" [42, p. 511]. Așadar, se recomandă să se alcătuiască *și* — deîmpărțitul $2 \cdot 20 \cdot 1\,775$ și *țzun-fa* $20 + 14$. Prin aceasta, calculatorul se află înaintea acelei faze de extragere a rădăcinii pătrate în care trebuie găsită soluția ($x = 250$) a ecuației:

$$x^2 + (20 + 14)\,x = 2 \cdot 20 \cdot 1\,775.$$

Tocmai printr-o asemenea metodă se rezolvă mai tîrziu ecuațiile de gradul al doilea. Ian Huei explică destul de amănunțit și ilustrează geometric metoda pe un exemplu de ecuație analizat de Liu I (în jurul anului 1080), și anume:

$$x^2 + 12\,x = 864.$$

Nu știm cînd apar în matematica Chinei probleme ce duc la ecuații de gradul al doilea de alte forme. După cum afirmă Ian Huei, Liu I rezolva ecuații cu coeficienți numerici de forma:

$$-x^2 + ax = b \text{ și } x^2 - ax = b.$$

Este posibil ca ecuații de ultima formă să le fi rezolvat încă Țzu Ciun-ciji, în secolul al V-lea.

---

[1] Ea se obține ușor, de pildă prin asemănarea triunghiurilor *ABC* și *DEC* — *N.A.*

O asemenea formă canonică, în care apar coeficienți negativi, este legată incontestabil de dorința de a se folosi o schemă unică de rezolvare în toate trei cazurile. Fenomene analoge se întîlnesc în algebra indiană (vezi mai departe). În alte țări din antichitate și evul mediu, ecuațiile de gradul al doilea erau reduse la forme canonice cu coeficienți pozitivi și de aceea se obțineau trei reguli de rezolvare oarecum diferite.

Geometria; aplicații ale proprietăților triunghiului dreptunghic. Datele cele mai timpurii cu privire la noțiunile de geometrie ale chinezilor se referă la secolele al XIII-lea—al XII-lea î.e.n. Acestea sînt niște ornamente pe diferite obiecte uzuale descoperite în timpul unor săpături arheologice — printre altele reprezentări ale unor poligoane cu 5, 7, 8 și 9 laturi. În dezvoltarea ulterioară nu întîlnim însă un studiu special al poligoanelor și poliedrelor regulate care au jucat un rol atît de important în geometria vechilor greci.

Relația între laturile triunghiului dreptunghic atrage de mult atenția matematicienilor chinezi. Conform lucrării de astronomie *Tratat matematic despre cijou-bi* [*Cijou-bi*[1] *suan țzin*], scrisă înaintea *Matematicii*, așa-numita teoremă a lui Pitagora pentru laturi egale cu 3, 4 și 5 îi era cunoscută încă lui Șan Gao, aproximativ cu 1 100 de ani î.e.n.[2]

Conform aceleiași surse, în cazul general, teorema este cunoscută lui Cien-Țzî, care a trăit aproximativ în secolul al VI-lea î.e.n. [45]. După cum s-a mai spus, teorema capătă o largă aplicare în cartea a IX-a din *Matematică*. Am analizat mai înainte o asemenea problemă. Iată și alte cîteva probleme care merită atenție.

În centrul unui bazin cu latura $(2a =)$ 1 cijan = 10 ci, crește stuf care se ridică deasupra apei cu $(h =)$ 1 ci. Dacă se apleacă stuful, el ajunge pînă la mal. Care este adîncimea apei (x)? Regulii îi corespunde următoarea formulă și răspuns:

$$x = \frac{a^2 - h^2}{2h} = 12 \text{ ci}.$$

Rezolvarea problemei nr. 6 s-ar putea obține imediat din teorema lui Pitagora:

$$(x + h)^2 - x^2 = a^2.$$

---

[1] Cijou-bi — prăjină pentru măsurarea umbrei Soarelui — *N.A.*

[2] Judecînd după cronici mai tîrzii, acest caz era cunoscut cu 2 200 de ani î.e.n. — *N.A.*

Li Huei în comentariul său explică identitatea

$$(x + h)^2 - x^2 = 2xh + h^2$$

printr-o figură de gnomon caracteristică pentru algebra geometrică a grecilor. E deosebit de interesant faptul că aceeași problemă se întîlnește mai tîrziu la indianul Bhaskara (secolul al XII-lea), dar cu alte date numerice: $h = \frac{1}{2}$, $a = 2$ (vezi p. 120).

Dacă se frînge trunchiul vertical al unui bambus de 10 ci înălțime și vîrful lui se trage în jos, el va atinge pămîntul la 3 ci de la bază. La ce înălțime este frînt bambusul? Răspuns:

$$x = \frac{10 - \frac{3^2}{10}}{2}.$$

Această problemă (nr. 13) cu alte date o întîlnim în India la Brahmagupta în prima jumătate a secolului al VII-lea și la Bhaskara în secolul al XII-lea.

În problema 14 se folosește regula determinării triunghiurilor dreptunghice cu laturi raționale sau întregi, bazată pe identitatea:

$$\left(\frac{p^2 - q^2}{2}\right) + (pq)^2 = \left(\frac{p^2 + q^2}{2}\right)^2.$$

Aici este vorba despre determinarea drumurilor parcurse de doi pietoni după condiția: amîndoi pornesc din același loc cu vitezele 7 și 3, primul merge spre sud parcurgînd distanța 10, iar apoi pornește oblic, astfel încît să se întîlnească cu cel de-al doilea care merge tot timpul spre est. Textul regulii propune să se alcătuiască numerele:

$$\frac{7^2 + 3^2}{2}, \quad 7^2 - \frac{7^2 + 3^2}{2}, \text{ adică } \frac{7^2 - 3^2}{2} \text{ și } 7 \cdot 3;$$

drumurile parcurse oblic și spre est se calculează respectiv astfel:

$$\left[10 \cdot \frac{7^2 + 3^2}{2}\right] : \left(7^2 - \frac{7^2 + 3^2}{2}\right) = 14\frac{1}{2}$$

și

$$[10 \cdot (7 \cdot 3)] \quad \left(7^2 - \frac{7^2 + 3^2}{2}\right) = 10\frac{1}{2}.$$

Soluția poate fi prezentată în felul următor. Însemnăm prin x și y cateta de est și cea de sud, iar prin z ipotenuza; atunci din

$$\frac{x}{y+z} = \frac{3}{7} \text{ și } x : y : z = \alpha\beta : \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2} : \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}$$

rezultă că:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{3}{7}.$$

Luînd $\beta = 3$, $\alpha = 7$ și știind că $y = 10$, găsim pe x și z:

$$x = \frac{y \cdot \alpha\beta}{\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2}} = 10\frac{1}{2}, \quad z = \frac{y\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}}{\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2}} = 14\frac{1}{2}.$$

Triplete de numere întregi care să satisfacă ecuația nedeterminată

$$x^2 + y^2 = z^2$$

știau să le găsească încă grecii, iar înaintea lor babilonienii. Regula

$$x : y : z = 2\alpha\beta : (\alpha^2 - \beta^2) : (\alpha^2 + \beta^2),$$

care exprimă toate tripletele posibile de numere pitagoreice reciproc simple prin intermediul a 2 parametri reciproc simpli și de paritate diferită α și β, era cunoscută de babilonieni și greci. Această regulă decurge direct din propoziția 6 din cartea a II-a a *Elementelor* lui Euclid, deși acolo nu este prezentată în mod explicit. În secolul al IX-lea aceeași regulă este exprimată de indianul Magavira, la începutul secolului al XIII-lea de Leonardo Pisano, iar la sfîrșitul secolului al XVI-lea de F. Viète.

În problema 4 se cere să se taie dintr-un buștean rotund de un diametru dat o grindă de secțiune dreptunghiulară de grosime dată. În rezolvare se folosește teorema lui Pitagora, presupunîndu-se implicit că unghiul înscris în semicerc este un unghi drept. Aceeași proprietate se exprimă în alt mod în *Tratatul despre cijou-bi*, unde se explică că vîrfurile triunghiurilor dreptunghice construite pe diametrul cercului se află pe circumferință [38].

Trebuie să mai amintim și problema 5 în care se cere să se determine lungimea arcului a 7 spire de elice: se consideră un copac de 2 cijani înălțime, iar circumferința de 3 ci. La picioarele lui crește o pueraria[1]. Prin 7 spire ea se ridică în jurul copa-

---

[1] Arbust urcător (liană) cultivat ca plantă ornamentală — *N.R.*

cului pînă la vîrful lui. Care este lungimea puerariei? Răspuns: 2 cijani, 9 ci, adică $\sqrt{20^2 + (7 \cdot 3)^2}$, soluția s-a obținut desigur prin desfășurarea cilindrului pe un plan.

În cartea a IX-a nu se vorbește nimic despre procedeele de rezolvare a problemelor. În problemele 15 și 16 pentru calculul laturii pătratului și al razei cercului înscris într-un triunghi dreptunghic dat poate că s-a folosit descompunerea suprafeței în părți, iar în primul caz și asemănarea triunghiurilor. Asemănarea stă și la baza unei serii de probleme pentru determinarea laturii unui oraș de formă pătrată și în ultimele trei probleme din cartea a IX-a, în care se determină distanțele pînă la un obiect inaccesibil, înălțimea unui munte și adîncimea unui puț. Aceste probleme sînt foarte elementare și nu ne vom opri asupra lor.

Problemele folosind teorema lui Pitagora și asemănarea triunghiurilor dreptunghice capătă ulterior o importantă răspîndire în China. Încă în secolul al XVII-lea, Li Iui sistematizează în 25 de grupe problemele pentru găsirea oricăror elemente ale unui triunghi dreptunghic sau combinații ale lor, după diferite legături date între ele. Metoda de rezolvare a lui Li Iui, la fel ca și la îndepărtații lui precursori, este algebrică.

În istoria geometriei practice, un loc important îl ocupă completarea la comentariul lui Liu Huei, extrasă mai tîrziu separat într-un *Tratat matematic despre o insulă marină (Hai tao suan țzin)*, direct înrudită cu ultimele probleme din *Matematica în nouă cărți*. În secolul al VII-lea acest tratat a fost inclus în culegerea „Zece tratate model de matematică“ [46].

Tratatul despre insula marină este consacrat determinării distanței pînă la obiecte inaccesibile și a dimensiunilor lor. Lucrarea a căpătat această denumire după prima dintre probleme, în care se vorbește despre măsurarea de pe mare a înălțimii unei insule. Tratatul conține rezolvarea a nouă probleme. Afară de înălțimea insulei (1), în el se mai determină: 2) înălțimea unui pom așezat pe un deal, 3) înălțimea unui oraș depărtat înconjurat de un zid, 4) adîncimea unei rîpe, 5) înălțimea unui turn situat pe cîmp și privit de pe un deal, 6) lățimea gurii unui rîu, 7) adîncimea unui iaz cu apă limpede, 8) lățimea unui rîu privit de pe un deal, 9) înălțimea unui oraș văzut de pe un munte. Este incontestabil că toate regulile s-au stabilit din considerații de asemănare. Iată cea de-a doua problemă a lui Liu Huei: „Pe un deal crește un brad de înălțime necunoscută. Jos, pe cîmp, se află două prăjini, avînd fiecare o înălțime de 20 ci (a), fiind

situate pe aceeași dreaptă cu copacul și la o distanță de 50 cijani (b) una de alta. Vîrful copacului și vîrful primei prăjini formează o dreaptă al cărei capăt intersectează linia pămîntului la o distanță de 7 cijani și 4 ci în spatele prăjinii (c); în acest punct baza copacului măsoară 2,8 ci (e) de la vîrful prăjinii. Vîrful

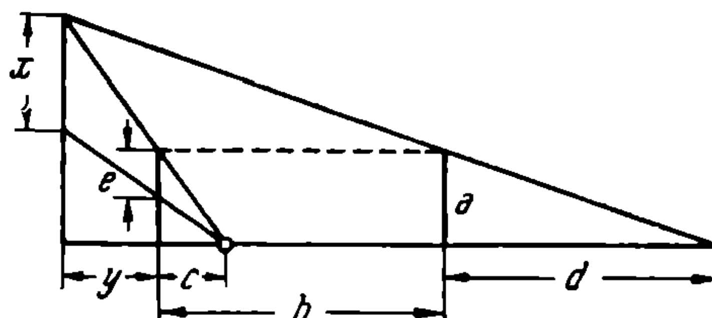


Fig. 5

copacului mai formează o linie dreaptă cu vîrful celei de-a doua prăjini din spate și un punct de pe pămînt situat la 8 cijani 5 ci în spatele prăjinii (d). Se cere să se afle înălțimea (x) a bradului și distanța (y) de la prima prăjină pînă la deal" [46, p.254]. Regula lui Liu Huei corespunde următoarelor formule (fig. 5):

$$x = \frac{be}{d - c} + e, \quad y = \frac{bc}{d - c}.$$

Ulterior, asemenea probleme formează obiectul de studiu al multor matematicieni europeni și ele intră în manualele de geometrie practică, de artă militară etc. de la începutul Renașterii.

Măsurarea figurilor plane. În cartea I din *Matematică* se prezintă regulile pentru determinarea ariei dreptunghiului, triunghiului, trapezului, cercului, a sectorului și a segmentului de cerc, precum și a coroanei circulare.

Dacă însemnăm prin d diametrul unui cerc (chinezii antici la fel ca și grecii antici n-au un termen special pentru rază), iar lungimea circumferinței prin c, atunci cele patru reguli din cartea I pentru calculul ariei S a cercului se vor exprima prin formulele:

$$S = \frac{c}{2} \cdot \frac{d}{2} = \frac{cd}{4} = \frac{d \cdot d}{4} \cdot 3 = \frac{cc}{12}.$$

Valoarea lui π se ia aici egală cu 3. Această valoare e folosită cu mult înainte în Babilonul antic, ea se găsește și în Biblie, iar

în literatura chineză se întîlnește mai devreme în *Tratatul matematic despre prăjina de măsurat* și se folosește atît pentru aria cercului, cît și pentru lungimea circumferinței. Să observăm că și în Babilon se folosește o formulă ce exprimă aria cercului prin lungimea circumferinței.

Aria sectorului se determină după lungimea s a arcului său (regula de calcul a acestuia prin intermediul altor date nu se prezintă), fiind egală cu $\frac{ds}{4}$. Aria coroanei circulare se exprimă prin formula elegantă:

$$\frac{c_1 + c_2}{2} \cdot \frac{d_1 + d_2}{2}.$$

În sfîrșit, aria segmentului definit de o coardă de lungime l și avînd înălțimea h se calculează după formula aproximativă:

$$\sigma = \frac{lh + h^2}{2}.$$

În cuprinsul unui semicerc, ea dă aproximări în minus cu atît mai mari, cu cît este mai mică înălțimea segmentului. Dacă se ia $l = 1$, atunci eroarea relativă δ a acestei formule, adică raportul $\delta = \frac{\sigma' - \sigma}{\sigma'}$, în care σ și σ' (valoarea reală a ariei) sînt luate cu o exactitate pînă la 10^{-4}, variază în felul următor:

h	σ	σ'	δ
0,01	0,0050	0,0067	25,0%
0,10	0,0550	0,0672	18,2%
0,30	0,1950	0,2137	8,8%
0,50	0,3750	0,3927	4,5%

Pentru $h \to 0$ raportul $\frac{\sigma}{\sigma'} \to 0,75$ și $\delta \to 25\%$. În cazul $h = r$, adică în cazul semicercului, formula chineză pentru aria segmentului ne dă valoarea exactă pentru $\pi = 3$, dar și pentru această valoare a lui π, aproximările pentru segmente cu un h mic sînt foarte grosiere, și anume mai proaste chiar decît însăși aproximarea lui π, care are o eroare de circa 5%. Pentru semicerc,

$$\sigma = \frac{d + r}{2} r.$$

așadar pentru aria unui trapez, una dintre laturile căruia este diametrul cercului, cealaltă latură este un segment de tangentă paralel cu diametrul, și ca lungime egal cu raza. Poate că acest rezultat a fost extins direct asupra segmentelor mai mici decît semicercul, înlocuindu-se d și r prin l și h. Însăși regula pentru semicerc se poate obține cu ajutorul unui hexagon regulat înscris. Jumătatea ariei unui asemenea hexagon este mai mică decît a semicercului: poate că pentru precizare, în locul ariei $ACDB$ s-a luat aria $AC'D'B$, unde $C'D' = CD$ este o tangentă în punctul cel mai de sus al circumferinței (fig. 6).

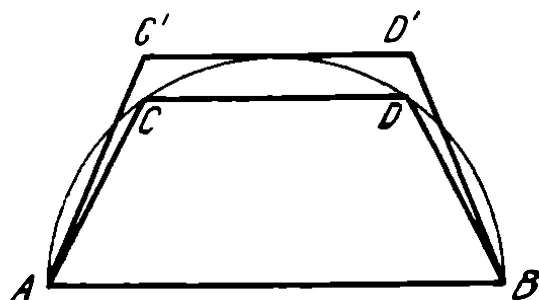


Fig. 6

Regula antică chineză pentru calculul ariei segmentului coincide cu regula folosită de precursorii lui Heron din Alexandria. În *Metrica* scrisă în secolul I, Heron arată că „anticii" măsurau aria segmentului destul de inexact, luînd-o egală cu $\frac{l+h}{2}h$, iar acest lucru este adevărat (cînd $\pi = 3$) numai pentru semicerc. Tot el reproduce o formulă mai bună:

$$\sigma = (l + h)\frac{h}{2} + \frac{1}{14}\left(\frac{l}{2}\right)^2,$$

care dă aria semicercului pentru $\pi = \frac{22}{7}$, dar atrage atenția că și această expresie trebuie folosită numai dacă baza segmentului nu depășește triplul înălțimii. Formula de mai sus apare și în *Învățătura despre măsurători*, o carte veche ebraică (vezi p. 227). Regula $\sigma = \frac{(l+h)h}{2}$ se întîlnește mai tîrziu la învățatul indian Magavira.

Coincidența între procedeele de calcul ale ariei segmentului, folosite în China și în Alexandria, ne sugerează ideea că aici a putut exista o anumită sursă comună mai veche.

Pentru arcul s al segmentului, Șen Ko propune în 1086 regula $s = 1 + 2\frac{h^2}{\alpha}$ [40, p. 39]. Poate că Șen Ko comite o eroare de scriere și pune diametrul în locul coardei. În acest caz, regula ar

fi echivalentă cu înlocuirea semiarcului prin coarda respectivă: $\sqrt{\frac{l}{2} + h^2}$, ceea ce dă pentru arc aproximarea $l + 2\frac{h^2}{l}$ (compară cu p. 65).

Calcularea lui π. Valoarea $\pi = 3$ pentru măsurarea cercului se folosește deseori în lucrările curente ale topometrilor și în manualele de matematică, timp de multe secole după apariția *Matematicii*. E probabil că această valoare se obținuse mai întîi separat pentru lungimea circumferinței și pentru aria cercului, fără să se fi sesizat legătura între cele două mărimi. Poate că coincidența dintre valorile lui π în ambele cazuri a fost mai întîi rezultatul unor măsurători empirice sau semiempirice. De pildă, aria cercului se ia echivalentă cu 3/4 din pătratul circumscris, iar lungimea circumferinței se lua egală cu perimetrul unui hexagon regulat înscris. Autorii *Matematicii în nouă cărți* cunoșteau relația între lungimea circumferinței și aria cercului. Dar tot ei, în calculul volumului sferei, folosesc o regulă corespunzătoare unei alte valori $\pi = \frac{27}{8}$ (p. 81), nelegînd încă, probabil, cvadratura cercului cu cubatura sferei.

În secolele I — al III-lea, astronomii și matematicienii chinezi, probabil sub influența ideilor care pătrundeau din Grecia prin India, efectuează o serie de studii consacrate calculului mai exact al lui π. Astronomul și filozoful Cijan-Hen (78—139), pe baza unor considerente necunoscute nouă, conchide că pătratul lungimii circumferinței se află în raportul 5 : 8 cu pătratul perimetrului pătratului circumscris, ceea ce corespunde la valoarea $\pi = \sqrt{10} = 3{,}162\ldots$ Această aproximare elegantă, cu o eroare mai mică de 1%, se folosește apoi de nenumărate ori în China, ca de pildă, de către Țin Țziu-șao în anul 1247, iar la alți autori mult mai tîrziu. Aproximarea $\pi = \sqrt{10}$ se întîlnește și în alte părți: la Brahmagupta în secolul al VII-lea, iar la Muhammed al-Horezmi-în secolul al IX-lea.

Învățatul și conducătorul de oști Van Fan (decedat în anul 267) capătă o aproximare ceva mai bună $\pi = 142/45$, adică 3,155... Nu știm cum a găsit el acest rezultat. În schimb, cunoaștem calculul lui Liu Huei. În comentariul la prima carte din *Matematică*, Liu Huei aplică procedeul propus pentru prima oară de Arhimede și bazat pe aproximarea ariei cercului printr-o succesiune de arii de poligoane regulate înscrise cu $k \cdot 2^n$ laturi. Mai

întîi se calculează laturile unor asemenea poligoane începînd cu hexagonul, iar apoi ariile lor, ultimele calculîndu-se aproximativ: laturile se înmulțesc cu raza. Totul se reduce astfel la aplicarea teoremei lui Pitagora și extragerea de rădăcini pătrate. Liu Huei apreciază exactitatea rezultatului, bazîndu-se pe faptul că aria cercului este mai mică decît aria unei figuri alcătuite din poligonul regulat înscris și din dreptunghiurile construite pe laturile poligonului avînd laturile opuse tangente la cerc. El folosește inegalitățile:

$$S_{2n} < S < S_n + 2\,(S_{2n} - S_n),$$

unde S este aria cercului, iar S_n și S_{2n} sînt ariile poligoanelor regulate, avînd numărul de laturi egal cu n și $2n$. Aceste evaluări sînt diferite de evaluările din *Măsurarea cercului* lui Arhimede, care se bazează pe calculul perimetrelor poligoanelor cu 96 de laturi înscrise și circumscrise.

Stabilind că pentru $d = 100$ unități,

$$S_{96} = 313\,\frac{584}{625}, \quad S_{192} = 314\,\frac{64}{625},$$

așa încît:

$$314\,\frac{64}{625} < S < 314\,\frac{169}{625},$$

Liu Huei ia ca aproximare partea întreagă a rezultatului 314, corespunzătoare valorii $\pi = 3{,}14$. Continuînd calculul pînă la un poligon cu 3 072 de laturi, el găsește o aproximare mai exactă, care în fracții zecimale este egală cu 3,141 59.

Liu Huei arată că procesul de aproximare a ariei cercului prin ariile poligoanelor înscrise se poate continua și mai departe. El scrie:

„Cu cît vom împărți în părți mai mici, cu atît mai mică va fi lipsa. Dacă se împarte din ce în ce mai departe, pînă cînd împărțirea devine imposibilă, se realizează coincidența cu circumferința și nu va exista lipsă" [47]. Aceste cuvinte se pot înțelege în sensul că pentru Liu Huei cercul coincide la limită cu un poligon înscris, numărul laturilor crescînd nelimitat. Se poate ca Liu Huei să fi exprimat aici și imaginea atomistică despre cerc ca identic cu un poligon cu un număr suficient de mare de laturi. În mod similar, Liu Huei tratează și calculul volumului piramidei.

Eminentul astronom, matematician și inginer Țzu Ciun-ciji (430—501) calculează cu o precizie și mai mare valoarea lui π, și în opera neajunsă pîn-n zilele noastre arată că:

$$3,1415926 < \pi < 3,1415927.$$

Țzu Ciun-ciji mai are încă o prezentare originală a lui π sub forma 355/113, corectă pînă la a șasea cifră după virgulă, pe care o denumește „exactă"; aproximarea 22/7 pe care o cunoaște el o numește „inexactă".

Exactitatea calculului lui π atinsă în China în secolul al V-lea este depășită doar cu 1 000 de ani mai tîrziu, de Djemșid Ghiaseddin al-Kași, care determină π cu 16 zecimale exacte. Aproximarea 355/113 o găsește din nou olandezul V. Otho, la sfîrșitul secolului al XVI-lea. După cum se știe, această valoare este una dintre redusele fracții continui care aproximează numărul π. Existența ei la matematicienii din China nu înseamnă totuși că ei făceau uz de fracțiile continue; această fracție se poate obține și pe altă calc. De pildă, V. Otho obține valoarea 355/113 plecînd de la aproximările lui Arhimede 22/7 și Ptolemeu 377/120 și scăzînd membru cu membru numărătorii și numitorii între ei:

$$\frac{377-22}{120-7}=\frac{355}{113}.$$

Măsurarea. volumelor. Matematicienii Chinei antice pășesc considerabil înainte în măsurarea volumelor unor figuri ce se întîlnesc în construcții. Pe ei nu-i interesează poliedrele regulate ca pe greci, dar în schimb ci măsoară volumele altor figuri rămase în afara cîmpului de preocupări ale babilonienilor, egiptenilor și grecilor.

Noțiunile de bază privind măsurarea volumelor sînt expuse în carea a V-a din *Matematică* (compară p. 38). Aici se studiează paralelipipedul drept cu bază pătrată, prismele drepte — cu baza trapezoidală și triunghiulară, piramidele — cu baza pătrată și dreptunghiulară. Lucrurile nu se limitează totuși la asemenea cazuri foarte simple și în cartea a V-a găsim reguli exacte pentru măsurarea unor figuri mult mai complicate pe care, după cum se vede din comentariul lui Liu Huei, chinezii știau să le împartă în paralelipipede, prisme și piramide. Astfel, Liu Huei deduce volumul unui trunchi de piramidă cu baza dreptunghiulară, descompunîndu-l într-un paralelipiped drept, patru prisme egale două cîte două și adiacente cu fețele lui și patru piramide egale la colțuri.

Prezentăm textul uneia dintre problemele mai complicate (nr. 17).

„Există un sian-ciu. Lățimea de jos este de 6 ci, lățimea de sus, 1 cijan [= 10 ci], adîncimea, 3 ci, lățimea de sus 8 ci, adîncime nu are, lungimea, 7 ci. Se întreabă care este volumul". Ca întotdeauna, regula este laconică: „Adună [toate] trei lățimile, înmulțește cu adîncimea, mai înmulțește cu lungimea, împărțind la 6, ia o dată [42, p. 475].

Corpul despre care se vorbește este prezentat în fig. 7, unde $a = 6$, $b = 10$, $c = 8$, $l = 7$, $h = 3$. După cum se vede, sian-ciu se descompune într-o prismă dreaptă cu baza triunghiulară (catetele l, h) și înălțimea a și două piramide de aceeași mărime și de înălțime h, la baza cărora se află un trapez cu laturile $\frac{b-a}{2}$, $\frac{c-a}{2}$ și înălțimea l. Regula

$$V = \frac{(a+b+c)\,l\,h}{6}$$

presupune unele transformări pentru exprimarea volumelor prismei prin $\frac{1}{2}\,hla$ și a piramidelor prin $2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}+\frac{c-a}{2}\right)l\right]\frac{h}{3}$.

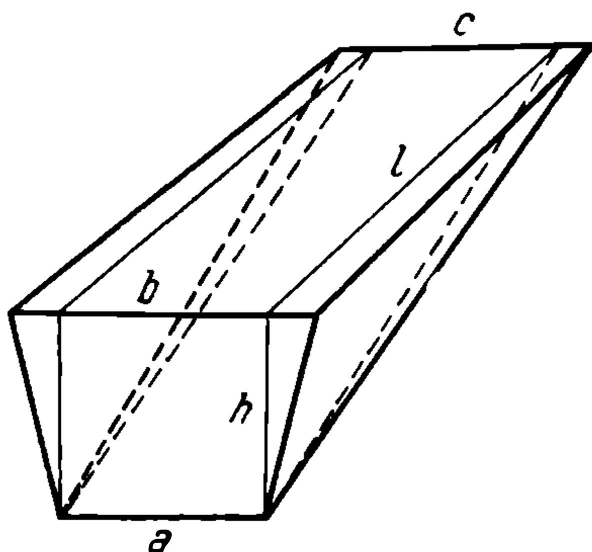


Fig. 7

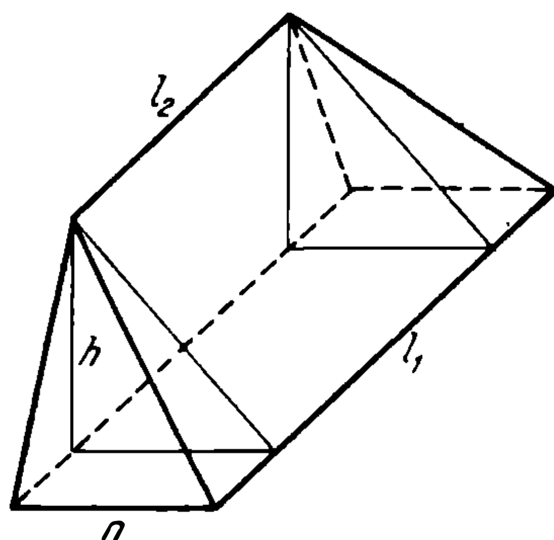


Fig. 8

Ulterior, volumul unui asemenea corp îl determină A. Legendre la sfîrșitul secolului al XVII-lea, în propoziția 20 din cartea a VI-a a *Bazelor geometriei*.

Volumul corpului ciu-men (fig. 8) se dă prin regula:

$$V = \frac{1}{6}\,(2\,l_1 + l_2)\,ah,$$

care se poate obține, descompunînd acest corp, prin planuri perpendiculare pe muchia superioară, într-o prismă dreaptă cu baza triunghiulară și două piramide de aceeași mărime, cu bazele dreptunghiulare. Și aici sînt necesare transformări algebrice.

Volumul corpului ciu-tun asemănător cu un trunchi de piramidă cu patru muchii, neconvergente însă (fig. 9), se determină prin regula:

$$V = \frac{(2a_1 + a_2) b_1 + (2a_2 + a_1) b_2}{6} h,$$

unde a_1, b_1 sînt laturile bazei inferioare, a_2, b_2 sînt laturile bazei superioare, iar h — înălțimea corpului. Deducerea regulii există la matematicianul Van Siao-tun din secolul al VII-lea; corpul se poate descompune în prisme și piramide după cum se arată în fig. 9. Atunci:

$$V = h\left(a_2 b_2 + \frac{a_2x}{2} + \frac{a_2u}{2} + \frac{b_2y}{2} + \frac{b_2z}{2} + \frac{xy}{3} + \frac{xz}{3} + \frac{uy}{3} + \frac{uz}{3}\right.\text{etc.}$$

În China, problemele de măsurare a volumelor sînt în parte asemănătoare cu cele studiate de babilonieni. În textele cuneiforme există de asemenea probleme pentru calculul numărului de muncitori necesari la execuția unor lucrări de construcții și de pămînt

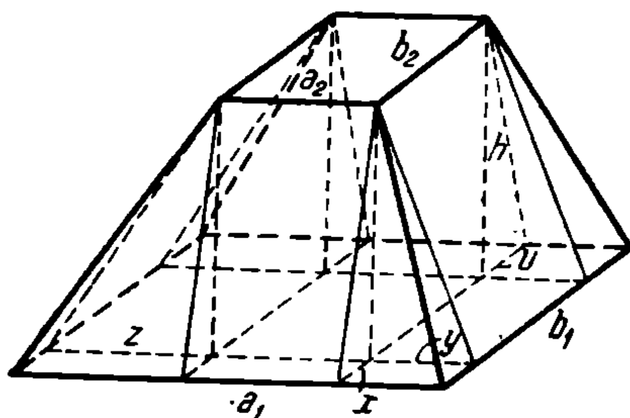


Fig. 9

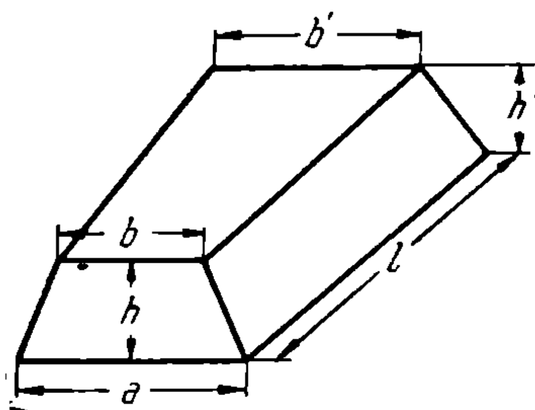


Fig. 10

și pentru calculul volumelor unor construcții. Babilonienii exprimă volumul unui șanț de apărare (fig. 10) prin regula aproximativă:

$$V \cong \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a'+b'}{2}\right)\frac{h+h'}{2}\, l.$$

Cunoaștem prea puțin această latură a matematicii Babilonului pentru a continua asemenea comparații.

Dintre corpurile rotunde, în *Matematică* se determină volumele următoarelor corpuri:

cilindrul:

$$V = \frac{c^2}{12} h,$$

conul:

$$V = \frac{c^2}{12} \frac{h}{3}$$

şi trunchiul de con:

$$V = \frac{c_1 c_2 + c_1^2 + c_2^2}{12} \frac{h}{3}.$$

Aceste formule sînt juste pentru $\pi = 3$. Regula pentru volumul sferei nu se prezintă într-o formă explicită, dar apare în cartea despre extragerea rădăcinilor. După cum s-a mai spus, diametrul sferei se exprimă prin intermediul volumului, după formula:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{9} V},$$

astfel încît:

$$V = \frac{9}{16} d^3.$$

Deoarece în realitate coeficientul numeric trebuie să fie $\frac{\pi}{6}$, avem aici $\pi = \frac{27}{8}$, ceea ce diferă de cea adoptată pentru cerc, cilindru și con. E posibil că sfera se lua egală ca volum cu un cilindru avînd ca bază un cerc mare, de arie $\frac{3}{4} d^2$ și ca înălțime $\frac{3}{4} d$:

$$V = \frac{9}{16} d^3 = \frac{3}{4} d^2 \cdot \frac{3}{4} d.$$

Mai tîrziu, în comentariul lui Liu Huei, care după cum am văzut s-a ocupat cu succes de cvadratura aproximativă a cercului, pentru volumul sferei, se indică inegalitățile [38]

$$\frac{8}{16} d^3 < V < \frac{9}{16} d^3,$$

cărora le corespund următoarele limite pentru π:

$$3 < \pi < 3 \frac{3}{8}.$$

Geometria și algebra. Am văzut că în domeniul geometriei apar multe probleme algebrice. Figurile geometrice se folosesc pentru lămurirea și deducerea relațiilor algebrice, iar ultimele, la rîndul lor, servesc pentru studiul figurilor. Exemple de acest fel se întîlnesc în decursul întregii istorii a matematicii din China.

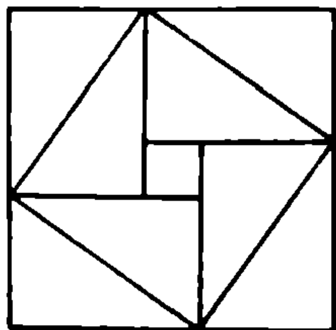


Fig. 11

Legat de aceasta, este remarcabil faptul că prima demonstrație a teoremei lui Pitagora în China nu este pur sintetică, ci reunește construcții simple și transformări algebrice. Demonstrația o conține comentariul la *Tratatul despre cijou-bi* al lui Cijan Țziun-țin (secolele al II-lea și al III-lea). Ea se bazează pe descompunerea unui pătrat (fig. 11) construit pe suma catetelor unui triunghi dreptunghic, în 8 triunghiuri congruente cu cel inițial, și un pătrat interior cu latura egală cu diferența catetelor, ceea ce ne dă:

$$c^2 = (a + b)^2 - 4\frac{ab}{2} = a^2 + b^2,$$

sau (ceea ce Cijan exprimă în cuvinte):

$$c^2 = 4\frac{ab}{2} + (a - b)^2 = a^2 + b^2.$$

Un desen similar, fără explicații, afară de indicația „privește"! o dă matematicianul indian Bhaskara din secolul al XII-lea (vezi p. 124). În *Tratatul despre cijou-bi* se dă același desen, pentru cazul $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, pătratul mare fiind împărțit în 49 de pătrate mici; se folosește egalitatea $25 = 49 - 4\cdot 6$.

În ceea ce privește reprezentarea geometrică a relațiilor algebrice, se întîlnesc exemple încă la Liu Huei și succesorul său apropiat ca timp, Cijan Țziun-țin, care cunosc ilustrări planimetrice ale unor identități de felul:

$$2\,ab + (b - a)^2 = a^2 + b^2,\quad a^2 - b^2 = (a - b)^2 + 2b\,(a - b),$$

sau

$$a^2 - b^2 = (a - b)\,(a + b).$$

Vom arăta mai tîrziu că mijloacele geometrice sînt folosite cu multă iscusință pentru deducerea sumelor cîtorva serii numerice. Deocamdată subliniem doar că problemele de geometrie au o influență mare asupra progresului algebrei, conducînd la ecuații de gradul al treilea.

Înainte de a ne referi din nou la algebră, să mai adăugăm că în secolul al XIII-lea sub influența întăririi legăturilor științifice cu țările Asiei centrale, la unii matematicieni chinezi crește considerabil interesul față de latura teoretică a matematicii în general și în particular față de geometrie. Astfel, Ian Huei critică în anul 1275 pe Li Ciun-fen și pe Liu I pentru faptul că ei aplicaseră anumite metode fără să elaboreze bazele lor teoretice. În vechime — spune Ian Huei — învățații schimbau denumirea metodelor lor de la o problemă la alta, iar acest fapt ascundea bazele lor reale. Ian Huei arată cum se deduc multe procedee și propoziții ca, de pildă, regula pentru rezolvarea ecuației complete de gradul al doilea (amintită mai sus) sau teorema egalității unor dreptunghiuri complementare, la dreptunghiurile construite pe diagonala unui dreptunghi oarecare. Ultima teoremă se deosebește de propoziția 43 din cartea I a *Elementelor*, doar prin faptul că în *Elemente* este vorba despre paralelograme.

Există temeiuri să credem că tocmai în decada a 7-a a secolului al XIII-lea, astronomii chinezi studiază *Elementele* lui Euclid. Totuși, geometria în China medievală nu se dezvoltă ca o știință independentă, deductivă și preocuparea de *Elementele* lui Euclid, chiar dacă a existat, n-a lăsat vreo urmă vizibilă [40, pp. 104—105]. Primele șase cărți ale *Elementelor* au fost traduse în limba chineză mult mai tîrziu, în anul 1607.

Ecuațiile de gradul al treilea. Problemele care duc la ecuații numerice de gradul al treilea se întîlnesc încă în Babilon, iar pentru rezolvarea lor se aplică încercări și tabele. Nu este clar însă dacă matematicienii babilonieni concepeau ca atare ecuațiile de gradul al treilea.

În literatura elenă, după cum știm, ecuațiile numerice de gradul al treilea nu se luau aproape de loc în considerare. Excepție fac extragerile aproximative ale rădăcinii cubice la Heron, și exemple izolate de ecuații algebrice cu rădăcini numere întregi, al căror model a ajuns pînă la noi în *Aritmetica* lui Diofant. În exemplul lui Diofant:

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^2 + 2x + 3,$$

rădăcina egală cu 4 este ușor de descoperit, aducînd ecuația la forma:

$$x^3 + x = 4x^2 + 4$$

și simplificînd cu $x^2 + 1$.

În afară de astfel de cazuri, ecuațiile numerice de gradul al treilea în formă explicită apar în China. Este posibil că ele fuseseră analizate încă de Țzu Ciun-ciji. Fără îndoială, probleme cu ecuații de gradul al treilea diferite de cele binome se întîlnesc la astronomul și matematicianul Van Siao-tun din prima jumătate a secolului al VII-lea, autorul lucrării *Continuări la matematica străveche* (*Ți gu suan șu*, aproximativ în anul 625).

Într-una din probleme se cere să se găsească laturile unui triunghi dreptunghic cunoscînd produsul catetelor:

$$xy = P = 706\frac{1}{50},$$

și diferența dintre ipotenuză și una din catete:

$$\sqrt{x^2 + y^2} - x = Q = 36\frac{9}{10}.$$

Van Siao-tun exprimă verbal regula de formare a ecuației:

$$x^3 + \frac{Q}{2}x^2 = \frac{P^2}{2Q}$$

și adaugă laconic:

„Efectuați operația de găsire a rădăcinii conform extragerii rădăcinii. Rezultatul va da prima latură. Adăugînd la aceasta prisosul, obținem ipotenuza. Împărțiți produsul cu prima latură, cîtul este a doua latură“ [34, p. 54]. Valorile laturilor care se dau în răspuns $x = 14\frac{7}{20}$, $y = 49\frac{1}{5}$, $\sqrt{x^2 + y^2} = 51\frac{1}{4}$ sînt soluțiile exacte ale problemei. Metoda de rezolvare nu se expune, dar nu există nici o îndoială că ea reprezintă în sine dezvoltarea procedeului antic chinezesc de extragere a rădăcinilor cubice.

Această metodă dă direct partea întreagă a rădăcinii; partea fracționară se poate găsi în fracții zecimale. Este de asemenea posibil ca printr-o substituție liniară, ecuația să se transforme mai întîi într-o ecuație cu rădăcină întreagă; asemenea substituții sînt folosite de algebriștii chinezi încă în secolul al III-lea (vezi p. 88). Desigur, datele numerice ale problemei sînt alese dinainte. Merită atenție însăși căutarea soluțiilor raționale ale problemei: laturile triunghiului dreptunghic sînt proporționale cu numerele 287, 984, 1025, adică cu 7, 24, 25. Am spus mai sus că învățații Chinei cunoșteau regula generală de construire a triunghiurilor dreptunghice cu laturi întregi sau raționale.

În alte probleme cu triunghiuri dreptunghice sau de calcul a elementelor unui trunchi de piramidă cu bază pătrată, Van Siao-tun obține ecuații numerice de formă mai generală:

$$x^3 + ax^2 + bx = c.$$

Se cere de pildă să se determine laturile unui triunghi dreptunghic cunoscînd produsul dintre catetă și ipotenuză $(P =)\ 1337\,\frac{1}{20}$ și diferența dintre ipotenuză și cealaltă catetă $(D\,1 =) 1\frac{1}{10}$. Dacă notăm catetele prin x și y, atunci eliminarea lui y ne dă:

$$(x + D)^2\ (2Dx + D^2) = P^2,$$

sau:

$$\left(x + 1\,\frac{1}{10}\right)^2 \left(2\,\frac{2}{10}\,x + 1\,\frac{21}{100}\right)^2 = \left(1337\,\frac{1}{20}\right)^2.$$

Van Siao-tun dă foarte corect valoarea[1] $x = 92\,\frac{2}{5}$; atunci ipotenuza este $93\,\frac{1}{2}$, iar $y = 14\,\frac{3}{10}$. Aici laturile sînt proporționale cu numerele 143, 924 și 935.

Despre dezvoltarea ulterioară a algebrei în China pînă la epoca ei de apogeu, adică pînă în secolul al XIII-lea, nu se știe aproape nimic.

Algebra în secolul al XIII-lea. Metoda tian-iuan. În decursul cîtorva zeci de ani din secolul al XIII-lea, în China trăiesc patru matematicieni eminenți — Țin Țziu-șao, Li E, Ian Huei și Ciju Și-țze, ale căror lucrări de bază s-au păstrat pînă în zilele noastre. Este incontestabil că acești învățați au avut precursori, despre care ei vorbeau de altfel uneori. Ian Huei se referă de pildă la lucrările matematicianului Liu I din secolul al XI-lea (vezi p. 68), și la Țzia Sian, mai apropiat de el în timp și care, în jurul anului 1100, a scris opera *Explicarea tabelelor metodei de extragere a rădăcinilor în lanț* (*Li cijen și so*). Ian Huei spune că Țzia Sian s-a ocupat de extragerea rădăcinilor de ordinul patru și a cunoscut

[1] G. Loria, comițînd o greșeală de calcul, ajunge la concluzia eronată că răspunsul lui Van Siao-tun este incorect și problema este imposibilă [28, pp. 156—157] — *N.A.*

tabelul numerelor, pe care noi le numim coeficienți binomiali. Ciju Și-țze amintește pe Iuan Hao-ven și pe Liu Iu-se pe care noi nu-i cunoaștem.

Deși Țin Li, Ian Huei și Ciju au trăit simultan sau foarte aproape în timp unul de altul, nu putem afirma că lucrările lor s-ar afla în interdependență; în orice caz, nici unul dintre acești autori nu se referă la celălalt. Acest lucru este pe deplin explicabil în cazul lui Țin Țziu-șao și Li E care lucrează la mijlocul secolului al XIII-lea. Primul este un înalt demnitar în statul sud-chinezesc Sun, aflat în dușmănie cu mongolii, cuceritorii Chinei de nord, unde trăiește celălalt matematician și ocupă de asemenea posturi înalte. În operele tuturor celor patru matematicieni există deosebiri în terminologie și scriere. Totuși, după conținut, aceste opere se completează una pe alta în multe privințe.

Lucrarea *Nouă cărți de matematică (Șu șu tziu cijan)* a lui Țzin Țziu-șao, apărută în anul 1247, conține la început un capitol teoretico-numeric, iar în partea algebrică de bază conține o expunere foarte completă a așa-numitei metode a lui Horner pentru ecuații de grade superioare, precum și probleme. Li E (1178—1265), în *Oglinda marină a măsurătorilor cercului (Țze iuan hai țzin*, 1248) și *Pași noi în calcule* (*I gu ian duan*, 1259), învață cu lux de amănunte cum se reduc problemele geometrice și de altă natură la ecuații algebrice [47 *a*]. Pentru a evita orice neclaritate, să observăm că denumirea primei cărți a lui Li nu este legată de calculul lui π, ci de diferite probleme despre cercuri înscrise în triunghiuri etc. *Explicarea amănunțită a regulilor matematice din „Cele nouă cărți" și noua lor clasificare (Sian țze țziu cijan suan fa țzuan lei)*, apărută în anul 1261, și alte lucrări ulterioare ale sudicului Ian Huei se apropie din punct de vedere tematic în multe privințe de vechea *Matematică în nouă cărți*; o atenție deosebită se acordă aici sumării seriilor finite. În sfîrșit, dascălul călător Ciju Și-țze în *Introducerea în studii matematice (Suan siao ciji men*, 1299) face o introducere generală în algebră și expune, în particular, regulile semnelor la adunare și înmulțire, iar în *Oglinda de jasp a celor patru elemente* (*Sî iuan iui țzian*, 1303), descriind metoda lui Horner și procedeele de formare a ecuațiilor, elaborează un sistem de scriere a ecuațiilor de grade superioare cu patru necunoscute și rezolvă o serie de probleme ce se reduc la astfel de ecuații [47 *b*]. Se cunosc numele unor precursori ai lui Ciju Și-țze în rezolvarea unor asemenea sisteme cu două și trei necunoscute și chiar denumirea lucrărilor lor, dar ele n-au fost descoperite pînă în prezent [38].

Nu sînt studiate suficient cauzele datorită cărora înflorește algebra în secolul al XIII-lea, tocmai cînd au loc războaie grele cu mongolii. În mijlocul decadei 1230—1240, mongolii cotropesc China de nord, iar către anul 1280 — și pe cea de sud. Țara întreagă suferă un imens dezastru. Nivelul unor studii matematice se ridică însă datorită, pe de o parte, întăririi contactului cu învățații țărilor Asiei centrale, căzute de asemenea sub puterea mongolilor, iar pe de altă parte, datorită ocrotirii de care s-au bucurat astronomii și matematicienii din partea conducătorilor mongoli.

Realizarea fundamentală a algebrei din această perioadă este extinderea procedeului de rezolvare a ecuațiilor binome de gradul al doilea și al treilea descris mai înainte, asupra ecuațiilor algebrice oarecare, cu coeficienți numerici, adică, continuarea elaborării metodei lui Horner. Cifrele rădăcinii căutate se găsesc pe rînd cu ajutorul încercărilor, ca părți întregi ale rădăcinilor ecuației inițiale și ale celor auxiliare. Substituția liniară

$$x = ky, \quad k = 10^m$$

permite de fiecare dată să se obțină ca partea întreagă a rădăcinii căutate să nu depășească pe 9. O altă substituție liniară,

$$y = p + z,$$

unde p — este partea întreagă găsită a rădăcinii ecuației auxiliare curente, dă trecerea la ecuația următoare. Coeficienții ultimei ecuații se calculează după schema ale cărei exemple s-au dat mai înainte, adică, după așa-numita schemă a lui Horner.

Țzin Țziu-șao descrie amănunțit această metodă, rezolvînd ecuația de gradul patru:

$$-x^4 + 736\,200\; x^2 - 40\,642\,560\,000 = 0$$

cu rădăcina dinainte aleasă $x = 840$. Este interesantă lipsa de interes față de rezolvarea prin radicali, aplicabilă acestei ecuații de gradul al doilea în raport cu x^2. Acest procedeu se folosește și pentru ecuații de grad mai mare decît patru. Nu se știe dacă Țzin Țziu-șao este primul care extinde procedeul lui Horner asupra ecuațiilor de orice grad cu rădăcini pozitive. Pentru ecuația

$$x^4 = 1\,336\,336,$$

unde $x = 34$, Țzia Sian folosește acest procedeu un secol și jumătate mai devreme. În orice caz, lui Țzin îi aparține meritul de a fi expus în mod sistematic și complet această metodă.

Schema de calcul a coeficienților în cazul general se poate obține în mod diferit. Fie că ea fusese extinsă direct de la ecuația $x^3=a$ asupra celorlalte ecuații, fie că ea apare prin transformarea concretă a coeficienților unor ecuații numerice de grad superior prin substituția liniară $x = p + y$, ordinea de calcul corespunde la prezentarea părții din stînga a ecuației transformate, sub forma:

$$\{ [(ax + b) \ x + c]x + d\} \ x$$

etc.

Metoda expusă capătă la Li E denumirea de metoda elementului ceresc *tian-iuan-şu*; prin element ceresc *tian-iuan*, Li denumește mărimea necunoscută, iar *şu* înseamnă metodă.

Substituția $x = ky$, folosită mai întîi pentru a transforma rădăcinile ecuațiilor auxiliare într-un număr mai mic decît 10, se aplică atît pentru a reduce la unitate coeficientul termenului superior, cît și pentru a găsi rădăcinile fracționare raționale. Iată unul din exemplele lui Ciju Și-țze [36,p. 142]. Rezolvînd ecuația:

$$576\,x^4 - 2\,640\,x^3 + 1\,729\,x^2 + 3\,960\,x - 1\,695\,252 = 0$$

și găsind pe 8 ca parte întreagă a rădăcinii, Ciju face substituția $x = y + 8$, ceea ce dă:

$$576\,y^4 + 15\,792\,y^3 + 159\,553\,y^2 + 704\,392\,y - 545\,300 = 0.$$

Apoi el notează $y = \frac{z}{576}$, și obține:

$$z^4 + 15\,792\,z^3 + 91\,902\,528\,z^2 + 233\,700\,360\,192\,z -$$
$$- 104\,208\,452\,812\,800 = 0$$

iar de aici determinînd $z = 384$, găsește că $y = \frac{384}{576} = \frac{2}{3}$, și $x = 8\frac{2}{3}$.

Ulterior, F. Viète introduce din nou substituția $y = ky$.

Scriind ecuațiile în notații moderne nu ne îndepărtăm prea mult de simbolica matematicienilor chinezi din secolul al XIII-lea. Pentru exponenții termenului necunoscutei și ai termenului liber, chinezii folosesc hieroglife speciale. Semnul egalității lipsește, dar această lipsă este compensată de însăși forma de scriere. Țin Țziu-șao scrie în ordine coeficienții puterilor crescătoare ale necunoscutei începînd cu termenul liber, de sus în jos, așezîndu-i într-o coloană. Înainte vreme, termenul liber era pozitiv și cu el se egala ansamblul celorlalți termeni. Acum, el se grupează cu ceilalți termeni și se ia negativ; se subînțelege că suma algebrică a termenilor ecuației este egală cu zero. O asemenea modificare asigură unitatea operațiilor în schema lui Horner: înainte, coeficienții ecuațiilor se obțineau prin adunare, iar ter-

menul liber — prin scădere; acum, el se găsește la fel ca și toți ceilalți coeficienți.

Puterile lipsă din ecuație se înseamnă printr-un cerculeț, adică cu semnul lui zero. La dreapta coeficientului, pe lîngă prima putere, se pune hierogliful necunoscutei care determină puterile celorlalți termeni; uneori se scrie semnul termenului liber sau hieroglifele tuturor puterilor. Această scriere, în notațiile noastre, pentru ecuația:

$$-x^4 + 736\,200\,x^2 - 40\,642\,560\,000 = 0$$

ar fi avut forma:

$$\begin{array}{r} -40\,642\,560\,000 \\ 0 \\ 736\,200 \\ 0 \\ -1. \end{array}$$

Coeficienții negativi sînt tipăriți la Țin Țziu-șao în culoare neagră, iar cei pozitivi — în culoare roșie; pentru același scop, Li E barează

$244800 = \ldots$ 太

$x + 160 = \ldots$ 元

$x^2 + 680\,x + 96000 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

... 元, sau 太

$x^3 + 16\,x^2 = \ldots\ldots$ 元

$x + 2 + 4x^{-1} = \ldots$ 太 sau 元

Fig. 12. Expresii algebrice (după cartea lui Li Ian).

semnele cifrelor. Inițial, Li E așază jos termenul liber, dar în cea de-a doua carte a sa procedează la fel ca Țzin. Vom da cîteva exemple de scriere chineză din care se vede, între altele, că așezînd coeficienții de ambele părți ale termenului liber, algebriștii chinezi puteau reprezenta puterile negative ale necunoscutei. În aceste exemple, hierogliful *tai* 太 însemna termenul liber (uneori se scrie *tai și*, adică număr — deîmpărțit), iar hierogliful *iuan* 元 (adică cerul) reprezintă necunoscuta.

Forma canonică adoptată în China pentru scrierea ecuațiilor este analogă cu cea introdusă de T. Harriot și R. Descartes în secolul al XVII-lea pentru a scrie toți termenii ecuației de o parte a semnului egalității, iar de cealaltă parte să apară semnul zero. Asemănarea crește și mai mult prin faptul că Descartes și cîțiva din continuatorii lui notează prin steluțe lipsa termenilor din ecuație. Pînă la începutul secolului al XVII-lea, matematicienii europeni, urmînd tradiția greco-arabă, scriau termenii ecuațiilor cu coeficienți pozitivi de ambele părți ale semnului egalității. În China, scrierea ecuațiilor de tipul $f(x) = 0$ a stat la baza aplicării unitare a schemei lui Horner; Descartes subliniază că această scriere alcătuiește baza pentru formularea unitară a unei serii de teoreme privind însușirile ecuațiilor, ca, de pildă, regula semnelor date de el etc.

Metoda tian-iuan reprezintă una dintre cele mai mari descoperiri ale matematicienilor Chinei antice. După un secol și jumătate găsim la Djemșid-al-Kași acest procedeu aplicat la extragerea rădăcinilor de orice ordin. În Europa, un procedeu similar este propus în anul 1600 în lucrarea lui F. Viète, care nu dă totuși o schemă comodă pentru calculul coeficienților auxiliari. La începutul secolului al XIX-lea, metoda tian iuan este descoperită din nou, aproape simultan, de către P. Ruffini (1804, 1813) și U. Horner (1819), și în prezent poartă de cele mai multe ori numele ultimului.

Matematicienii chinezi au neglijat problemele generale teoretice ale teoriei ecuațiilor de grad superior. Metoda tian iuan satisfăcea pe deplin cerințele științei din China medievală. Sub raport practic și calculatoriu, ea prezintă avantaje față de rezolvarea ecuațiilor prin radicali, posibilă, de altfel, doar pentru clase particulare de ecuații algebrice. Pe de altă parte însă, de metoda tian iuan nu sînt legate probleme fundamentale, aduse la ordinea zilei de cercetările matematicienilor italieni, care descoperă rezol-

varea prin radicali a ecuațiilor de gradul al treilea și al patrulea și de studiul cărora este strîns legată dezvoltarea algebrei din Renaștere.

Să mai observăm că algebriștii chinezi, pînă în secolul al XIV-lea, se limitează la găsirea unei singure rădăcini pozitive a ecuației, adică a unei singure soluții a problemei. Despre posibilitatea mai multor soluții a ecuațiilor de gradul al doilea și mai mare dă mai tîrziu indicații U Țzin în *Clasificarea completă a metodelor matematice din opera în nouă cărți (Țziu cijan suan fa bi lei da țiuan*, 1450). Ar fi interesant dacă s-ar studia mai în amănunt această operă [38].

Sisteme neliniare de ecuații. Rezolvarea sistemelor neliniare cu patru necunoscute este unul dintre obiectele principale din opera lui Ciju Și-țze, *Oglinda de jasp a celor patru elemente*. Cele patru elemente sînt necunoscutele, laturile unui triunghi dreptunghic și încă o mărime legată de ele. Ciju le numește elementele cerului — *tian*, ale pămîntului — *di*, ale omului — *jen* și, în sfîrșit, ale obiectului — *u*; le vom nota în ordine prin x, y, z, w. Scrierea unor asemenea ecuații reflectă așezarea coeficienților pe

天元, [太 deasupra, | dedesubt] $= x$, 地元, [| la stînga, 太 la dreapta] $= y$, 人元, [太 la stînga, | la dreapta] $= z$,

物元, [| deasupra, 太 dedesubt] $= w$. 「併之」得: [| deasupra, | la stînga, 太 în centru, | la dreapta, | dedesubt] $= x + y + z + w$.

「自乘爲冪得:」 [diagramă de bețișoare de calcul: 太 în centru, înconjurat de |, ||, O] $= x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + 2xy + 2xz + 2xw + 2yz + 2yw + 2zw$.

Fig. 13

abac. Coeficienții se scriu într-un tabel dreptunghiular în centrul căruia se află termenul liber, sau, dacă acesta nu există, hieroglifful *tai* (vezi la p. 89). Coeficienții puterilor lui x se scriu sub centru, ai puterilor lui y — la stînga, ai puterilor lui z — la dreapta, iar ai puterilor w — deasupra. Produsele yx, yw, wz, xz se așază la intersecția rîndurilor respective; produsele yw și zy pentru care nu mai rămîne loc se scriu oblic față de centru. În fig. 13 se arată scrierea expresiilor $x + y + z + w$ și $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + 2xy + 2xz + 2xw + 2yz + 2yw + 2zw$.

Li E scrie ecuația:

$$2y^3 - 8y^2 - xy^2 + 28y + 6xy - x^2 - 2x = 0,$$

așa cum se vede în fig. 14.

Problemele se rezolvă prin eliminarea succesivă a necunoscutelor. Ecuațiile intermediare se reprezintă simultan pe cîteva abacuri prin părți de tabele în genul celor arătate. Să analizăm o problemă a lui Ciju Și-țze, transcrisă în simbolurile noastre, necunoscuta principală fiind mărimea $u = 2x + 2y$:

$$\begin{aligned} x - 2y + x &= 0,\\ 2x - x^2 + 4y - xy^2 + 4z + xz &= 0,\\ x^2 + y^2 - z^2 &= 0,\\ 2x + 2y - u &= 0. \end{aligned}$$

Aici $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$ și $u = 14$. A doua ecuație exprimă următoarea condiție a problemei[1]:

$$\frac{2x + 4y + 4z}{x} = x + y^2 - z.$$

II	╥III (barat oblic)	=‾III	太
O	I (barat oblic)	┬	II (barat oblic)
O	O	O	I (barat oblic)
O	O	O	O

Fig. 14

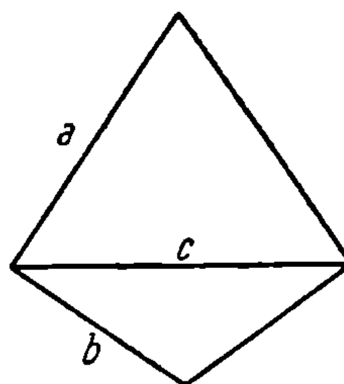


Fig. 15

[1] Situații asemănătoare întîlnim și în matematica babiloniană. Este vorba de probleme construite în scop didactic și nu de probleme concrete, luate din viața de toate zilele — *I.P.*

După cum se vede, Ciju Si-ţze nu respectă principiul omogenităţii termenilor ecuaţiei, adunînd mărimi liniare cu altele pătratice etc.

Încheind această trecere în revistă a dezvoltării algebrei în China, trebuie să subliniem unele particularităţi ale unui grup destul de mare de probleme geometrice. Pentru a se exersa în rezolvarea ecuaţiilor de grade superioare, algebriştii chinezi reduc deseori problema la o ecuaţie acolo unde n-ar fi fost nevoie, sau formează o ecuaţie mult mai complicată decît ar fi fost necesar. De pildă [28, p. 158], aria x a unui patrulater alcătuit din două triunghiuri isoscele adiacente cu baza comună, laturile fiind cunoscute (fig. 15), e determinată de Ţzin Ţziu-şao ca rădăcină a ecuaţiei:

$$-x^4 + 2(A + B)x^2 - (A - B)^2 = 0,$$

$$A = \left[a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2\right]\left(\frac{c}{2}\right)^2, \quad B = \left[b^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2\right]\left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

Dar cunoscînd A şi B se poate obţine dintr-o dată:

$$x = \sqrt{A} + \sqrt{B}.$$

Transformări preliminare foarte complicate se cer în următoarea problemă a lui Ciju Şi-ţze. Se dau: aria unui triunghi dreptunghic egală cu 30 şi suma catetelor egală cu 17. Se cere să se găsească suma dintre cateta mai mică şi ipotenuză. Noi am fi rezolvat sistemul:

$$xy = 60, \quad x + y = 17$$

şi cunoscînd $x = 5$, $y = 12$ am fi calculat $\sqrt{x^2 + y^2} = 13$, iar suma căutată ar fi fost $5 + 13 = 18$. Ciju adoptă ca necunoscută principală suma dintre catetă şi ipotenuză $v = x + \sqrt{x^2 + y^2}$, spunînd că ecuaţia finală este:

$$-3\,600 - 3\,706v - 71\,v^2 + 34\,v^3 - v^4 = 0.$$

Aici rădăcina 18 este cea căutată. Cealaltă rădăcină pozitivă 25, pe care Ciju o trece cu vederea, dă suma dintre ipotenuză şi cealaltă catetă (celelalte rădăcini —1, —8 sînt negative). După aceasta, Ciju rezolvă separat problema în care se caută suma dintre cateta mare şi ipotenuză şi ajunge din nou la aceeaşi ecuaţie. Este de mirare că el nu remarcă la ecuaţia dată existenţa a două rădăcini pozitive.

E necesară multă îndemînare în transformări algebrice pentru a ajunge la o ecuație de gradul patru[1] de mai sus.

În operele din secolul al XII-lea există și ecuații de grad mai mare decît patru. Astfel, generalizînd problema dată mai înainte în *Matematica în nouă cărți* cu privire la un oraș de formă pătrată (p. 68), care este înlocuit aici printr-un cerc, și luînd $\pi = 3$, Țin Țziu-șao exprimă necunoscuta ca rădăcină a unei ecuații de gradul zece:

$$x^{10} + 15x^8 + 72x^6 - 864x^4 - 11\,664x^2 - 34\,992 = 0,$$

care, e drept, se poate reduce imediat la o ecuație de gradul 5 În problemă se cere să se determine diametrul unui cerc, dacă (vorbind în limbaj modern) dintr-un punct dat C al tangentei în A la cercul de diametru AB se duce a doua tangentă la cerc astfel ca ea să intersecteze prelungirea diametrului AB într-un punct dat D. La Țin $AC = 9$, $BD = 3$; rădăcina x a ecuației exprimă raza cercului și este egală cu $9/2$. Nu este clar cum a ajuns Țin la ecuația lui. În orice caz, problema e ușor de exprimat (fig. 16) pe baza asemănării triunghiurilor OED și DAC printr-o ecuație de gradul patru:

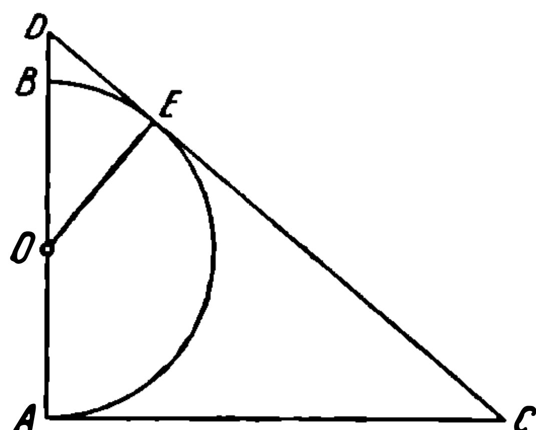


Fig. 16

$$4x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 486x - 729 = 0.$$

---

[1] De exemplu, dacă în $v = x + \sqrt{x^2 + y^2}$ se exprimă $x = \frac{v^2 - y^2}{2v}$, atunci:

$$\frac{v^2 - y^2}{2v} + y = 17; \quad \frac{v^2 - y^2}{2v} \cdot y = 60,$$

sau:

$$y^2 - 2vy + (34v - v^2) = 0, \qquad \text{(a)}$$

$$y^3 - v^2y + 120v = 0. \qquad \text{(b)}$$

Din (a)

$$y = v - \sqrt{2v^2 - 34v}.$$

Introducînd pe y în (b), reducînd cu v, izolînd radicalul și ridicîndu-l la pătrat, vom obține:

$$v^4 - 34v^3 + 71v^2 + 3\,706v + 3\,600 = 0. \text{ — N.A.}$$

Din egalitatea ariilor $\Delta DAC = \Delta OED + 2\,\Delta OAC$ se poate obține [28, p. 159] o ecuație și mai simplă de gradul al treilea:

$$2x^3 + 3x^2 = 243.$$

La Li E se întîlnește o ecuație de gradul șase, iar la Ciju Si-țze — o ecuație de gradul paisprezece.

Rezolvarea ecuațiilor de grad superior nu avea aplicații practice. Dar n-ar fi just dacă am crede că algebra se dezvoltă în afara cerințelor altor științe. După cum vom vedea mai departe, polinomele de gradul al doilea și al treilea capătă aplicații importante în formulele empirice din astronomia chineză.

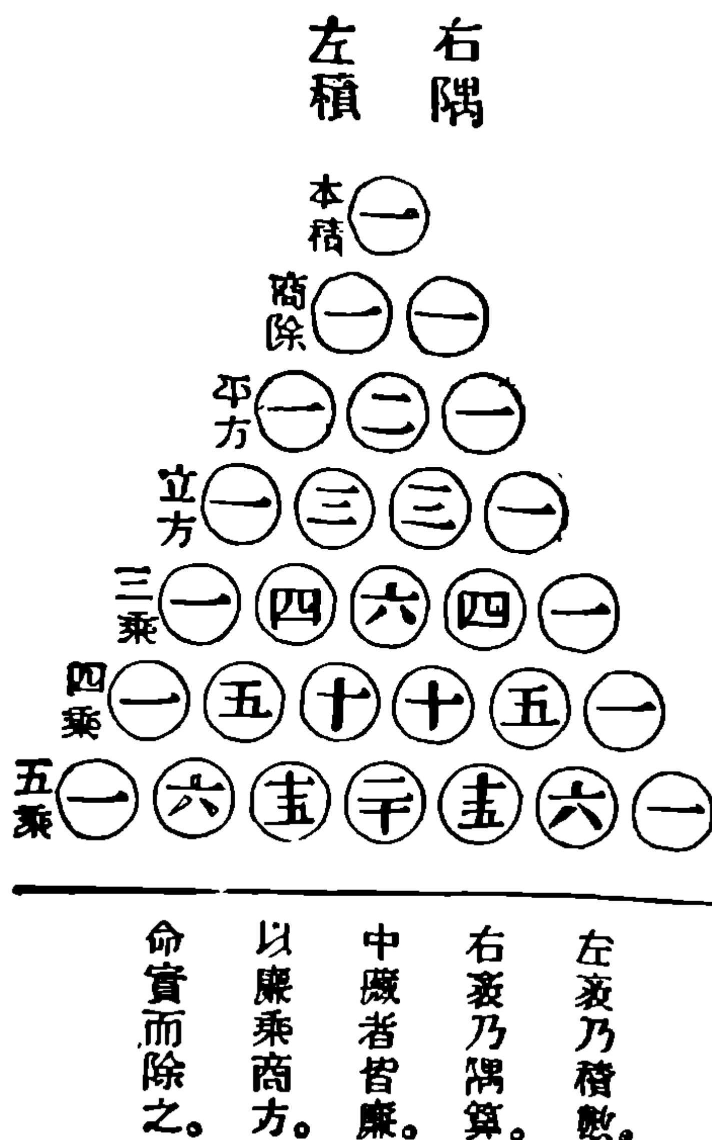


Fig. 17. Coeficienții binomiali (din enciclopedia lui Iun-le da dia din 1403—1424).

Coeficienții binomiali. În *Oglinda de jasp a celor patru elemente* a lui Ciju Si-țze se prezintă un tabel triunghiular cu numere, care nu sînt altceva decît coeficienții binomiali pînă la gradul opt (fig. 17). Ciju însuși nu pretinde că tabelul ar fi o noutate. S-a mai spus că după Ian Huei, de acest tabel se folosise (la o scară ceva mai mică, pînă la $n = 6$) și Țzia Sian în jurul anului 1200. Denumirea lucrării lui Țzia Sian (vezi p. 85) pare să spună că tabelul s-ar fi folosit la extragerea rădăcinilor.

Triunghiul coeficienților binomiali fusese cunoscut și mai înainte. Matematicienii hinduși îl cunoșteau încă din secolul al II-lea î.e.n. Dar aici el se folosise în probleme de analiză combinatorie și nu avem temei să spunem că indienii ar fi cunoscut încă din acele

vremuri dezvoltarea puterii unui binom. Pentru puterea 4, regula binomului o cunoştea matematicianul iranian al-Karadji în jurul anului 1000. Este foarte probabil că teorema binomului pentru orice exponent natural îi era cunoscută lui Ommar Khayyam care a trăit în secolele al XI-lea—al XII-lea.

Problema locului şi a timpului descoperirii formulei puterii binomului pentru orice exponent natural continuă să rămînă deschisă. După Ciju Şi-ţze, tabelul coeficienţilor pînă la indicele 9 se întîlneşte la Djemşid al-Kaşi, în Europa — la P. Apianus în anul 1527, iar la M. Stiefel — în anul 1544. Tabelul coeficienţilor binomiali capătă o largă popularitate după apariţia lucrării *Tratat despre triunghiul aritmetic* a lui B. Pascal, publicată în anul 1665; Newton în aceeaşi vreme extinde formula binomului asupra exponenţilor reali oarecare, bazîndu-se pe regula multiplicativă descoperită de el pentru formarea coeficienţilor.

Nu este exclus ca numerele binomiale să fi fost folosite de matematicienii chinezi în probleme de analiză combinatorie. Învăţatul Şen Ko din secolul al XI-lea arată că preotul budist şi astronomul I Sin, al cărui nume laic era Cijan Ghe-sui (683—727), a calculat poziţiile posibile într-un joc care aminteşte şahul, pentru diferite numere de rînduri şi figuri. Pentru cinci rînduri şi douăzeci şi cinci de figuri, I Sin găseşte că numărul de combinaţii posibile este egal cu 827 288 699 443. Pentru şapte rînduri, după Şen Ko, numerele corespunzătoare nu mai au denumiri, iar pentru 361 de rînduri, numărul va fi aproximativ de ordinul 10^{208}. Din păcate, nu cunoaştem condiţiile exacte şi procedeul de rezolvare a problemei lui I Sin, care n-a fost desigur nici primul şi nici unicul învăţat preocupat de probleme de analiză combinatorie. Toate lucrările lui I Sin s-au pierdut. E posibil ca învăţaţii budişti să fie aceia care au introdus pentru întîia oară în China coeficienţii binomiali.

Probleme de teoria numerelor. Un mic grup de probleme liniare nedeterminate există, după cum am văzut, încă în vechea *Matematică în nouă cărţi*. În aceste probleme, soluţia întreagă căutată este unică. Ulterior, învăţaţii chinezi studiază o serie de alte probleme liniare mai generale, din aşa-numita analiză diofantică.

Nu mai tîrziu de începutul secolului al III-lea apare „problema păsărilor". În secolul al VI-lea Cijan Luan scrie comentarii la o lucrare dispărută a lui Siu E, care a trăit în jurul anului 200, şi afirmă că în această carte există rezolvarea următoarei probleme: cîţi cocoşi, găini şi pui se pot cumpăra cu 100 de monede, dacă în

total sînt 100 de păsări și dacă un cocoș costă 5 monede, o găină — 4, iar 4 pui — o monedă. Cijan Luan dă unica soluție posibilă: 15 cocoși, 1 găină și 84 de pui. Într-o altă problemă cu condiția:

$$4x + 3y + \frac{z}{3} = 100,$$

Cijan Luan prezintă de asemenea o singură soluție: $x = 8$, $y = 14$, $z = 78$, deși există și o a doua soluție: $x = 16$; $y = 3$, $z = 81$.

În *Tratat de matematică* (Suan țzin), Cijan Țiu-țzian, care a trăit probabil în a doua jumătate a secolului al VI-lea, arată că pot exista cîteva soluții în numere întregi ale problemei despre păsări. Problema lui Cijan, pe care el o exprimă prin cuvinte, este:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 100, \\ 5x + 3y + \frac{1}{3}z &= 100. \end{aligned}\right\}$$

Cijan dă trei răspunsuri:

4 cocoși, 18 găini și 78 de pui,
8 cocoși, 11 găini și 81 de pui,
12 cocoși, 4 găini și 84 de pui,

observînd că numărul cocoșilor crește de fiecare dată cu patru, numărul găinilor scade cu șapte, iar numărul puilor crește cu trei. E ușor de verificat că soluțiile prezentate sînt unicele soluții pozitive întregi; afară de ele mai există una nenegativă $x = 0$, $y = 25$, $z = 75$, care i-a scăpat desigur matematicianului chinez. Soluția sistemului se poate exprima sub forma parametrică:

$$x = 4t, \quad y = 25 - 7t, \quad z = 75 + 3t,$$

în care t ia valorile întregi $0 \leqslant t \leqslant 3$.

Problema despre păsări capătă o mare răspîndire atît în China (Li Ciun-fen, în secolul al XI-lea, Se Cije-vei și alții), cît și în alte țări. Exemple numerice cu această problemă există la indianul Bhaskara (secolul al XII-lea), egipteanul Abu Kamil (secolul al X-lea), care consacră un tratat special variantelor acestei probleme (vezi p. 244), și la mulți alți învățați din țările Orientului Apropiat și Mijlociu. Analiza amănunțită a problemei a dat-o Djemșid al-Kași, și, lucru curios, la el membrul din dreapta al ecuațiilor este de asemenea egal cu 100. În Europa o problemă asemănătoare, cu același membru din dreapta, se întîlnește pentru

întîia oară în culegerea de probleme atribuită lui Alcuin (secolul al VIII-lea). Sub diferite denumiri, aceste probleme figurează apoi în aritmeticile din Europa medievală.

O altă problemă mai complicată de teoria numerelor apare în *Tratatul de matematică* (Suan țzin), scris de Sun-țzî în secolul al III-lea sau al IV-lea. Aceasta este o problemă de rezolvare a unui sistem de congruență de gradul întîi modulo n. Se cere să se găsească un număr care, împărțit prin 3, 5 și 7, să dea respectiv resturile 2, 3 și 2. Regula lui Sun-țzî glăsuiește:

„Prin împărțire cu 3, restul este 2. De aceea luați 140. Prin împărțire cu 5, restul este 3, de aceea luați 63. Prin împărțire cu 7, restul este 2, de aceea luați 30. Adunîndu-le împreună obținem 233. Din aceasta scădeți 210 și obțineți răspunsul", adică 23. „În general — spune Sun-țzî — dacă restul împărțirii cu 3 este 1, luați 70; iar dacă restul împărțirii cu 5 este 1, luați 21; dacă restul împărțirii cu 7 este 1, luați 15. Dacă suma acestor numere este mai mare decît 106, scădeți cîte 105 înainte de a căpăta răspunsul" [34, p. 32].

Se poate presupune că asemenea probleme apar în legătură cu calculele calendaristice și astronomice. În orice caz, tocmai în astfel de calcule, ele își găsesc aplicare. Rezolvarea unei serii de probleme de acest fel o expune însă astronomul amintit I Sin, autorul unui sistem special de calendar. Țin Țziu-șao, care în prima carte a operei sale (1247) a dat rezolvarea amănunțită a problemei lui Sun-țzî, spune că metoda fusese elaborată de întocmitorii calendarelor și de astronomi și prezintă o asemenea problemă. Conform calendarelor vechi, solstițiul de iarnă se repetă la fiecare $365\frac{1}{4}$ zile, luna lunară are $29\frac{499}{940}$ zile, iar ciclul „ki șa-tsu" conține 60 de zile. După cîți ani, luni sau zile, se regăsește o aceeași situație oarecare inițială?

Să dăm soluția problemei lui Sun-țzî conform lui Țin Țziu-șao, folosindu-ne de notațiile din teoria modernă a congruențelor.

Se caută rezolvarea unui sistem liniar de congruențe cu moduli primi între ei:

$$x \equiv r_1 \pmod{q_1},$$
$$x \equiv r_2 \pmod{q_2},$$
$$x \equiv r_3 \pmod{q_3}$$

(în problema lui Sun-țzî:

$$r_1 = 2,\ r_2 = 3,\ r_3 = 2,\ q_1 = 3,\ q_2 = 5,\ q_3 = 7).$$

În primul rînd, se găsesc numerele auxiliare N_1, N_2, N_3 care satisfac ecuațiile:

$$N_1q_2q_3 \equiv 1 \pmod{q_1}, \text{ adică } 35N_1 \equiv 1 \pmod 3,$$
$$N_2q_1q_3 \equiv 1 \pmod{q_2}, \text{ adică } 21N_2 \equiv 1 \pmod 5,$$
$$N_3q_1q_2 \equiv 1 \pmod{q_3}, \text{ adică } 15N_3 \equiv 1 \pmod 7.$$

Aceste congruențe se înlocuiesc prin altele mai simple, dacă în calitate de coeficienți se iau resturile provenite din împărțirea coeficienților dați, prin modulii:

$$2N_1 \equiv 1 \pmod 3,$$
$$N_2 \equiv 1 \pmod 5,$$
$$N_3 \equiv 1 \pmod 7.$$

E ușor să alegem:

$$N_1 = 2,\ N_2 = 1,\ N_3 = 1,$$

atunci:

$$N_1q_2q_3 = 70,\ N_2q_1q_2 = 21,\ N_3q_1q_2 = 15.$$

În sfîrșit, soluția căutată este:

$$x \equiv (N_1q_2q_3r_1 + N_2q_1q_3r_2 + N_3q_1q_2r_3) \pmod{q_1q_2q_3},$$

adică:

$$x \equiv (140 + 63 + 30) \bmod 105,$$

sau:

$$x = 233 - 105t,$$

unde t este un număr întreg oarecare. Valoarea minimă pozitivă 23 se obține pentru $t = 2$.

Încă I Sin extinde metoda lui Sun-țzî asupra cazului cînd modulii nu sînt primi între ei (în acest caz problema n-are totdeauna soluție). Nu ne vom opri asupra modificărilor respective ale metodei pe care le expune Țin Țziu-șao. Vom arăta doar că într-unul din exemplele lui Țin, se caută soluția sistemului:

$$x \equiv 32 \pmod{83},$$
$$x \equiv 70 \pmod{110},$$
$$x \equiv 32 \pmod{135}.$$

Calcule dificile implică și exemplele lui I Sin [40, p. 120].

Asemănător cu problema despre păsări, problema lui Sun-țzî are un istoric bogat. Cu aceleași date numerice și în alte variante,

problema aceasta o prezintă Leonardo Pisano în anul 1202 în *Cartea abacului*, iar aproximativ cu 100 de ani mai tîrziu o aflăm într-un manuscris bizantin. În secolul al XV-lea această problemă cu diferite date numerice figurează în manuscrisele aritmetice germane, iar în secolul al XVII-lea, în manuscrisele aritmetice rusești [48]. În sfîrșit, metoda veche chineză este elaborată din nou de L. Euler (publicată în 1740) și elaborată în întregime de K. Gauss în § 32—36 în vestitele lui *Studii aritmetice* din 1801. Euler și Gauss n-au știut că matematicienii chinezi se ocupaseră de această problemă cu 1 500 de ani înaintea lor. Să mai amintim că matematicienii din China, de mult timp, încă înaintea erei noastre, se ocupaseră de întocmirea așa-numitelor pătrate magice, adică de o asemenea repartizare a celor n^2 numere naturale consecutive $1, 2, 3, \ldots, n^2$ într-o rețea pătrată, în care sumele numerelor din fiecare coloană și linie să fie aceleași, adică egale cu $\frac{n}{2}(n^2+1)$. Pătratele magice s-au folosit adesea pentru speculații mistice, dar totodată au alcătuit și una din formele de distracții matematice. Ian Huei continuă și dezvoltă în anul 1275 procedeele de formare a pătratelor magice, iar apoi munca lui o continuă mulți matematicieni din China și Japonia. După cîte se pare, Teon din Smirna cunoaște cele mai simple pătrate magice, în jurul anului 130; de ele se ocupă și învățații arabi și bizantini.

Sumarea seriilor finite. Probleme cu progresii aritmetice și geometrice există în vechea *Matematică în nouă cărți* și incontestabil că ele sînt cunoscute și mai înainte. Unele probleme din *Matematica în nouă cărți*, legate de aplicarea progresiilor aritmetice, sînt destul de complicate. Vom prezenta două exemple.

În problema nr. 19 din cartea a VI-a se cere să se determine termenii progresiei aritmetice $a_1, a_2 = a_1 + d, \ldots, a_9 = a_1 + 8d$ pentru condițiile $a_7 + a_8 + a_9 = 4$, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 3$. Mersul rezolvării, care dă $a_1 \frac{39}{66}$ și $d = \frac{7}{66}$ este în parte similar cu procedeul de rezolvare a vechii probleme babiloniene, în care sînt date: $\sum_{k=1}^{10} a_k = 100$, $a_3 = 6$ și se caută $d = \frac{8}{5}$ [42, pp. 554—557].

Un elev din timpurile noastre ar fi scris mai degrabă ecuațiile:

$$3a_1 + 21d = 4,$$

$$4a_1 + 6d = 3$$

și eliminînd pe a_1 ar fi găsit $d = \frac{\frac{4}{3} - \frac{3}{4}}{7 - \frac{3}{2}}$, iar apoi pe a_1. Învățații chinezi folosesc în această problemă mediile aritmetice ale sumei termenilor. Mai întîi se formează „coeficientul inferior“ cu 4:3; acest număr se declară de-a dreptul egal cu a_8. Într-adevăr,

$$\frac{a_7 + a_8 + a_9}{3} = a_8 = \frac{4}{3}.$$

Apoi se calculează „coeficientul superior“ 3:4

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = \frac{3}{4} \left(= \frac{a_2 + a_3}{2} \right).$$

În sfîrșit, diferența $\frac{4}{3} - \frac{3}{4}$ se împarte cu diferența $9 - \left(\frac{4}{2} + \frac{3}{2} \right)$, ceea ce dă $d = \frac{7}{66}$. Probabil că cea de-a doua diferență s-a obținut din considerente de felul următor. Termenul $a_m = a_1 + (m - 1)d$ diferă de $a_k = a_1 + (k - 1)\,d$ prin d luat de $(m - 1) - (k - 1)$ ori, și de aceea a_8 diferă de $\frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2}$ prin d, luat de

$$9 - 1 - \frac{4 - 1}{2} - \frac{3 - 1}{2} = 9 - \frac{4 + 3}{2} \text{ ori}.$$

În *Matematică* nu există termeni speciali pentru progresii și mărimile legate de ele. În problema dată era vorba despre un trunchi de bambus din nouă noduri, fiecare deosebindu-se de cele vecine prin aceeași distanță.

În condiția problemei 19 din cartea a VII-a, un cal trăpaș și o gloabă pleacă dintr-un punct dat; trăpașul parcurge în prima zi 193 li, iar în fiecare zi următoare cu cîte 13 li mai mult; gloaba parcurge în prima zi 97 li, iar în fiecare zi următoare cu cîte ½ li mai puțin. După ce a parcurs 3 000 li, trăpașul se înapoiază și pe drum se întîlnește cu gloaba. Se întreabă după cîte zile s-au întîlnit cei doi cai și cît a parcurs fiecare? Problema se rezolvă după procedeul falselor poziții. În n zile întregi, trăpașul și gloaba parcurg împreună $290\,n - 6\frac{1}{4}(n^2 - n)$ li; drumul total trebuie să alcătuiască 6 000 li. Pentru $n = 15$, lipsa va fi de

$6\,000 = 5\,662\frac{1}{2} = 337\frac{1}{2}$ li, iar pentru $n = 16$ va fi un prisos de $6\,140—6\,000 = 140$ li. Admițînd că în cuprinsul fiecărei zile vitezele nu se schimbă, obținem:

$$x = \frac{15 \cdot 140 + 16 \cdot 337\frac{1}{2}}{140 + 337\frac{1}{2}} = 15\frac{135}{191} \text{ zile.}$$

Asupra folosirii formulei de sumare a progresiei aritmetice nu există nici un fel de indicații în *Matematică*. Regula sumării progresiei este certă doar la Cijan Țiu-țzian (secolul al V-lea); într-o problemă pentru găsirea rației progresiei, el folosește relația:

$$d = \frac{2\frac{S}{n} - 2a}{n - 1},$$

unde d — este rația, S — suma, a — primul termen, iar n — numărul termenilor. Cijan Țiu-țzian folosește de asemenea regula: $S = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$.

Problemele cu progresii geometrice sînt elementare în *Matematica în nouă cărți*, rația în aceste progresii este numai 2, iar formula generală de sumare nu se întîlnește. Este interesant că în unele probleme cu progresii aritmetice sau geometrice este vorba de producția unor țesătoare cu o productivitate a muncii crescătoare sau descrescătoare. Datele numerice n-au importanță practică, dar problemele în sine (ca și problemele amintite mai înainte despre cumpărarea firelor de mătase și altele) arată rolul mare pe care producția textilă o juca în economia țării.

Cunoștințe mult mai avansate în sumarea seriilor aritmetice întîlnim în secolul al XI-lea la omul de stat, inginerul, astronomul și matematicianul Șen Ko (1030—1094). În cartea 18 din *Raționamentele lui Men Și*[1] *(Men Si bi tan*, 1086) se calculează numărul de obiecte ce alcătuiesc un trunchi de piramidă cu trepte din n straturi; straturile au forma unor dreptunghiuri, ale căror laturi verticale cresc consecutiv cu o unitate. Dacă în stratul superior sînt ab obiecte, atunci se cere să se găsească suma seriei

$$S = ab + (a+1)(b+1) + \ldots + [a+(n-1)]\,[b+(n-1)]. \quad (1)$$

[1] Men Și este unul dintre numele lui Șen Ko — *N.A.*

Şen Ko, fără vreo explicaţie, prezintă regula.

$$S = \frac{n}{6} [a(2b + B) + A(2B + b) + (B - b)], \quad (2)$$

unde

$$A = a + n - 1, \quad B = b + n - 1.$$

Incontestabil că aici se află la bază regulile de sumare a progresiei aritmetice şi a seriei pătratelor numerelor naturale. Grupînd termenii în (1), avem:

$$S = nab + [1 + 2 + ... + (n - 1)] (a + b) + [1^2 + 2^2 + + ... + (n - 1)^2],$$

şi dacă se ştie că

$$1 + 2 + ... + (n - 1) = \frac{n (n - 1)}{2},$$

$$1^2 + 2^2 + ... + (n - 1)^2 = \frac{(n - 1) n (2n - 1)}{6},$$

atunci

$$S = \frac{n}{6} [6ab + 3 (n - 1) (a + b) + (n - 1) (2n - 1)];$$

de aici, deoarece $n = A - a + 1$ şi $n = B - b + 1$, se poate obţine (2). Transformările algebrice necesare nu prezentau dificultăţi pentru matematicienii chinezi din acea vreme.

Sumele pentru $\sum_{k=1}^{n} k$ şi $\sum_{k=1}^{n} k^2$ s-au putut obţine cu ajutorul unor considerente geometrice. În cartea lui Ian Huei, *Procedee*

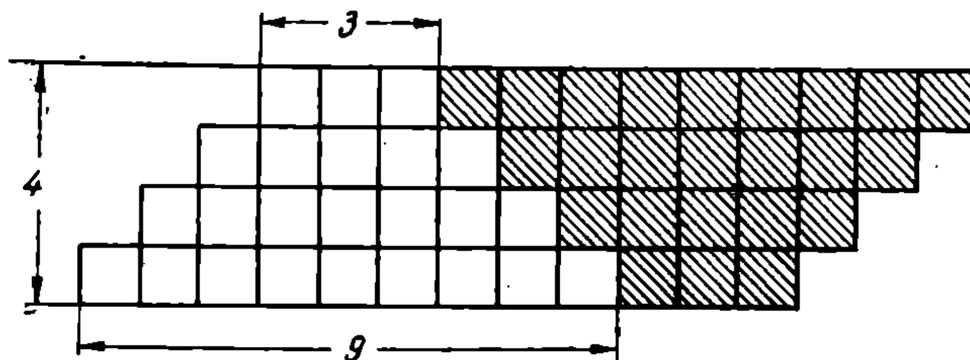


Fig. 18

rapide pentru măsurarea ogoarelor (Tian nu bi lei cen iui ţze fa anul 1275), egalitatea $3 + 5 + 7 + 9 = \frac{4}{2}(3 + 9)$ se ilustrează prin calculul suprafeţei unui paralelogram în trepte format din straturi egale (fig. 18). De altfel, suma progresiei aritmetice se

obține ușor și pur aritmetic și avem de-a face aici, poate, cu o explicație geometrică a unui fapt cunoscut. Este foarte probabil însă că șirul de pătrate a fost sumat cu ajutorul mijloacelor geometrice.

Formula de sumare $\sum_{k=1}^{n} k^2$ în *Explicația amănunțită a regulilor matematice* a lui Ian Huei (1261) are forma (pentru $n = 5$) puțin mai deosebită de cea folosită astăzi:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{3} n \ (n + 1) \left(n + \frac{1}{2}\right). \qquad (3)$$

Despre felul cum se obține, Ian Huei nu spune nimic, dar modul în care formulează el regula (3) ne dă o bază pentru o reconstrucție foarte veridică a acesteia. Să ne imaginăm seria

$$1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

sub forma unei piramide în trepte ale cărei straturi sînt alcătuite din 1, 4, 9, 12, 25 de cuburi mici așezate cum se arată în fig. 19. Dacă se așază una lîngă alta trei piramide de acest fel, după cum se arată în fig. 20, ele vor alcătui un paralelipiped din cinci straturi cu baza de $(5 + 1)\ 5$ cuburi, pe a cărui muchie superioară mai apare un strat incomplet de $1+2+3+4+5$ cuburi

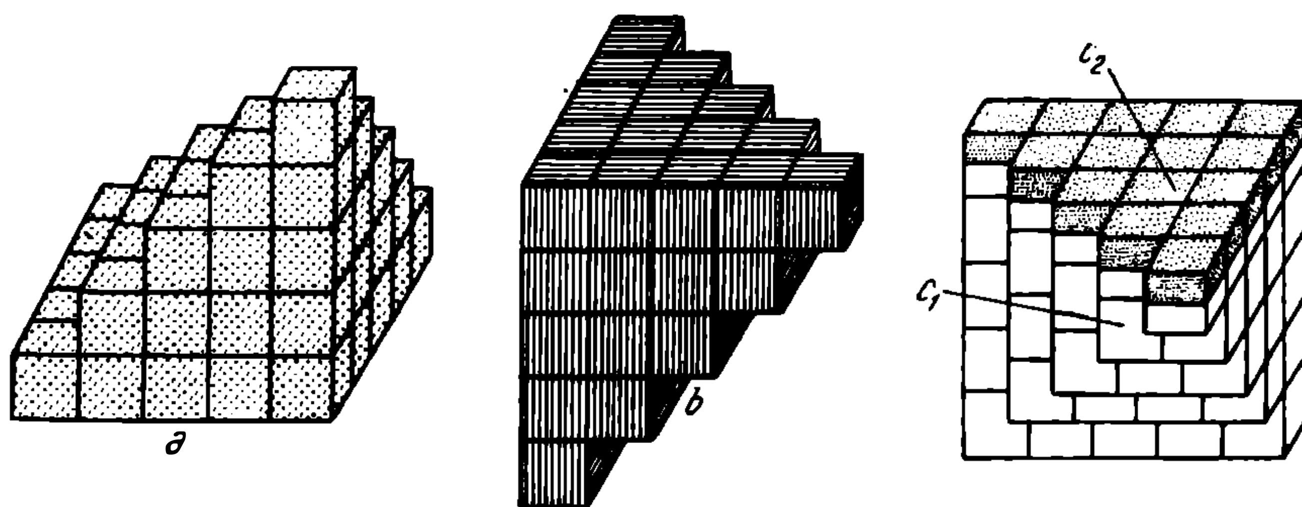


Fig. 19

(fig. 19). Tăind în două ieșindul orizontal, el se poate așeza pe muchia superioară a paralelipipedului sub forma unui strat cu înălțimea de $\frac{1}{2}$. Volumul paralelipipedului ce se obține este evident $5(5 + 1)\left(5 + \frac{1}{2}\right)$, de unde rezultă (3).

Textul aparținînd lui Ian Huei glăsuiește:

„La latura de jos adăugăm 1, înmulțim cu latura de jos și mai adăugăm $\frac{1}{2}$, aceasta este înălțimea și înmulțim cu fiecare pătrat

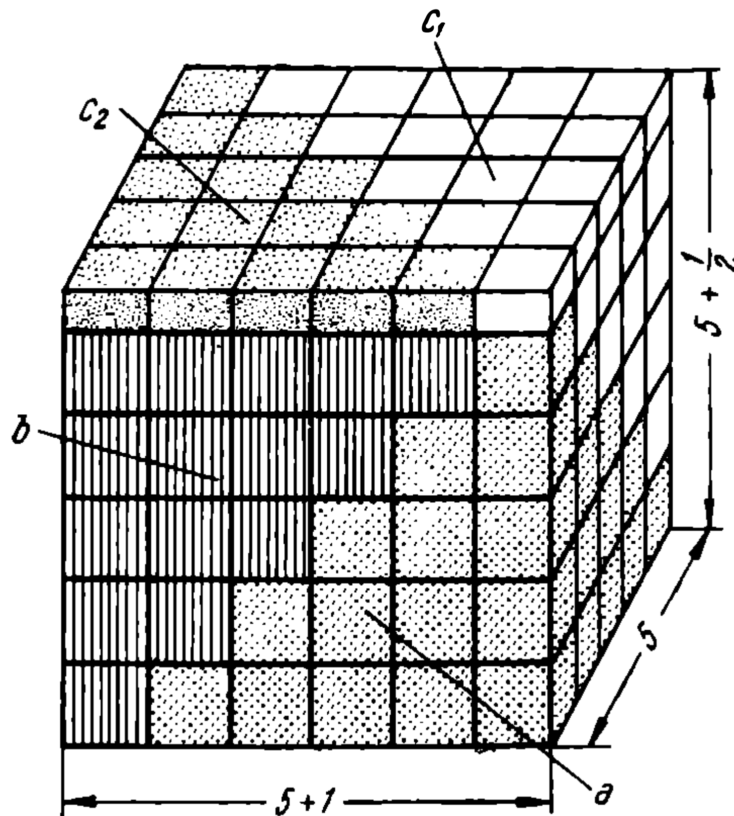


Fig. 20

(aici probabil se are în vedere suprafața bazei paralelipipedului. — *N.A.*). Acest volum să-l împărțim în trei părți și să luăm una din ele“ [49][1].

În aceeași lucrare din 1261, Ian Huei dă regula de sumare a seriei:

$$1+3+6+\ldots+\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \quad (4)$$

Aceasta este o serie de numere pe care noi, urmînd pe grecii antici, le numim triunghiulare. Ian Huei dă această regulă imediat după

---

[1] Această reconstrucție propusă nu de mult de Siui Ciun-fan [49] coincide în esență cu reconstrucția regulii antice babiloniene:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2=\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}n\right)\sum_{k=1}^{n} k,$$

dată în 1937 de S.I. Lurie [48 b, p. 193—194]. În articolul nostru [50] se dă o altă reconstrucție geometrică pentru deducerea sumei unei serii de pătrate, propusă de Siui Ciun-fan mai înainte [51]; ea este mai puțin verosimilă — *N.A.*

calculul volumului piramidei cu trei muchii, iar sumarea (4) el o tratează ca o definiție a volumului unui „corp cu trei muchii" cu straturi multiple. Reconstrucția este analogă cu cea precedentă[1].

Un număr mare de reguli de sumare se dă fără demonstrație în operele lui Ciju Și-țze [36, pp. 130—134]. Din acestea fac parte, de pildă, seriile care apar prin înmulțirea numerelor naturale, triunghiulare și pătratice cu termenii unei progresii aritmetice crescătoare sau descrescătoare:

$$\left.\begin{aligned} &1\cdot a + 2(a+d) + \ldots + n[a+(n-1)d] = \\ &\qquad = \frac{n(n+1)[2dn+(3a-2d)]}{6}, \\ &1\cdot[a+(n-1)d] + 2[a+(n-2)d] + \ldots + na = \\ &\qquad = \frac{n(n+1)[dn+(3a-d)]}{6}, \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} &1\cdot a + 3(a+d) + \ldots + \frac{n(n+1)}{2}[a+(n-1)d] = \\ &\qquad = \frac{n(n+1)(n+2)[3dn+(4a-3d)]}{24}, \\ &1\cdot[a+(n-1)d] + 3[a+(n-2)d] + \ldots + \frac{n(n+1)}{2}a = \\ &\qquad = \frac{n(n+1)(n+2)[dn+(4a-d)]}{24}, \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

$$\left.\begin{aligned} &1^2\cdot a + 2^2(a+d) + \ldots + n^2[a+(n-1)d] = \\ &= \frac{1}{3}n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)a + \frac{1}{12}(n^2-1)n(3n+2)d, \\ &1^2\cdot[a+(n-1)d] + 2^2[a+(n-2)d] + \ldots + n^2a = \\ &= \frac{1}{3}n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)a + \frac{1}{12}(n^2-1)n^2d. \end{aligned}\right| \quad (7)$$

---

[1] Din suma unei serii de numere triunghiulare este ușor de obținut suma pătratelor, adunînd membru cu membru:

$$1 + 3 + 6 + \ldots + \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2),$$

$$1 + 3 + \ldots + \frac{1}{2}(n-1)n = \frac{1}{6}(n-1)n(n+1).$$

Din punct de vedere geometric, acestei operații îi corespunde unirea a două piramide corespunzătoare în trepte, într-una singură, reprezentată în fig. 19 — *N.A.*

O altă grupă de serii o formează diferite numere geometrice: triunghiulare, piramidale, de forma $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ și altele:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)(k+2)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}, \qquad (8)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{24} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{120}, \qquad (9)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} = \frac{n(n+1)(n+1)(n+2)}{12}, \qquad (10)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2(k+1)(2k+1)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{60}\left[n\left(4n+1\frac{1}{2}\right)+\left(4n+\frac{1}{2}\right)\right] \qquad (11)$$

etc.

Calculul sumelor (5) este strîns legat de sumarea unei serii de pătrate, al sumelor (6) — de sumarea unei serii de cuburi (a cărei existență este de asemenea confirmată în matematica chineză din secolul al XIII-lea) și de (8), iar a sumelor (7) — de sumarea unei serii de cuburi. Nu știm totuși care dintre aceste sume s-au obținut mai întîi.

De sumarea seriilor aritmetice s-a ocupat cu succes și Țin Țziu-șao în opera sa din 1247.

Nu se știe cît sînt de originale rezultatele prezentate. Regula de sumare a unei serii de pătrate naturale o știau încă babilonienii. O formulă analogă pentru cazul progresiei aritmetice a dedus-o și Arhimede. Sumele $\sum_{k=1}^{n} k^2$ și $\sum_{k=1}^{n} k^3$ le cunoștea Aryabhata. Grecii antici și același Aryabhata știau să sumeze seria $\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2}$.

În secolul al IX-lea, Magavira sumează seriile de pătrate și cuburi ale termenilor unei progresii aritmetice, iar indianul Naraiana aplică în secolul al XIV-lea formule de genul lui (8) și generalizările lor sînt în studiul progresiilor aritmetice. După cîte se pare, seria lui Șen Ko se întîlnește în afara Chinei.

Interpolarea. Problemele de astronomie care au incitat interesul pentru analiza diofantică (nedeterminată) duc la nașterea și elaborarea metodelor de interpolare. În acest domeniu, matematicienii chinezi fac un pas înainte în comparație cu precursorii

lor, trecînd la interpolarea pătratică și apoi la cea cubică. Înainte de aceasta se folosise doar interpolarea liniară ca de pildă la Ptolemeu, la întocmirea tabelului coardelor (sinusurilor).

Scopul direct al procedeelor de interpolare din China era căutarea unei formule empirice care să exprime mișcarea neuniformă unghiulară vizibilă a Soarelui de-a lungul eclipticii, în funcție de timp. Calculul coeficienților formulei se face cu ajutorul unor diferențe simple sau divizate, ajungîndu-se pînă la diferențe constante în limita observațiilor[1].

După cît se știe, primele în această direcție sînt lucrările calendaristice ale astronomului și matematicianului Liu Cijo (544—610), efectuate aproximativ în anul 600. Liu Cijo ia valorile echidistante ale argumentului și face uz pentru interpolare de un trinom pătratic, folosind diferențe de ordinul întîi și doi. Formula de interpolare a lui Liu Cijo este întrebuințată de Li Ciun-fen (605—673) în anul 664 în noile lui calcule calendaristice; ea este folosită și mai tîrziu, în anul 1024, pentru calculul calendarului. Interpolarea cu ajutorul trinomului pătratic satisface multă vreme pe astronomi, dar în secolul al XIII-lea cîndcrește precizia observațiilor se mai adaugă un termen de gradul trei. Formula interpolării cubice o propune inginerul, matematicianul și astronomul Go Șou-țzin (1231—1316) de la curtea lui Cublai-han, vărul lui Hulagu-han, stăpînitorul Iranului; Go Șou-țzin elaborează în 1276 un calendar nou. La baza calculelor el pune observațiile efectuate la Observatorul din Pekin, înzestrat cu cele mai bune instrumente din acea vreme. Calendarul lui Go Șou-țzin se introduce în anul 1281 și rămîne în vigoare pînă în anul 1367. Operele lui Go nu s-au păstrat, dar calculele lui calendaristice sînt expuse în alte lucrări ajunse pînă în zilele noastre.

Formulele moderne de interpolare parabolică, în care funcția $f(x)$ cu $n+1$ valori date: $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$ se înlocuiește printr-un polinom algebric de grad n care coincide în punctele x_0, x_1, ..., x_n cu $f(x)$, au fost elaborate de matematicienii englezi J. Gregory, I. Newton și J. Stirling.

Formulele lui Liu Cijo și Go Șou-țzin reprezintă cazuri particulare pentru $n = 2$ și respectiv $n = 3$ ale formulei mult folosită în prezent și publicată de Newton în anul 1711, iar de Stirling în 1730. Să scriem în simbolurile noastre valorile argumentului funcției date și a diferențelor ei sub forma unui tabel în care fie-

---

[1] Exprimînd mai departe regulile învățaților chinezi prin formule moderne, urmăm expunerea după sursa principală accesibilă nouă [52] — *N.A.*

care diferență se obține ca o diferență algebrică a numerelor învecinate de sus și de jos din coloana din stînga:

Argumentul	Funcția	Diferențe de ordinul 1	Diferențe de ordinul 2	Diferențe de ordinul 3
$x_0 - 2h$	$f(x_0 - 2h)$			
		$\Delta_{-\frac{3}{2}}$		
$x_0 - h$	$f(x_0 - h)$		$\Delta^{(2)}_{-1}$	
		$\Delta_{-\frac{1}{2}}$		$\Delta^{(3)}_{-\frac{1}{2}}$
x_0	$f(x_0)$		$\Delta^{(2)}_{0}$	
		$\Delta_{\frac{1}{2}}$		$\Delta_{\frac{1}{2}}$
$x_0 + h$	$f(x_0 + h)$		$\Delta^{(2)}_{1}$	
		$\Delta_{\frac{3}{2}}$		
$x_0 + 2h$	$f(x_0 + 2h)$			

Atunci formula lui Newton-Stirling este:

$$f(x_0 + hx) =$$

$$= f(x_0) + x\,\frac{\Delta_{-\frac{1}{2}} + \Delta_{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{x^2}{2}\Delta^{(2)}_0 + \frac{x(x^2 - 1)}{6}\,\frac{\Delta^{(3)}_{-\frac{1}{2}} + \Delta^{(3)}_{\frac{1}{2}}}{2} + \ldots$$

Regulile verbale ale matematicienilor chinezi corespund pe deplin acestei formule, luată cu numărul cuvenit de termeni. Pentru denumirea diferitelor mărimi care intră aici, matematicienii chinezi foloseau termeni speciali.

În calculele lui calendaristice, I Sin extinde interpolarea asupra cazului argumentelor neechidistante. Așa-numitele diferențe divizate, care intervin în formula pătratică a lui I Sin, pot fi definite cu ajutorul tabelului.

Argumentul	Funcția	Diferențe descompuse de ordinul 1	Diferențe descompuse de ordinul 2
x_0	$f(x_0)$	$f(x_0, x_1)$	$f(x_0, x_1, x_2)$
x_1	$f(x_1)$	$f(x_1, x_2)$	
x_2	$f(x_2)$		

Diferențele divizate pot fi reprezentate comod sub forma:

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}, \; f(x_1, x_2) = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} + \frac{f(x_2)}{x_2 - x_1},$$

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

Formula lui I Sin este:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0, x_1, x_2);$$

sub formă generală formula aceasta a fost dată de Newton în anul 1687.

Elaborarea formulelor de interpolare este legată de particularitățile de dezvoltare ale astronomiei în China, similare într-un oarecare sens cu dezvoltarea ei în Babilonul antic. În Grecia, apoi în India și în țările Orientului Apropiat și Mijlociu, astronomii folosesc modele geometrice-cinematice, fapt care a dus la crearea aparatului corespunzător al trigonometriei. În Babilon, la fel ca și în China, calculul efemeridelor se bazează pe interpolarea numerică a rezultatelor observațiilor, fără a folosi modele pentru mișcarea aștrilor cerești.

În secolul al XI-lea, al-Biruni recomandă interpolarea pătratică a tabelelor trigonometrice, iar în secolul al XII-lea, este folosită de fapt în aceleași scopuri de către Bhaskara. Nu se știe dacă a existat sau nu vreo legătură între aceste cercetări ale învățaților din China, India și țările Islamului.

Dezvoltarea astronomiei și geografiei în a doua jumătate a secolului al XIII-lea și începutul secolului al XIV-lea se îmbină cu elaborarea trigonometriei sferice în China. Primele informații cu privire la tabelele de sinusuri apar în China încă în secolul al VII-lea dar, după cît se pare, trigonometria nu-și găsește timp îndelungat adepți în această țară. Numai Go Șou-țzin se ocupă la o scară destul de mare de analiza problemelor de trigonometrie sferică [53]. Deși procedeele lui nu sînt lipsite de originalitate, totuși cu greu ne-am putea închipui ca el să nu fi fost influențat de bogățiile acumulate în acest domeniu în țările Asiei centrale. Acest lucru este cu atît mai probabil, cu cît în anul 1267 sosește la Pekin, venind din Iran, Cija-Ma-Lu-Tin (Djamaleddin), cola-

borator la Observatorul din Maraghin, aducînd cu el o serie de aparate noi astronomice. Totuşi lucrările de trigonometrie sferică ale lui Go Şou-ţzin nu s-au mai continuat în China medievală: acest învăţat încheie şirul lung de matematicieni şi astronomi eminenţi ai Chinei medievale.

După multe secole de ridicare continuă dar lentă, începînd din mijlocul secolului al XIV-lea, în China începe o stagnare ştiinţifică de lungă durată. Reglementarea birocratică riguroasă a întregii vieţi economice şi culturale, oprirea progresului tehnic după o serie de descoperiri strălucite, anchilozarea formelor social-economice — toate acestea încătuşează dezvoltarea continuă a creaţiei ştiinţifice în domeniul ştiinţelor naturii şi al matematicii. De la sfîrşitul secolului al XVI-lea, în China încep să pătrundă descoperirile învăţaţilor europeni în domeniul trigonometriei şi algebrei, se traduce opera lui Euclid, apoi se face cunoştinţă cu logaritmii, cu seriile infinite şi altele. Totuşi, timp îndelungat, contactul cu noua ştiinţă europeană rămîne încă superficial. Numai în secolul nostru şi îndeosebi după crearea Republicii Populare Chineze a sosit timpul pentru o nouă înflorire strălucitoare a matematicii în China.

Rolul istoric al matematicii Chinei antice. Făcînd bilanţul celor spuse vedem că pînă în secolul al XIV-lea matematica se dezvoltă în China cu preponderenţă ca un ansamblu de algoritmi destinaţi pentru rezolvarea unor clase de probleme de aritmetică, algebră şi geometrie cu ajutorul abacului. Cei mai importanţi algoritmi de acest fel sînt metoda fan-cen de rezolvare a ecuaţiilor liniare şi metoda tian-iuan — de rezolvare a ecuaţiilor numerice de orice grad. Am văzut mai departe că matematicienii Chinei nu sînt doar nişte „empirici", ci aplică pe scară largă diferite transformări algebrice şi geometrice, au la dispoziţie demonstraţia cîtorva teoreme geometrice şi identităţi aritmetice, cunosc o serie de însuşiri ale principalelor figuri şi altele. Introducînd numerele negative, ei se apropie de interpretarea lor cea mai simplă. Am arătat, în sfîrşit, că ei nu se limitează la probleme ridicate direct numai de viaţa practică, ci, plecînd de la asemenea probleme, au elaborat teorii mai abstracte ale matematicii, care în acea vreme nu căpătase încă aplicaţie decît în cadrul matematicii propriu-zise. Totodată, învăţaţii Chinei se află departe de idealul matematicii creat de clasicii eleni, de construcţia deductivă a unor discipline întregi pe baza numai a cîtorva premise de dezvoltare însăşi a teoriei demonstraţiei matematice.

Matematica Chinei este una dintre componentele matematicii calculatorii a Orientului medieval. În prezent nu se poate aprecia în măsură exactă influența pe care chinezii au avut-o asupra progresului matematicii în alte țări: legăturile reciproce între China și vecinii ei nu sînt studiate nici pe departe în întregime, deoarece în lucrările străvechi lipsesc de regulă referiri la surse. Cu toate acestea, materialele existente arată în ansamblul lor că în decursul secolelor a avut loc un schimb reciproc de descoperiri ale matematicii din China, India și țările Islamului.

S-a vorbit mai sus despre răspîndirea budismului în China în primul mileniu, despre participarea directă în secolul al VII-lea a specialiștilor indieni la lucrările Biroului astronomic și despre apariția traducerilor operelor sanscrite. În secolele al XIII-lea —al XIV-lea, în Biroul astronomic chinez au lucrat învățați din Iran și Asia centrală. Pe de altă parte, la Observatorul lui Nasireddin at-Tusi din Maraghin au colaborat în secolul al XIII-lea și astronomi chinezi; chiar în operele lui at-Tusi se expune calculul anilor după sistemul chinezesc. Calendarul chinez este binecunoscut și la Observatorul lui Ulug-bek (secolul al XV-lea), din Samarkand. Contactul personal între astronomii diferitelor țări este însoțit în mod inevitabil de un schimb de cunoștințe matematice.

Despre legăturile dintre matematica Chinei și matematica altor țări vorbește și succesiunea multor descoperiri. Cu greu s-ar putea crede că este întîmplător faptul că numerele negative, regulile de extragere a rădăcinii pătrate și cubice, problemele despre trunchiul de bambus, o demonstrație asemănătoare cu cea chineză a teoremei lui Pitagora se întîlnesc în matematica Indiei cu cîteva secole mai tîrziu decît în matematica Chinei. De asemenea, e greu de presupus că este o simplă coincidență aplicarea în Asia centrală a regulii celor două false poziții sau a metodei lui Horner pentru extragerea rădăcinilor de un indice oarecare și folosirea fracțiilor zecimale — după ce toate acestea fuseseră elaborate în China. Tot ce s-a spus se referă în egală măsură și la problemele de analiză nedeterminată, prezentate mai sus.

În evul mediu au fost deosebit de strînse legăturile între China, Coreea și Japonia. Încă în anul 554, în Japonia pătrunde calendarul chinez, iar de la începutul secolului al VIII-lea, în școlile japoneze se introduce sistemul chinez de predare a matematicii. Am mai amintit că mai tîrziu, în secolul al XVII-lea, învățatul japonez Seki Kowa, plecînd de la lucrările chinezești de algebră,

ajunge la crearea unei metode de rezolvare a ecuațiilor liniare, care în esență coincide cu metoda determinanților. Traducerile cărților chineze au stat de asemenea la baza educației matematice în Coreea.

Foarte puține din lucrările matematicienilor chinezi au devenit cunoscute la timp în afara granițelor Chinei. Dar, în ansamblu, cercetările matematice ale învățaților Chinei au pătruns în curentul general al matematicii calculatorii din Orientul medieval. Este incontestabil că cercetările viitoare istorico-matematice vor preciza și vor extinde fără îndoială cu mult cunoștințele noastre în această problemă.

MATEMATICA ÎN INDIA

Generalități. Cercetările arheologice arată că la mijlocul celui de-al treilea mileniu înaintea erei noastre, în valea rîului Ind a existat un stat sclavagist cu o cultură situată la o treaptă înaltă de dezvoltare. În apropierea colinelor Mohendjo-Daro se afla un oraș mare cu un plan bine conceput; alte orașe fuseseră construite după un plan similar. Pe obiecte de uz casnic și pe sigilii s-au găsit inscripții pictografice, aproape cu totul nedescifrate încă pînă în prezent. Nu s-au descoperit însă monumente ale matematicii. În mod indirect, după rămășițele clădirilor publice, sistemele de canale de irigație și de evacuare a apei, ornamentația ceramicii, după sculptură, după o riglă cu diviziune zecimală confecționată dintr-o scoică, se poate conchide că unul din elementele acestei culturi fusese și un oarecare bagaj de cunoștințe matematice. Aproximativ la mijlocul celui de-al doilea mileniu Mohendjo-Daro este părăsit. În această epocă în India pătrund noi triburi ariene, care în parte distrug, în parte supun populația băștinașă. Limba noilor veniți este sanscrita.

La începutul primului mileniu, ocupația de bază a indienilor este agricultura, care are nevoie de irigarea artificială a ogoarelor. Apar state relativ mari, lipsite totuși de o unitate economică stabilă, sfîșiate de războaie externe și contradicții interne și care în cele din urmă n-au o viață lungă. În interiorul statelor se duce lupta pentru stăpînire între membrii tagmelor conducătoare — varne: soldații — kșatri și preoții cultului — brahmani. Se produc răscoale ale tagmelor vaișia — membri liberi ai comunităților sătești, negustori și șudri — membri fără drepturi depline ai comunităților, meseriași, slugi. Varnele se împart în caste — djatii, care reunesc oamenii de aceeași profesiune, deseori moștenită. Pe o treaptă inferioară șudrilor se află robii. Nemulțumirea păturilor exploatate ale populației capătă expresie în noua religie

— budismul, ce apare în jurul secolului al V-lea î.e.n. și atrage un mare număr de adepți, iar cu timpul se răspîndește și în alte țări. Aproximativ către secolele al VII-lea — al V-lea î.e.n. apar primele mărturii scrise cu privire la matematica din India.

În jurul secolului al IV-lea î.e.n. și poate ceva mai devreme se stabilesc legăturile cu Asiria și Babilonul. La sfîrșitul secolului al VI-lea î.e.n. regele persan Darius Histaspe cucerește o parte din Pendjab și organizează o nouă satrapie, a cărei graniță răsăriteană devine rîul Ind. După 200 de ani, în anii 327—325 e.n., Alexandru Macedon pătrunde și mai departe decît perșii. Expedițiile lui Alexandru și crearea după moartea lui a monarhiei Seleucizilor, în care intra Siria, Mesopotamia, Iranul, o parte din Asia centrală și India, duc la o întărire considerabilă a contactului cu cultura țărilor mediteraneene.

Aproape simultan cu monarhia Seleucizilor, în bazinul Indului și valea Gangelui apare un nou imperiu puternic, al Maoriilor, întemeiat de către Chandragupta (322—298). Ca urmare a avîntului mișcării naționale, Seleuc I Nicator intră în război cu Chandragupta, dar fiind respins stabilește cu el relații prietenești. Nepotul lui Chandragupta, Așoka (273—232), cucerește întreaga Indie de nord și o parte mare din India de sud. După cîțiva zeci de ani de înflorire se produce totuși o descompunere rapidă a statului Maoriilor.

La mijlocul secolului al III-lea î.e.n. din statul Seleucizilor se separă statul Greco-bactrian situat pe teritoriul unei părți din Asia centrală, Afganistan, Cașmir și valea Indului. El durează ceva mai mult de 100 de ani, dar lasă o urmă vizibilă în dezvoltarea culturii Indiei.

În secolul I î.e.n. teritorii vaste din Asia centrală și India nord-vestică sînt cucerite de sciții saka. Noul stat al kușanilor capătă denumirea de la numele unui trib al sciților. Kușanii stabilesc legături comerciale cu Imperiul Roman și cu China. În anul 99, o solie a regelui Kanișka (78—123) vizitează Roma. În această perioadă pătrunde probabil budismul în China.

Cultura hindusă atinge un nivel înalt în secolele al IV-lea — al V-lea în regatul Gupt, apărut în India de nord și centrală și descris de călătorul chinez Fa Sian, care parcurge întreaga țară pînă la Ceylon în anii 399—414. În această epocă se situează multe realizări importante ale științei. Atunci se scriu lucrările de astronomie și matematică *Siddhantî*. În jurul anului 500 lucrează Aryabhata, născut în apropierea marelui oraș al țării Pataliputra (Patna) și Varaha-Mihira, originar din împrejurimile

unui alt mare centru cultural Uddjain din India centrală. Ceva mai tîrziu, în prima jumătate a secolului al VII-lea, la Uddjain lucrează Brahmagupta. De această perioadă ține definitivarea în India a sistemului zecimal pozițional de scriere a numerelor.

Secolele al VI-lea — al VII-lea sînt marcate de statornicirea feudalismului în forme specifice, caracteristice pentru India. Împărțirea în caste capătă o nouă dezvoltare, fiind consolidată prin dogme și obiceiuri religioase. Pe treapta inferioară se află numeroase grupuri de „intangibili" — paria. Situația grea a castelor inferioare contribuie la răspîndirea islamismului, devenit religie oficială în țările învecinate din Asia centrală.

Legăturile cu țările Islamului au avut o mare importanță pentru progresul continuu al științei. În secolele al VII-lea — al VIII-lea, lucrările indiene de astronomie și matematică devin cunoscute în califatul arab. Tot atunci, învățații indieni lucrează cu succes și în China — după cum s-a arătat în cap. I.

Statele slabe din India nu se pot opune presiunii unor noi cuceritori. În secolul al VI-lea pe o parte din teritoriul Indiei apare pentru scurt timp statul hunilor. În prima jumătate a secolului al VII-lea, statul vremelnic Kanaudj din valea Gangelui duce un război greu cu China. În secolul al VIII-lea valea inferioară a Indului cade sub puterea conducătorilor militari arabi. Odată cu secolul al XI-lea, încep incursiunile sultanilor din statul Gazna, situat la granițele nord-vestice ale Indiei. În anul 1206 se creează sultanatul de la Delhi care timp de 100 de ani stăpînește aproape întreaga Indie, afară de regiunile ei sudice. Dar de la mijlocul secolului al XIV-lea, sultanatul se descompune și dispare în anul 1398 sub loviturile zdrobitoare ale expediției lui Timur.

În asemenea condiții complexe continuă dezvoltarea matematicii mereu strîns legată de astronomie. Dintre marii învățați ai acelor vremuri cităm pe Magavira din orașul sud-indian Maisor (secolul al IX-lea), Sridhara (secolul al XI-lea), Bhaskara (secolul al XII-lea), Naraiana (secolul al XIV-lea).

În cursul secolelor al XIV-lea — al XV-lea, se fac cercetări științifice încununate de succes în statele din sud, îndeosebi în Vidjaianagara, a cărei descriere ne-a lăsat-o călătorul rus Afanasii Nikitin, care vizitează această țară în anii 1469—1472. În jurul anului 1500, la sfîrșitul perioadei pe care o analizăm, în sudul Indiei lucrează eminentul matematician Nilakanta.

Cele mai importante opere de matematică. Din timpuri străvechi, matematica s-a bucurat de un mare respect în India. Con-

form legendelor, Gautama, adică Buda, de la vîrsta de 8 ani începe să învețe scrierea, iar apoi aritmetica, acestea fiind cele mai importante științe din acele vremuri. În secolul al IX-lea Magavira înalță un adevărat panegiric al matematicii: „Calculul este util în toate lucrările legate de treburile lumești, de vede sau de alte treburi asemănătoare religioase. Știința calculului este prețuită mult în știința dragostei, în știința bogăției, în muzică și dramă, în arta culinară, în medicină, în arhitectură, în prosodie, poetică și poezie, în logică și gramatică și în alte lucruri... Ea este legată de mișcările Soarelui și altor aștri, de eclipse și conjuncțiile planetelor și de direcția, poziția, timpul, precum și de mersul Lunii. Numărul, diametrele și perimetrele insulelor, al oceanelor și al munților, dimensiunile mari ale centrelor populate și ale clădirilor locuitorilor lumii, ale spațiilor dintre lumi, lumea lumii, lumile zeilor și ale locuitorilor iadului și alte măsurători posibile, toate acestea se fac cu ajutorul matematicii“ [54,p.5].

Această tiradă amintește oarecum „lauda aritmeticii“ din prefețele la operele de aritmetică ale autorilor europeni din evul mediu tîrziu.

Informațiile cele mai timpurii despre matematica din India țin de epoca compunerii cărților sfinte religioase și filozofice: *Cunoștințe — Vede (veda* în limba sanscrită înseamnă cunoștință; compară cu verbul din limba rusă *vedat)*. Ca sursă prețioasă servesc *Regulile funiei (Suliva-sutra)*, care conțin construcții geometrice și rezultatele cîtorva calcule. *Regulile funiei* au ajuns pînă la noi în trei redactări: cea mai veche — a lui Baudhaiana, și altele două mai tîrzii — ale lui Apastamba și Katiaiana [58]. Oamenii de știință au păreri diferite în ce privește determinarea timpului cînd au fost scrise *Regulile funiei*. Unii presupun că aceste cărți s-ar fi scris în secolele al XV-lea — al XVII-lea î.e.n., alții — între secolele al VIII-lea î.e.n. și al III-lea e.n. Majoritatea înclină spre acceptarea intervalului secolelor al VII-lea — al V-lea î.e.n.

Lăsînd la o parte *Regulile funiei*, cele mai importante opere cunoscute de matematică ale indienilor s-au scris între secolele al V-lea — al XIV-lea. În cea mai mare parte ele sînt capitole de matematică ale unor cărți de astronomie. Sînt scrise în limba sanscrită, limba religiei și a științei hinduse, după cum limba arabă a fost în țările musulmane, iar latina — în Europa occidentală medievală. Expunerea în lucrările indiene de matematică este foarte concisă și deseori nu conține demonstrații. Laconismul regulilor ajunge uneori la limită ca și în literatura chineză și un citi-

tor neinițiat nu le poate înțelege fără lămuriri suplimentare. Acest lucru este în parte condiționat de faptul că o serie de cărți sînt scrise în versuri: regulile formulate în strofe scurte se învață pe de rost. În majoritatea cazurilor, predarea, ca pretutindeni în evul mediu, are un caracter dogmatic și se bazează mai mult pe memorie decît pe rațiune.

Sursele principale din care ne luăm informațiile despre matematica indiană sînt următoarele:

1. Opera anonimă de astronomie din secolul al IV-lea sau al V-lea *Suria siddhanta* — *Știința Soarelui* — nu în sensul științei despre Soare, ci ca știință comunicată de Soare unui anume demon [59]. Afară de *Știința Soarelui* se mai cunosc alte patru opere similare — siddhanta. Una dintre aceste *siddhanta* se numește *Știința lui Pulisa (Pulisî siddhanta)*. Această operă s-a pierdut, dar despre conținutul ei avem informații din *Cinci siddhanta (Pancea siddhantica)* a lui Varaha-Mihira care, în jurul anului 505, expune și comentează toate cele cinci *siddhanta* [60]. Judecînd după informația dată de al-Biruni, care studiase în amănunt literatura științifică hindusă în prima jumătate a secolului al XI-lea, Pulisa fusese astrologul Paulos din Alexandria care trăise în secolul al IV-lea. În *Siddhantale* se vede clar că întocmitorii lor cunosc atît astronomia elenistică, cît și procedeele astronomilor babilonieni din epoca Seleucizilor.

2. Tratatul de astronomie și matematică *Aryabhatiam* în versuri, întocmit în anul 499 de Aryabhata, pe atunci în vîrstă de numai 24 de ani. În cele 33 de strofe din partea a doua a cărții *Aryabhatiam* se dau regulile de rezolvare a unor probleme de aritmetică, geometrie și trigonometrie, devenite obiect de comentarii și dezvoltare ulterioară pînă în secolul al XVI-lea. Alături de procedee foarte fine, ca de pildă rezolvarea în numere întregi a ecuației nedeterminate

$$ax + by = c$$

aici se dau și procedee extrem de simple, ca de pildă regula de trei. Împreună cu o aproximare bună pentru calculul lungimii circumferinței și a ariei cercului, în care $\pi = \frac{62\,832}{20\,000} = 3{,}1416$ există și o expresie foarte grosieră pentru volumul sferei, care se ia egal cu produsul între aria cercului mare și rădăcina ei pătrată, ceea ce corespunde la o valoare $\pi = \frac{16}{9} \cong 1{,}78$.

3. *Știința perfecționată a lui Brahma (Brahma sphuta siddhanta)*, întocmită în jurul anului 628 de Brahmagupta (născut în anul 598) [62]. Această operă, scrisă de asemenea în versuri, se apropie în parte de *Aryabhatiam*, dar este mult mai bogată în conținut. Pentru matematică se consacră două din cele douăzeci de cărți. Cartea a 12-a se consacră aritmeticii, iar a 18-a — algebrei. De altfel, o asemenea împărțire nu este pe deplin exactă. În cartea a 12-a, odată cu descrierea operațiilor aritmetice și a regulilor de rezolvare a problemelor se prezintă și procedeele pentru calculul dimensiunilor, precum și însușirile cîtorva figuri plane, în particular, patrulatere înscrise în cerc. În cartea a 18-a se analizează atît ecuații determinate, cît și nedeterminate de gradul întîi și al doilea.

4. *Curs scurt de aritmetică (Ganita-sara-sangraha)* al lui Magavira (în jurul anului 850) [63]. Magavira înseamnă „om mare" (compară cu *Magnus virus* din limba latină).

5. Un manuscris anonim de aritmetică și algebră descoperit în pămînt, în anul 1881, în apropierea localității Bahșali în India de nord-vest. Nu se cunoaște timpul exact al redactării acestui manuscris. Majoritatea specialiștilor îl datează în secolele al VI-lea — al VIII-lea [64].

6. *Curs de aritmetică (Ganita-sara)* al lui Sriddhara, care trăiește în prima jumătate a secolului al XI-lea. Această carte se mai numește *Trisatika*, deoarece inițial fusese alcătuită din 300 de strofe [65].

7. *Cununa științei (Siddhanta-siromani)* a lui Bhaskara al doilea (născut în 1114, decedat după 1178) [62]. Această lucrare, scrisă în jurul anului 1150, din punct de vedere istoric și al calităților ei, este într-adevăr o cunună a matematicii indiene. Este scrisă în cea mai mare parte în proză. Conține patru părți. Prima — *Lilavati* — conține îndeosebi aritmetică; cuvîntul *Lilavati*, adică „frumoasa", se referă fie la fiica învățatului, fie la matematica însăși. Partea a doua, *Bidjaganita* (calculul rădăcinilor), conține algebră, iar celelalte părți sînt de astronomie.

Lucrarea lui Bhaskara este strîns legată de operele precedente. Bhaskara se referă îndeosebi la Brahmagupta și Sriddhara. În *Cununa științei*, problemele practice se împletesc cu cele abstracte. Vom prezenta pe scurt conținutul capitolelor de matematică din această operă.

Lilavati este împărțită în 13 capitole. În capitolul I se dau tabele metrologice. În capitolul următor se descriu operațiile cu numere întregi și fracționare, inclusiv extragerea rădăcinilor

pătrate și cubice. În capitolul al III-lea se prezintă rezolvarea unor probleme de aritmetică prin procedeul inversiunii, prin regula falsei poziții și alte procedee. În capitolul al IV-lea găsim probleme despre bazine, împrumutate probabil de la greci sau chinezi, precum și probleme despre amestecuri; în capitolul al V-lea însumarea cîtorva serii aritmetice. Problemele de planimetrie sînt concentrate în capitolul al VI-lea. Afară de măsurarea figurilor plane, aici mai apar probleme despre trunchiul de bambus și stuful frînt, întîlnite în operele chineze (p. 70), și alte probleme de calcul al laturilor triunghiurilor dreptunghice care se reduc la ecuații liniare. Capitolele al VII-lea — al IX-lea sînt consacrate de asemenea geometriei, în special măsurării volumelor. Problemele așa-numitei analize diofantice schițate în fugă în capitolul al XII-lea, se analizează mai amănunțit în capitolul de algebră. În sfîrșit, în ultimul capitol se prezintă o serie de probleme de analiză combinatorie.

Bidjaganita, alcătuită din opt capitole, învățătura despre ecuațiile algebrice de gradul unu și al doilea este expusă ca și la Brahmagupta cu ajutorul unor simboluri destul de dezvoltate. În capitolul I se formulează regulile operațiilor asupra numerelor pozitive și negative, în capitolele al II-lea și al III-lea — regulile de rezolvare în numere întregi a ecuațiilor nedeterminate de gradul întîi și al doilea. Apoi urmează rezolvarea problemelor cu ecuații liniare cu una și mai multe necunoscute (cap. IV) și cu ecuații de gradul al doilea (cap. V); tot aici, se analizează unele probleme de geometrie și se dau două demonstrații pentru teorema lui Pitagora. În capitolul al VI-lea sînt adunate diferite probleme determinate și nedeterminate cu ecuații liniare cu mai multe necunoscute. În capitolele al VII-lea — al VIII-lea se analizează suplimentar ecuații nedeterminate de gradul al doilea.

Cununa științei a lui Bhaskara capătă o mare popularitate în China. Nepotul său, Kangadeva, întemeiază la începutul secolului al XIII-lea o școală specială pentru studiul acestei cărți, iar de tălmăcirea ei se ocupă mulți matematicieni timp de peste patru secole; o serie de comentarii, ca, de pildă, ale lui Ganeşa (1545) sau Krişna (în jurul anului 1600), prezintă un mare interes istoric.

Am citat aici numai operele cele mai proeminente și autorii lor. În cele ce urmează vom întîlni și alte nume, precum: Bhaskara I, elev al lui Aryabhata, cu un manuscris nepublicat de matematică (522); Aryabhata al II-lea, care a trăit la mijlocul secolului al X-lea; Naraiana de la care ne-a parvenit, dar incomplet, manuscrisul *Bidjaganita*, redactat la mijlocul secolului al XIV-lea și altele.

Matematica în cărţile Regulile funiei. O parte însemnată din cărţile despre *Regulile funiei* o ocupă regulile de construcţie a altarelor pentru care se folosesc frînghii şi prăjini de bambus. Elementele matematice din *Regulile funiei* au un caracter disparat, dar şi ele demonstrează că matematicienii indieni aveau cunoştinţe bogate în perioada de întocmire a acestor cărţi [66,67,68].

Construirea altarelor este supusă unei serii de prescripţii riguroase. Altarele se orientează după punctele cardinale. La temelia lor se află figuri stabilite cu precizie, ca de pildă trapeze isoscele, cu laturile într-un raport dat. Între temeliile altarelor se respectă rapoarte de două feluri: fie că temeliile sînt asemenea ca de pildă pătrate, iar ariile lor sînt în rapoarte, definite de numerele întregi: 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6, fie că temeliile altarelor sînt de diferite forme poligonale, dar egale ca arii.

Problemele corespunzătoare de geometrie sînt: construirea unghiului drept, a pătratului, a triunghiurilor dreptunghice (laturile avînd valori întregi), formarea unor trapeze din aceste triunghiuri, transformarea pătratului de arie a într-un pătrat de arie na, transformarea unui dreptunghi într-un pătrat echivalent etc. Un loc important îl ocupă teorema lui Pitagora.

Întocmitorii *Regulilor funiei* folosesc cinci triunghiuri dreptunghice cu următoarele laturi întregi:

3	4	5
5	12	13
8	15	17
7	24	25
12	35	37

şi altele asemenea lor. Din astfel de triunghiuri se formează trapeze isoscele, după cum se vede din fig. 21. Funiile divizate în părţi corespunzătoare pot servi pentru construirea unghiului drept.

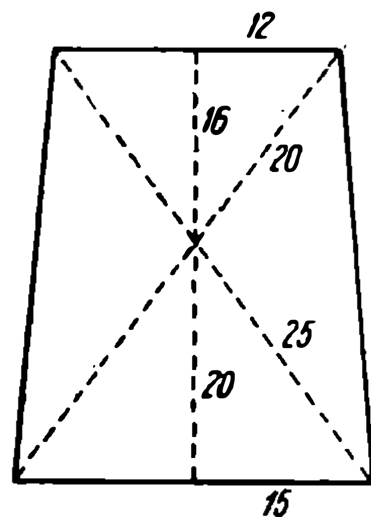


Fig. 21. Trapez isoscel format din triunghiuri dreptunghice cu laturi ce au valoarea unor numere întregi.

Pentru împărţirea unui segment în două părţi egale, se duc de la capetele lui arce de cerc de rază egală cu segmentul dat, iar punctele de intersecţie ale circumferinţelor se unesc printr-o dreaptă care este perpendiculară pe segment în mijlocul său. Această metodă se foloseşte pentru construirea unui pătrat cu latura dată

egală cu $2a$. La început, se descrie un cerc de rază a și se duce diametrul WE (fig. 22). Din centru se ridică o perpendiculară pe diametru, care intersectează cercul în punctele S și N. În sfîrșit, din punctele S, E, N și W, se descriu cercuri de rază a, care se intersectează în punctele A, B, C, D, adică în vîrfurile pătratului căutat.

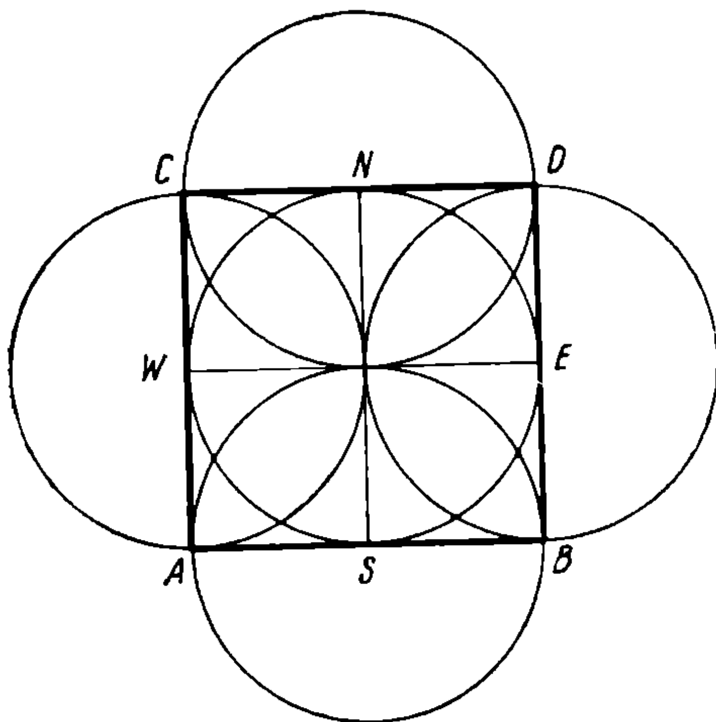


Fig. 22

Cu ajutorul teoremei lui Pitagora se dublează, se triplează etc. un pătrat dat. Dublarea pătratului necesită doar construirea unui pătrat pe diagonala lui (fig. 23).

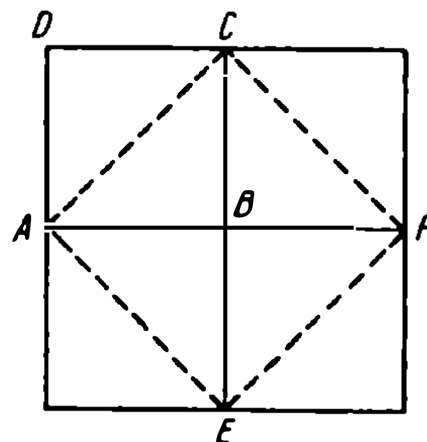


Fig. 23

$$\text{aria } AEFC = 2 \cdot \text{aria } ABCD.$$

În rest e suficient să se cunoască construcția unui pătrat echivalent cu suma ariilor a două pătrate neegale $a^2 + b^2$. Regula lui Apastamba spune: „Adunarea a două pătrate de măsură diferită: se taie cu latura celui mai mic o fîșie pe cel mare. Funia [așezată] oblic peste această fîșie leagă amîndouă [pătratele] [67, p. 194]. Sensul regulii rezultă clar din fig. 24, unde:

$$AB^2 = a^2 + b^2.$$

În *Regulile funiei* se spune de asemenea cum se găsește latura unui pătrat egal cu diferența a două pătrate date $b^2 - a^2$. Pentru aceasta, din punctul A (fig. 24), cu o rază egală cu latura pătratului mare, se poartă pe baza lui inferioară segmentul CD:

$$CD^2 = b^2 - a^2.$$

Teorema lui Pitagora se aplică și la transformarea unui dreptunghi dat într-un pătrat. Într-un dreptunghi cu laturile date $AB = a$, $AD = b$ (fig. 25) se separă pătratul $ABFE = a^2$; restul $EFCD$ se împarte prin dreapta HG în jumătate, iar pe BF se

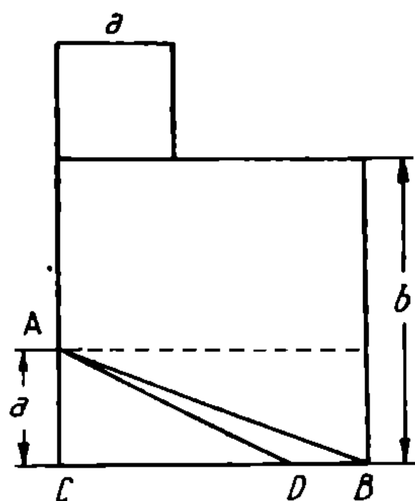


Fig. 24

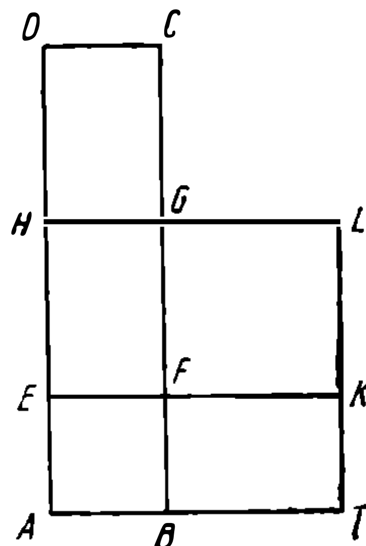


Fig. 25

construiește dreptunghiul $BIKF$, egal cu $EFGH$. Prin aceasta, dreptunghiul $ABCD$ se transformă în gnomonul $AIKFGHA$, egal cu diferența celor două pătrate date $AILH$ și $FKLG$ și totul se reduce la construcția anterioară. Algebric relația se prezintă astfel:

$$\left(\frac{b+a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = ab.$$

Să observăm că această construcție este diferită de cea folosită de Euclid. În propoziția 14 din cartea a II-a din *Elemente*, Euclid construiește pe segmentul AB, egal cu suma laturilor dreptunghiului AC și CE, un semicerc, iar mai departe (fig. 26) se bazează pe propoziția 5 din aceeași carte, conform căreia:

$$AC \cdot CB + OC^2 = OB^2,$$

astfel încît:

$$CD^2 = OD^2 - OC^2 = AC \cdot CB = AC \cdot CE.$$

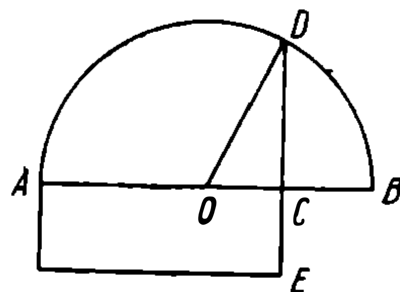


Fig. 26

De altfel, chiar în demonstrația propoziției 5 se folosește un gnomon.

Dacă în construcția pătratului egal cu suma a două pătrate neegale se duc segmente auxiliare, după cum se arată în fig. 27, se

obține o figură care exprimă ilustrativ teorema lui Pitagora. Pătratul de pe ipotenuză este alcătuit din suprafețele S, III, IV și s, suma pătratelor de pe catete — din suprafețele S, I, II, s, iar triunghiurile I, II, III, IV sînt egale între ele. Acest fapt a dat temei să se presupună că matematicienii indieni au ajuns la teorema lui Pitagora plecînd de la o construcție similară [67]. Poate că tocmai astfel s-a și obținut în India prima demonstrație a teoremei generale descoperită la început pentru cazuri particulare, pentru triunghiuri cu laturi întregi. Dar poate că în arhitectură se aplică mijloace matematice descoperite anterior sau obținute de la alte popoare. Să observăm totodată asemănarea între problema dublării pătratului și problema greacă de duplicare a cubului, care, conform legendei, este de asemenea legată de construcția altarelor. Oare avem de-a face aici cu o coincidență sau cu o legătură reciprocă?

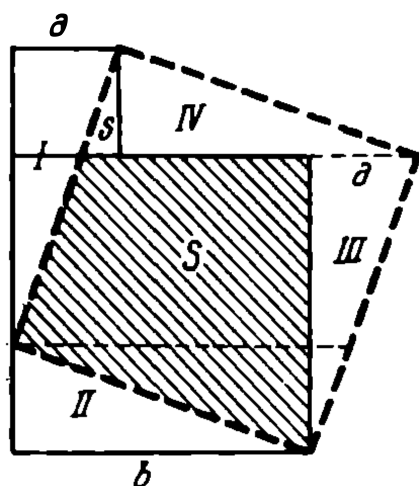


Fig. 27

Mai tîrziu, Bhaskara al II-lea prezintă o demonstrație a teoremei lui Pitagora bazată pe o altă împărțire a ariei pătratului de pe ipotenuză, cunoscută mai înainte și în China (vezi p. 82). Învățatul indian nu explică desenul (fig. 28), ci se limitează doar la un singur cuvînt: „privește!“. Bhaskara mai are și o altă demonstrație a teoremei lui Pitagora, bazată pe împărțirea unui triunghi dreptunghic prin înălțime, în două triunghiuri asemenea cu primul, și pe folosirea proporțiilor: această demonstrație este propusă din nou de Leonardo Pisano (anul 1220), iar în secolul al XVIII-lea de J. Wallis. În esență, ea există și la Euclid [33 a, VI, propoziția 8 și 31].

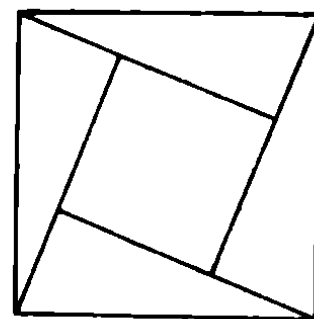


Fig. 28

Determinarea triunghiurilor dreptunghice cu laturi întregi îi preocupă și mai tîrziu pe învățații indieni. Brahmagupta și Magavira dau regulile corespunzătoare, folosite înainte vreme în China (vezi p. 70) și Grecia. Merită atenție faptul că în India această problemă este strîns legată de construcții arhitectonice.

Este interesantă aproximarea rațională pentru diagonala unui pătrat de latură dată, adică pentru numărul $\sqrt{2}$, pe care o găsim

în *Regulile funiei*. Acest număr se prezintă prin fracția $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}$. Atrag atenția în primul rînd folosirea fracțiilor cu numărător unu și tendința de a repeta puține cifre, precum și precizia mare pentru acele vremuri; în fracții zecimale 1,4142157 în loc de 1,4142136. Textul indian nu conține indicații cum s-a obținut această expresie originală. E posibil să se fi folosit un proces iterativ cunoscut cu mult mai devreme în Babilon. Dacă drept primă aproximare (prin exces) se ia $a_1 = \frac{3}{2}$, atunci aproximarea respectivă ce-i corespunde (prin lipsă) va fi $b_1 = 2 : \frac{3}{2} = \frac{4}{3}$. A doua aproximare este:

$$a_2 = \frac{\frac{3}{2} + \frac{4}{3}}{2} = \frac{17}{3 \cdot 4} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4}$$

și ei îi corespunde:

$$b_2 = 2 : \frac{17}{12} = \frac{24}{17}.$$

A treia aproximare a lui $\sqrt{2}$ va fi:

$$a_3 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{289 + 288}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 17} = \frac{2 \cdot 289}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 17} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 17} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}.$$

Aproximativ cu 18 secole înaintea erei noastre, matematicienii babilonieni găsesc pentru $\sqrt{2}$ o valoare în fracții sexagesimale, egală cu 1; 24, 51, 10, de care cea indiană diferă numai prin cea de-a șasea cifră zecimală după virgulă. Aproximarea babiloniană se obține de asemenea în cea de-a doua fază a calculelor dacă se pleacă de la aproximarea cunoscută în Babilon $\frac{17}{25} = 1;25$. Toate acestea ne duc la ideea că între învățații indieni și cei babilonieni au existat legături în perioada redactării *Regulilor funiei*. Mai există și alte construcții geometrice mai complicate pentru aproximarea indicată, cu ajutorul gnomonului.

Pentru a trece de la altare cu fundație pătrată la cele circulare și invers, în *Regulile funiei* se arată cîteva procedee de circulaturi ale pătratului și cvadraturi ale cercului.

Construcţia unui cerc echivalent cu un pătrat dat este următoarea (fig. 29): din centrul O al pătratului, perpendicular pe latura AB se duce segmentul OP egal cu jumătate din diagonală, iar pe HP se construieşte $HK = \frac{1}{3} HP$. Raza căutată se ia egală cu OK. Cu alte cuvinte, diametrul căutat d se exprimă prin latura s a pătratului prin expresia iraţională:

$$d = \left(1 + \frac{\sqrt{2} - 1}{3}\right) s.$$

O asemenea expresie aritmetică nu există de altfel în *Reguli*. Valoarea corespunzătoare este:

$$\pi = 18(3 - 2\sqrt{2}) \approx 3{,}088.$$

Una dintre regulile cvadraturii cercului este foarte simplă: se propune să se ia $s = \left(1 - \frac{2}{15}\right) d = \frac{13}{15} d$. În acest caz

$$\pi = \frac{676}{225} = 3\frac{1}{225} \approx 3{,}004.$$

Poate că această construcţie a fost obţinută în felul următor. Să împărţim cercul în 12 părţi egale; o asemenea problemă nu prezenta, binecînţeles, vreo dificultate pentru autorii *Regulilor*. Să construim acum un pătrat ale cărui laturi să treacă prin opt din punctele de împărţire, la fel cu pătratul din fig. 29 şi să-l presupunem aproximativ de arie egală cu cercul. Latura pătratului va fi $s = \frac{\sqrt{3}}{2} d$. Dacă în prima aproximare vom lua pentru $\sqrt{3}$ valoarea $\frac{5}{3}$ (prin lipsă), atunci aproximarea ce-i va corespunde, prin adaos, va fi $3 : \frac{5}{3} = \frac{9}{5}$, iar aproximarea următoare $\frac{\frac{5}{3} + \frac{9}{5}}{2} = \frac{26}{15}$ adică $s = \frac{13}{15} d$. Pentru a calcula jumătatea laturii pătratului cu ajutorul

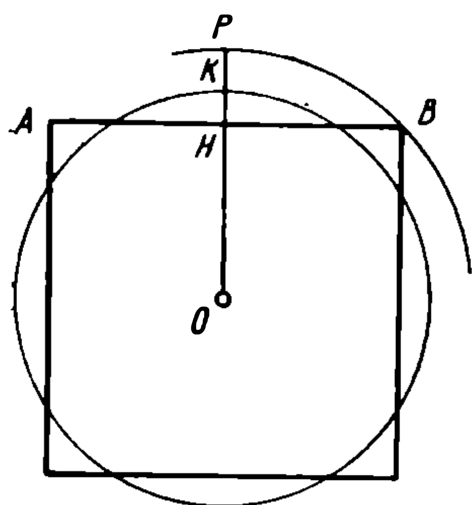


Fig. 29

teoremei lui Pitagora se cere să se știe doar că latura hexagonului înscris este egală cu raza și că o rază perpendiculară pe coardă o împarte în două părți egale.

Poate că tocmai de aici s-a obținut construcția cercului de arie egală cu cea a pătratului dat, deși în textul *Regulilor* ea precedă cvadratura cercului. Într-adevăr, din $s = \frac{\sqrt{3}}{2} d$ rezultă $r = 2\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{s}{2}$; egalitatea $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ se aplică în *Reguli*. În acest caz, pentru $\sqrt{3} \approx \frac{5}{3}$, raza $r \approx \frac{10}{9} \cdot \frac{s}{2} = \frac{s}{2} + \frac{1}{9}\frac{s}{2}$. Pe de altă parte, pentru $\sqrt{2} \approx \frac{4}{3}$, segmentul *HP* (fig. 29), adică $(\sqrt{2} - 1)\frac{s}{2}$, este $\frac{1}{3}\frac{s}{2}$ și aceasta înseamnă că pentru circulatura pătratului, latura lui trebuie mărită cu $\frac{1}{3}$ *HP*.

Într-o altă regulă a cvadraturii cercului:

$$s = \left[1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 29} - \frac{1}{8 \cdot 29}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6 \cdot 8}\right)\right] d.$$

Ca și în cazul circulaturii pătratului, aici se obține pentru π valoarea 3,088. Nu ne vom opri asupra diferitelor ipoteze cu privire la felul cum s-a găsit această din urmă expresie, care, la fel ca și expresia pentru $\sqrt{2}$, demonstrează tendința învățaților indieni de a respecta o oarecare armonie în fracțiile cu numărător unitate ce le alcătuiesc. Ne vom limita la observația că punctul de plecare al construcției [67] este transformarea egalității $d = \left(1 + \frac{\sqrt{2} - 1}{3}\right) s$, corespunzătoare circulaturii pătratului, în $s = \frac{3}{2 + \sqrt{2}} d$.

În felul acesta, autorii *Regulilor* folosesc, după cum se vede, legătura reciprocă dintre problemele cvadraturii cercului și ale circulaturii pătratului. Totuși, după cum se știe, ei erau departe de un studiu aprofundat al însușirilor cercului. Aprecierile numerice ale exactității construcțiilor, pe care le-am prezentat pentru cititorul contemporan, au fost în afara cîmpului de vedere al învățaților indieni din acele vremuri. Se vede că ei n-au știut sau, cel puțin, n-au folosit relația între aria cercului și lungimea circumferinței. În *Reguli*, lungimea circumferinței se ia egală cu $3d$.

Crearea numerației zecimale poziționale. Cea mai mare realizare științifică și de cultură a popoarelor din India este sistemul pozițional de scriere a numerelor de care se apropiaseră învățații din Babilon, China și din alte țări, dar care nicăieri înainte nu căpătase o formă definitivă. Procesul de creare a acestui sistem este îndelungat și nu se cunosc nici pe departe fazele lui [29, 69,70].

Din cele mai vechi timpuri, sistemul de numerație în India a fost cel zecimal, cu excepția unor perioade și regiuni unde se păstrează urme ale unui sistem de numerație cu baza patru. Denumirile numerelor de la 1 la 9, numărul zece și o sută dintr-o serie de limbi europene, inclusiv limba rusă (vezi tabelul), se înrudesc cu denumirile sanscrite ale acestor numere.

Sanscrita	Greaca	Latina	Rusa
eka	eis	unus	odin
dvi-dve	diuo	duo	dva
traia	treis	tres	tri
ciatvara	tettares	qvator	cetîre
pancea	pente	quineve	piat
șaș	hex	sex	șest
sapta	hepta	septem	sem
așta	octo	octo	vosem
nava	ennea	novem	deviat
dasa	deka	decem	desiat
satam	hekaton	centum	sto

Numerele alcătuite din unitățile de ranguri diferite capătă denumirea pe baza principiului aditiv; uneori se folosește și principiul substractiv, de pildă numărul 19 se poate exprima prin *nava-dasa*, adică nouă-zece, dar și prin *ekauna-vimsati*, adică douăzeci fără unu. Pentru denumirea rangurilor zecimale superioare există un număr mare de numerale. Astfel, în *Lalitavistara*, operă a literaturii budiste din secolul al III-lea î.e.n., se spune că Buda-Guatama răspunzînd la întrebarea dacă știe să numere mai departe de koti = 10 000 000, numește succesiv încă 23 de numere crescătoare prin înmulțire cu 100, pînă la numărul *tallakșana* $10^{7+2\cdot23} = 10^{53}$ inclusiv. De altfel, adaugă Buda, toate aceste numere formează doar prima numărătoare, din cele două existente; ultimul număr din cea de-a noua numărătoare ar fi fost $10^{7+9\cdot46} = 10^{421}$. Pînă la apariția sistemului pozițional, în India apar (une-

ori poate dinafară) și dispar diferite sisteme de numerație și de cifre. Varietatea cifrelor în diferitele regiuni s-a păstrat și mai departe, îngreuind considerabil cercetarea legăturilor de succesiune. Din secolul al IV-lea î.e.n. și pînă în secolul al III-lea î.e.n., în regiunea actualului Afganistan de răsărit și Pendjab de nord

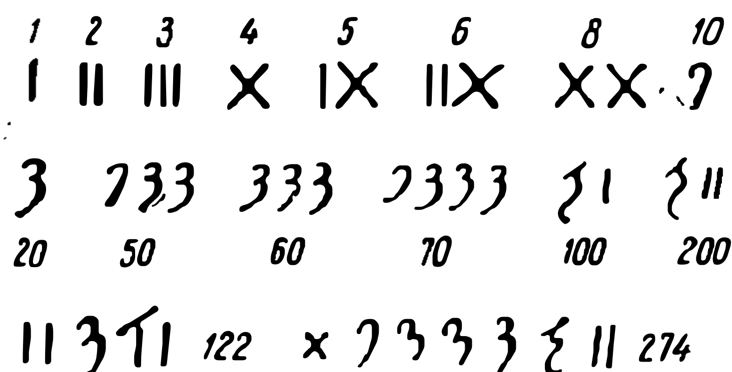


Fig. 30. Cifre indiene kharoști.

sînt în circulație așa-numitele cifre *kharoști* (fig. 30), apărute aici prin răspîndirea scrierii siriano-armene. Aceasta este în esență un sistem zecimal nepozițional, cu semne speciale pentru 1, 4, 10, 20[1] și 100. Unitățile se scriu după principiul aditiv cu ajutorul semnelor lui 1 și 4, zecile — cu ajutorul semnelor lui 10 și 20, iar sutele se scriu multiplicativ, adică se pune semnul sutei (nefolosit în mod independent) și alături, prin cifre, se notează numărul sutelor. În multe sisteme semnele primelor trei numere coincid cu cele chinezești (semnul lui patru în formă de cruce se întîlnește uneori și în China). Numerele se scriu de la dreapta spre stînga.

O treaptă mai înaltă o prezintă numerația zecimală brahmi, foarte răspîndită din vechime pe o suprafață însemnată a Indiei. În multe inscripții din timpul regelui Așoka, numerele sînt prezentate în această bază. Fără modificări substanțiale, scrierea cifrelor brahmi se folosește timp de peste 1 000 de ani. În Ceylon, unde ele ajung împreună cu budismul, aceste cifre au rămas în circulație pînă la sfîrșitul secolului al XIX-lea. Semne speciale în numerația brahmi există pentru unități și zeci, sute și mii. Sutele și multiplii lui 1000 se reprezintă pe baza principiului multiplicativ (fig. 31). Sensul scrierii brahmi este de la stînga la dreapta.

Semne individuale pentru primele două numere naturale există în general în multe sisteme indiene de cifre, cel puțin începînd cu secolul al II-lea î.e.n. Existența unor simboluri speciale pentru

---

[1] Semnul lui 20 este, evident, o combinare a două semne ale lui 10 — *N.A.*

numerele de la 1 pînă la 9 este o trăsătură caracteristică și importantă a aritmeticii indiene, trăsătură care a devenit premisa numerației zecimale poziționale.

Principiul multiplicativ și pozițional acționează de asemenea într-un sistem original de denumire a numerelor, folosit în lucră-

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	20	30	40	50	60	70	80	90
100	200	500	1000	4000	70000			

Fig. 31. Cifre indiene brahmi.

rile de astronomie și matematică. În acest sistem unitatea se notează printr-un cuvînt oarecare, reprezentînd obiecte ce există doar la singular, ca de pildă „Luna", „Pămîntul", „Brahma"; numărul doi se notează printr-unul din cuvintele „gemeni", „ochi", „mîini"; cinci — prin cuvintele „simțuri" sau „săgeți" (cele cinci săgeți ale lui Kamadeva, zeul dragostei) etc. Numărul 867 se citește și se scrie în felul următor: *ghiri-rasa-vazu*, adică, munți (7) — mirosuri (6) — zei (8), scrierea făcîndu-se de la rangurile inferioare către cele superioare. În acest fel, un număr oarecare se poate exprima în diferite feluri. O asemenea reprezentare a numerelor se folosește și în versurile scrise din *Siddhanta*. Poate că acest sistem a servit pentru a ușura învățarea pe de rost a tabelelor astronomice. Este interesant că lipsa unui rang se exprimă prin cuvîntul „gaură". Astfel, numărul 1 021 se exprimă prin cuvintele *sași-paksa-kha-eka*, adică Luna (1) — aripile (2) — gaura (0) — unu (1).

Aryabhata folosește un alt procedeu, numind numerele prin silabe. Fără a intra în amănunte, vom arăta că acest procedeu este total lipsit de orice caracter pozițional, deoarece fiecărui număr $k \cdot 10^n$, $k = 1, 2, \ldots, 9$, i se atribuie o silabă deosebită. Bogatul alfabet sanscrit permitea să se numească în acest fel cifre destul de mari. De pildă, ga = 3, ghi = 3 000, gu = 30 000, ghe = $= 3 \cdot 10^{10}$, gau = $3 \cdot 10^{16}$ etc. Dar Bhaskara I, elev al lui Aryabhata, imprimă un caracter pozițional notației numerelor prin silabe (care, după cum vom vedea, are analogii în algebra indiană;

vezi p. 146). El introduce silaba pentru a nota rangul lipsă, iar, ceea ce este mai important, aceeași silabă poate servi într-un număr dat pentru a reprezenta pe 3, 30, 300 etc. Aproximativ în aceeași perioadă, adică în prima jumătate a secolului al VI-lea, se modifică ordinea succesiunii rangurilor și încep scrierea și citirea lor de la cele superioare spre cele inferioare.

Astfel, în diferite părți ale Indiei are loc în același timp o apropiere de numerația pozițională zecimală.

Apariția noului sistem pozițional s-ar putea imagina în felul următor. Principiul valorii după locul ocupat cuprinde trei faze: 1. scrierea multiplicativă a numărului de ranguri într-un număr dat. 2. neglijarea semnelor unităților rangurilor. Cu aceasta ne-am mai întîlnit încă în știința din Babilon și China. Dar un sistem pozițional pe deplin dezvoltat mai implică: 3. un semn pentru zero, care să exprime lipsa unor ranguri oarecare în numărul respectiv. În matematica babiloniană semnul lui zero apare către mijlocul mileniului I î.e.n. dar nu se folosește în mod sistematic. Aceasta se poate explica prin relativa raritate a numerelor sexagesimale cu ranguri lipsă. Pentru numere mai mici de o sută va exista un singur număr de acest fel, anume numărul șaizeci, iar pentru numerele pînă la o mie, vor fi 16. În numerația zecimală, pînă la o sută există 9 asemenea numere, iar pînă la o mie, sînt 180.

Ca premisă pentru un sistem pozițional mai servește și existența unor semne individuale pentru o cantitate redusă de numere mici. În acest sens, sistemele alfabetice cu cifre speciale pentru 20, 30, ..., 200, 300, ..., au frînat trecerea la un sistem pozițional.

Aplicarea largă a principiului multiplicativ și parțial a celui pozițional în sistemele verbale și scrise de numerație, existența cifrelor pentru primele nouă numere și caracterul zecimal dezvoltat al numerației — toate acestea creează în India condiții favorabile pentru apariția unui sistem pozițional complet, cu baza zece.

Poate că în același sens a influențat și cunoașterea numerației sexagesimale babiloniene cel puțin prin intermediul operelor antice grecești de astronomie. În secolul al VII-lea, sistemul zecimal bazat pe valoarea după locul ocupat al celor nouă cifre și semnul lui zero există ca atare[1].

---

[1] Există părerea că Aryabhata ar fi cunoscut semnul lui zero, deoarece el este necesar în regula de extragere a rădăcinii pătrate și cubice dată de acesta. Dar la extragerea rădăcinilor pe abac ne putem lipsi de zero, pe care-l înlocuiesc coloanele goale. Ca exemplu poate servi matematica chineză — *N.A.*

Scrierea pozițională a numerelor, și anume a datelor anuale calendaristice (fără semnul lui zero), se întîlnește în India cel puțin în secolul al VI-lea. Într-o inscripție este scris anul 346 în cifrele brahmi 3, 4, 6, ceea ce în sistemul nostru de datare corespunde cu anul 595. Unele inscripții de acest fel au putut fi falsificate ulterior, dar este îndoielnic ca o asemenea presupunere să se poată extinde asupra majorității inscripțiilor.

În orice caz, încă la mijlocul secolului al VII-lea, informațiile cu privire la numerația indiană se răspîndesc în vest. Prima mărturie o întîlnim la învățatul sirian Sever Seboht (662), care a trăit la mănăstirea Chenesra, pe cursul superior al Eufratului. Polemizînd cu oamenii care au o comportare neglijentă față de știința altor popoare, Seboht arată că „descoperirile fine [ale indienilor — *N.A.*] din știința astronomică sînt descoperiri mai inteligente decît ale grecilor și babilonienilor" și că „numerația lor este mai presus de orice cuvinte", și anume tocmai aceea „care se face cu ajutorul a nouă semne" [71, p. 225]. E adevărat că el vorbește despre nouă semne. Poate că Seboht cunoscuse procedeele de calcul cu nouă cifre, unde rangurilor lipsă le corespund locuri goale; se mai poate că Seboht nu consideră ca semn numeric punctul sau cerculețul care reprezintă pe zero. În inscripțiile din anii 683 și 686, din Cambodgea și Indonezia, se folosește în mod evident semnul lui zero, sub formă de punct sau de cerculeț [72][1]. Despre folosirea semnului lui zero în India sub formă de punct scrie în jurul anului 725 Guathama Sidharta, care lucrase în China (vezi p. 25). O dovadă curioasă există într-un comentariu al lui Varaha-Mihira și, judecînd după ea, termenul zero, *sunia*, fusese folosit în numerația verbală încă din secolul al V-lea. Tocmai conform acestui comentariu, în *Știința lui Pulisa*, un număr mare cu terminația 7800 se pronunță în ordine inversă în felul următor: „zero, zero, opt, șapte..." [54, I, p. 59]. În India propriu-zisă, cea mai veche inscripție cunoscută, cuprinzînd în ea semnul lui zero (inscripția murală din Gvalior, fig. 32), este din anul 876; ea conține numerele 270, precum și 933 și 187.

Reprezentarea lui zero printr-un cerculeț elimină punctul și intră în uz general. Indienii botează semnul lui zero prin termenul

---

[1] În aceste inscripții sînt reprezentați prin cifre anii 605 și 608 din așa-numita eră saka, al cărei început se situează în anul 78. După unii specialiști, numărătoarea anilor ar trebui începută cu anul 128; atunci, anii 683 și 686 ar trebui înlocuiți prin anii 733 și 736 — *N.A.*

sanscrit *sunia* care înseamnă „gol". Tradus apoi de arabi prin *as-şifr*, el se află la baza termenului nostru cifră.

Între altele, nu este clar dacă semnul lui zero a fost reinventat în India. Este posibil ca el să fi fost imitat din operele astrono-

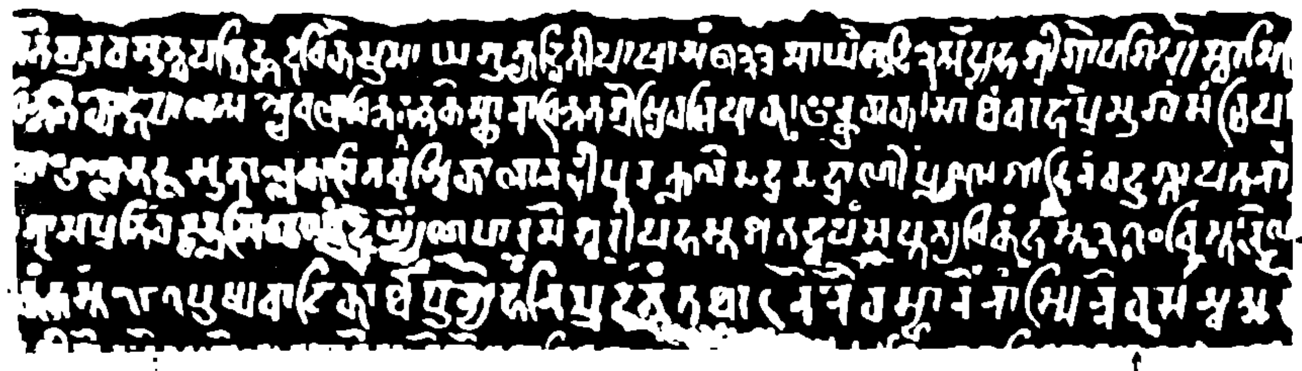


Fig. 32. Inscripţia murală de la Gvalior. În prima linie, dedesubtul punctului se vede numărul 933 (an corespunzător anului 876 e.n.), în linia a patra — la intersecţia săgeţilor — se află numărul 270, iar în linia a cincea — numărul 187, indicată prin două puncte. Compară cifrele din fig. 33.

milor greci, care la rîndul lor îi urmează în acest sens pe babilonieni [71 a. p. 77—78]. *Suria siddhata* poartă amprenta evidentă a faptului că autorii ei cunosc astronomia greacă. Aici sînt greceşti chiar unii termeni de felul lui *kendra* (distanţa de la centru — κέντρον) sau *lipta* (minuta — λεπτόν). În plus, semnul pentru zero seamănă cu cel grecesc 0. Modificarea ordinii de scriere a rangurilor zecimale, amintită ceva mai sus, poate că se produce de asemenea sub influenţa grecilor care mergeau de la rangurile superioare la cele inferioare[1]. Dar chiar dacă indienii folosesc semnul zero greco-babilonian, lor le revine marele merit de a fi îmbinat elementele proprii şi străine într-o numeraţie poziţională zecimală unitară. Şi numai această numeraţie permite să se efectueze atît de simplu calculele în scris, încît ele să poată concura cu folosirea abacului.

Notarea cifrelor în India variază substanţial de la regiune la regiune şi în timp. Cea mai întrebuinţată dintre nenumăratele forme este scrierea devangari, păstrată pînă în zilele noastre.

[1] Nu de mult s-a emis ipoteza că semnul lui zero ar fi apărut prin îmbinarea culturii indiene cu cea chineză [40, pp. 11, 12]; temeiuri pentru o asemenea ipoteză prezintă apariţia semnului lui zero în Cambodgea şi Indonezia, precum şi caracterul zecimal-poziţional al numeraţiei chineze cu cifre-bastonaşe — *N.A.*

Este foarte probabil ca ea să fi apărut prin modificarea treptată a formei cifrelor brahmi (fig. 33).

Cifre brahmi	—	=	≡	(1) [illegible] (2)	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	o
Forme de trecere a	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible] [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	
b	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible] [illegible]	[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible]	
c	[illegible]	[illegible]		[illegible] [illegible]	[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible]	
d			[illegible]	[illegible]	[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible]	
e			[illegible]		[illegible]					
Cifre devangari	१	२	३	४	५	६	७	८	९	०

Fig. 33. Evoluția cifrelor brahmi în India.

La sfîrșitul secolului al VIII-lea, numerația indiană devine cunoscută la Bagdad. Învățații arabi apreciază curînd avantajele noului sistem. Despre răspîndirea ei ulterioară vom vorbi mai departe.

Operațiile aritmetice. În cursurile indiene de aritmetică se analizează opt operații asupra numerelor întregi și fracționare: adunarea, scăderea, înmulțirea, împărțirea, ridicarea la pătrat, extragerea rădăcinii pătrate, ridicarea la cub și extragerea rădăcinii cubice. Unele operații sînt definite. De pildă, Aryabhata al II-lea definește adunarea ca o reunire a cîtorva numere într-unul singur iar scăderea, ca o scoatere a unui număr dintr-altul oarecare întreg. Definiții similare se întîlnesc mult mai tîrziu și în manualele europene. Bhaskara I, referindu-se la dascăli anonimi precursori, spune că înmulțirea și împărțirea se reduc, respectiv, la o adunare și o scădere.

Studiul textelor străvechi, comparativ cu formele de numerație păstrate în unele părți ale Indiei pînă în zilele noastre, arată că, mai de mult, toate calculele mai complicate se efectuau pe abac cu ajutorul scoicilor-*kauri* [73]. Despre răspîndirea largă a abacului în vechea Indie vorbește chiar denumirea sanscrită a aritmeticii: Patiganita de la cuvintele *pati* — tablă și *ganita* — calcul, matematică. Cifrele scrise, la fel ca și în China antică, multă vreme nu se folosesc pentru calcule, ci pentru a insera în texte numere, date cronologice și altele. Calculatorul purta într-o geantă cîteva sute de scoici prelungi *anka rasi*, pentru a reprezenta în coloanele abacului numerele de la 1—9 și vreo duzină de scoici rotunde —

echivalente lui zero — *sunia rasi*. Probabil că scoicile rotunde se folosesc mai tîrziu ca timp, cînd şi în scriere apare semnul lui zero amintit mai sus. *Kaurii* se aşază pe abac de la dreapta la stînga în grupe de cîte trei; astfel de pildă, numărul 52077 se reprezintă ca în fig. 34 (unde am înlocuit scoicile prelungi prin linioare oblice, iar pe cele rotunde — prin cerculeţe). Numărul se citeşte astfel: şapte — şapte — gol — doi — cinci. Budiştii ortodocşi — pandiţii au folosit un asemenea procedeu de numeraţie pînă în ultimul timp. Pentru efectuarea operaţiilor pe abac, pentru fiecare număr mai mic de zece trebuie ţinută minte completarea lui pînă la 10, *prati rasi*. Dacă la adunare, numărul ce se adaugă şi se ţine în minte este mai mic decît completarea pînă la zece a numărului respectiv al primului termen trecut pe abac, atunci se adaugă doar cantitatea necesară de scoici. Dacă numărul de adăugat este egal cu complementul pînă la zece, atunci la rangul cel mai apropiat din stînga al primului termen al adunării se adaugă o scoică prelungă, iar scoicile rangului dat se scot şi pe locul gol se aşază o scoică rotundă. În sfîrşit, dacă numărul de adăugat este mai mare decît complementul, atunci la rangul din stînga se adaugă o scoică prelungă, iar din scoicile rangului respectiv se scade complementul zecimal al celui de-al doilea termen al adunării. În mod analog se efectuează scăderea. Înmulţirea se reduce la o adunare repetată, iar împărţirea — la o scădere repetată.

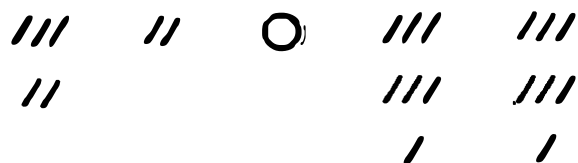


Fig. 34

Mai tîrziu, operaţiile se efectuează în scris pe o tablă de calcul acoperită cu praf sau nisip, pe care se desenează cifrele cu ajutorul unui beţişor ascuţit. Dimensiunile relativ mici ale tablei, în comparaţie cu cifrele, antrenează după sine ştergerea rezultatelor intermediare, inutile în calculele ce urmează. Adunarea, scăderea şi înmulţirea se fac atît în ordinea crescătoare a rangurilor, de la dreapta spre stînga, cît şi de la stînga spre dreapta; ultimul procedeu impune uneori să se introducă un număr mare de corecturi în cifrele rezultatului, găsite în prealabil. Unii autori indieni îl consideră totuşi mai comod, ca de pildă în cazul scăderii[1].

Pentru înmulţire se învaţă pe de rost tabele vaste. Înmulţirea se efectuează prin mai multe procedee diferite ca formă. Într-unul

[1] La începutul secolului al XIX-lea, K.F. Gauss, iar în zilele noastre N.A. Krîlov, au arătat avantajele operaţiei de adunare efectuate de la stînga la dreapta — *N.A.*

din aceste procedee, înmulțitorul scris în ordinea rangurilor deasupra deînmulțitului, după ce se înmulțește cu el fiecare cifră a deînmulțitului, se mută de fiecare dată cu un rang, iar cifra folosită a deînmulțitului se șterge. Produsul se înscrie treptat pe linia deînmulțitului. De pildă, pentru a înmulți 135 cu 12, mai întîi se scrie:

12
135.

Înmulțind 5·12 și ștergîndu-l pe 5, avem:

12
1360,

și mutînd înmulțitorul,

12
1360.

Înmulțind 3 prin 2 și adăugînd 6 la 6, trebuie să ștergem dedesubt cifra 6 și s-o înlocuim prin 2, iar unitatea trebuie s-o ținem în minte sau s-o scriem de o parte. Această unitate trebuie s-o adăugăm la produsul 3 ori 1 și suma 4 s-o scriem dedesubt, în locul celei șterse:

12
1420.

Mutarea înmulțitorului ne dă:

12
1420.

Mai departe: 1·2 ne dă 2, care se adaugă la 4 dedesubt; 4 se șterge și se scrie 6. În sfîrșit 1·1 ne dă 1; nu mai avem de șters unitatea de dedesubt. În încheiere se șterge deînmulțitul și pe tablă rămîne rezultatul înmulțirii, adică 1 620.

Fig. 35

Indienii folosesc și procedee mai comode de înmulțire. De pildă, desenînd pe tabla de calcul o rețea de dreptunghiuri, fiecare din ele fiind împărțit prin diagonale paralele, pe laturile rețelei se scriu factorii, iar produsele intermediare se scriu în triunghiuri și se adună după cum se arată în fig. 35. Într-un alt procedeu, se înmulțesc și se adună deodată în minte acele cifre ale

factorilor care dau aceleași ranguri ale produsului; înmulțitorii se scriu după rang unul sub altul, iar cifrele rezultatului se corectează, dacă este necesar, în minte.

Astfel, produsul:

$$(a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \ldots)(b_0 + b_1 \cdot 10 + b_2 \cdot 10^2 + \ldots)$$

se obține sub forma:

$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) \cdot 10 + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) \cdot 10^2 + \ldots$$

Acest procedeu îl recomandă ulterior Djemșid al-Kași în Orient, iar J.B. Fourier — în Occident.

Uneori pentru a simplifica calculele, înmulțitorii se prezintă comod sub forma unei sume sau diferențe de felul:

$$135 \cdot 12 = 135\,(12 + 8) - 135 \cdot 8$$

sau:

$$135 \cdot 12 = 135\,(12 - 2) + 132 \cdot 2.$$

Procedeele indiene pentru operațiile aritmetice intră ulterior în patrimoniul literaturii scolastice arabe și europene.

Premisa operațiilor în sistem pozițional o constituie operațiile cu zero. Matematicienii indieni formulează foarte complet proprietățile lui zero ca număr. Sriddhara și Aryabhata al II-lea prezintă în cuvinte următoarele reguli:

$$a + 0 = a,$$
$$0 + a = a,$$
$$a - a = 0,$$
$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0,$$
$$0 \cdot a = 0.$$

Împărțirea unui număr diferit de zero prin zero se consideră la început ca imposibilă, dar mai tîrziu se ajunge la ideea că împărțirea prin zero dă infinit. Bhaskara al II-lea scrie că o asemenea mărime cum este $\frac{a}{0}$, în care $a \neq 0$, nu se modifică oricît am adăuga sau am scădea din ea. Krișna care a trăit în jurul anului 1600, comentînd operele lui Bhaskara, are o serie de considerații fine asupra înmulțirii și împărțirii cu zero. Cu cît mai mic devine deînmulțitul, spune el, cu atît mai mic este produsul și dacă primul se micșorează la limită, atunci și al doilea se micșorează la fel, și dat fiind că micșorarea maximă a unei mărimi este reducerea

ei la zero, de aceea $a \cdot 0 = 0$. În mod analog se justifică egalitatea $0 \cdot a = 0$ și într-un mod corespunzător, faptul că rezultatul împărțirii prin zero este infinit. Referitor la împărțirea lui zero prin zero, matematicienii indieni n-ajung la o soluție clară.

Ridicarea la pătrat și la cub se efectuează după regulile pătratului și ale cubului binomului, repetat de numărul necesar de ori în cazul unui polinom.

Învățătura despre fracții este foarte amănunțit dezvoltată în India. Fracțiile se scriu într-o formă asemănătoare cu cea modernă: numărătorul se așază deasupra numitorului, dar fără linioara de despărțire[1]. În cazul unui număr mixt, partea întreagă se scrie deasupra numărătorului părții fracționare; în cazul operațiilor cu numere întregi și fracționare, numărul întreg se reprezintă ca o fracție cu numitorul 1. Fracțiile ordinare cu numărătorul diferit de unitate se întîlnesc începînd cu *Regulile funiei* ale lui Apastamba, dar tot acolo se folosesc atît fracțiile cu numărător egal cu unitatea, cît și fracțiuni ale unor asemenea fracții. Pentru acestea din urmă există o notație specială. Astfel:

1	1	1	1
1	2	3	5

este produsul $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}$. Poate că fracțiunile de fracțiuni apar într-un stadiu relativ timpuriu al dezvoltării aritmeticii, cînd în mod practic rezerva de fracții folosite — măsuri de forma $\frac{1}{n}$ — este încă foarte mică, dar totuși apare nevoia de a ține seama de părți ale unor asemenea măsuri, cum ar fi de pildă jumătatea unei treimi etc. Fracțiunile de fracțiuni se întîlnesc apoi în literatura medievală arabă și europeană.

Extragerea rădăcinilor. Indienii numesc rădăcina *mula*, ceea ce înseamnă rădăcina unui copac sau a unei plante, precum și temelia, începutul, originea etc., sau *pada* — partea de jos, temelia, latura etc. Termenul nostru de rădăcină vine din latinescul *radix* și este traducerea cuvîntului arab *djizr* care înseamnă rădăcină sau baza pătratului, fiind la rîndul său o traducere a termenului sanscrit *mula*.

[1] O asemenea scriere există și într-un papirus grecesc din secolul I e.n. — *N.A.*

În India prima descriere a procedeului de extragere a rădăcinii pătrate şi cubice se întîlneşte la Aryabhata. Regulile corespunzătoare exprimate în versuri pot servi ca model de laconism dus la extrem, despre care am amintit mai sus. Tot atît de concisă este şi formularea dată de alţi autori. Prezentăm mai jos regula de extragere a rădăcinii pătrate după Sriddhara.

„Scăzînd pătratul dintr-un loc impar, împarte locul cel mai apropiat cu rădăcina dublă, aşezată separat, şi scăzînd pătratul cîtului, scrie-l dedesubt în linie; dublează ceea ce s-a obţinut mai sus şi aşază-l dedesubt, împarte cu el cel mai apropiat loc par. Împarte pe din două cantitatea dublată" [54, I, p. 172].

Să lămurim cele spuse, separînd diferitele etape ale calculului după cum se făcea acesta pe abac. Se cere să se extragă rădăcina pătrată din 54 756.

Scriem numărul însemnînd locurile impare prin linioare verticale, iar pe cele pare, prin linioare orizontale.

| — | — |
5 4 7 5 6

Alegem pătratul cel mai mare, astfel încît el să fie mai mic decît 5, adică 4 şi scriindu-l „dedesubt în linie" îl scădem din 5

| — | — |
1 4 7 5 6

4

Împărţim pe 14 prin 4, cîtul va fi 3, iar restul — 2. Ştergem pe 14 şi-l înlocuim prin restul 2:

| — |
2 7 5 6

4

Scădem din 27 pătratul cîtului, 9, şi diferenţa 18 o aşezăm în locul lui 27, iar cîtul dublu, 6, îl scriem imediat după 4, de o parte

— |
1 8 5 6

46

Împărţim pe 185 prin 46, cîtul va fi 4, iar restul — 1. Ştergem pe 185 şi-l înlocuim prin restul 1:

|
1 6

46

Scădem din 16 pătratul cîtului și deoarece la rest se obține zero, îl ștergem pe 16. Cîtul dublu 8 îl scriem după 46:

468

În sfîrșit, înjumătățind ultimul număr, găsim rădăcina 234.

Acest procedeu se deosebește oarecum de procedeul extragerii rădăcinii aplicat în China. Ambele procedee se bazează pe dezvoltarea pătratului unui binom, dar nici în regula descrisă mai sus și nici în regula indiană de extragere a rădăcinii cubice nu există momentele caracteristice pentru schema lui Horner.

Indienii fac cunoștință cu procedeul de extragere a rădăcinilor la chinezi, dar ei introduc în el modificări sensibile. Dacă însă cunosc procedeul de extragere a rădăcinii pătrate folosit în Alexandria, atunci ei îi adaugă totuși procedeul pentru extragerea rădăcinii cubice. Se mai poate întîmpla ca în toate trei țările învățații să fi lucrat independent unii de alții.

Algoritmul indian de extragere a rădăcinilor pătrate este caracteristic prin faptul că în el se folosește în mod permanent partea dublă a rădăcinii, iar rezultatul se împarte pe din două. Tocmai sub această formă se întîlnește mai tîrziu algoritmul și la arabi.

Pentru a extrage rădăcina pătrată dintr-o fracție $\frac{a}{b}$ cu numitorul nepătrat, ea se aduce la forma $\frac{ab}{b^2}$ iar, pentru a mări exactitatea, numărătorul se mai înmulțește cu puterea pară a lui 10.

Verificarea prin nouă. Dispariția de pe abac a tuturor numerelor folosite face imposibilă verificarea calculelor intermediare. Poate că tocmai din această cauză devine atît de răspîndită și de populară așa-numita verificare prin nouă a operațiilor, asupra căreia există o aluzie neclară și în literatura greacă din secolul al III-lea. Pentru a verifica înmulțirea, împărțirea, ridicarea la putere și extragerea rădăcinii, învățații nu recomandă operații inverse, ci o verificare bazată pe faptul că restul rezultat din împărțirea prin nouă a oricărui număr întreg și a sumei cifrelor lui sînt egale între ele.

Prima descoperire a regulii aplicate la înmulțire, la împărțire cu rest, precum și la extragerea rădăcinii pătrate și cubice (totodată și pentru pătratele și cuburile neîntregi) se întîlnește în secolul al X-lea la Aryabhata al II-lea. Dacă vom numi probă

cîtul împărțirii prin nouă al sumei cifrelor unui număr dat, atunci vom spune la înmulțirea a două numere că proba produsului trebuie să fie egală cu proba produsului probelor înmulțitorilor. Asemenea propoziții există și pentru celelalte operații citate. Cu ajutorul congruențelor, regula se poate exprima în felul următor. Fie

$$N = n_1 n_2 n_3 + R,$$

proba lui N este p, probele numerelor n_1, n_2, n_3 sînt p_1, p_2, p_3, proba lui R este r și, în sfîrșit, proba lui $p_1 p_2 p_3 + r$ este ρ. Atunci $p = \rho$.

Într-adevăr, din congruențele modulo 9,

$$\begin{aligned} n_1 n_2 n_3 + R &\equiv p, \\ n_1 &\equiv p_1, \\ n_2 &\equiv p_2, \\ n_3 &\equiv p_3, \\ R &\equiv r, \\ p_1 p_2 p_3 + r &\equiv \rho \end{aligned}$$

rezultă:

$$p \equiv n_1 n_2 n_3 + R \equiv p_1 p_2 p_3 + r = \rho$$

și deoarece probele p și ρ sînt mai mici decît nouă, ele sînt egale între ele. De aici decurg regulile corespunzătoare pentru înmulțire ($R = 0$) și extragerea rădăcinilor ($n_1 = n_2$, $n_3 = 1$ sau $n_1 = n_2 = n_3$). Egalitatea probelor este o condiție numai necesară și nu și suficientă pentru ca operația să fie corectă. Desigur că această situație nu fusese sesizată sau remarcată timp îndelungat, fiindcă în mod practic greșelile în urma cărora regula l-ar putea induce în eroare pe calculator sînt puțin probabile.

În secolul al XIV-lea, Naraiana extinde regula verificării prin nouă asupra altor moduli.

Verificarea prin nouă o folosesc și matematicienii arabi care o cunoscuseră din surse indiene, iar mai tîrziu ea ajunge și în Europa. Leonardo Pisano demonstrează necesitatea condiției pentru produsul a două numere: el introduce termenul „probe" — numere de probă. Insuficiența regulii o subliniază în mod special Nicolas Chuquet (1484) și Luca Pacioli (1494).

Probleme de aritmetică; regula de trei. În operele indiene găsim un număr mare de probleme variate de aritmetică, expri-

mate de unii autori într-o formă poetică elegantă. Acestea sînt probleme cu regula de trei simplă și compusă, regula tovărășiei, regula amestecului, procente simple și compuse, progresii și altele. Unele din aceste probleme au o importanță practică directă, altele servesc ca exerciții sau distracții. Brahmagupta scrie că așa după cum Soarele întunecă stelele prin strălucirea lui, tot așa un învățat poate întuneca slava tuturor celorlalți într-o adunare, propunînd și, cu atît mai mult, rezolvînd probleme de matematică. Unele probleme se rezolvă aritmetic, altele impun aplicarea algebrei. Să analizăm pentru început cîteva procedee aritmetice.

Un loc important îl ocupă regula falsei poziții; o găsim pentru întîia oară în prima jumătate a secolului al IX-lea la Magavira, care cu ajutorul ei rezolvă un număr mare de probleme de algebră și de geometrie. Bhaskara al II-lea o descrie și el și o numește regula presupunerii — *ista-karma*. Ea este comodă pentru rezolvarea unor probleme care se reduc la o ecuație liniară de forma:

$$ax = c.$$

Dacă coeficientul necunoscutei este suma a cîtorva fracții, atunci drept necunoscută se ia de obicei un număr multiplu al numitorilor, fapt ce ușurează mult calculele. Fie că:

$$\frac{m_1}{n_1} x + \frac{m_2}{n_2} x + \ldots + \frac{m_r}{n_r} x = c,$$

iar valoarea luată x_1, multiplu al tuturor n_i, dă prin substituție c_1. Atunci:

$$x = x_1 \frac{c}{c_1}.$$

Justificarea regulii cere doar să se cunoască proprietățile proporțiilor. Iată una dintre problemele din *Lilavati* pentru regula falsei poziții: „Dintr-un buchet de lotuși curați, a treia, a cincea și a șasea parte sînt aduse în dar, respectiv zeilor Șiva, Vișnu și Suria, iar o pătrime — lui Bhavani. Restul de șase lotuși se dau unui preacinstit dascăl. Răspunde-mi repede cîți lotuși erau cu totul". Bhaskara ia pe 60 drept număr căutat, el fiind cel mai mic multiplu comun al lui 3, 4, 5, 6 și văzînd că la rest se obține 3, găsește soluția $60 \cdot \frac{6}{3} = 120$.

În manuscrisul de la Bahșali, regula falsei poziții se aplică nu numai la o ecuație de forma $ax = c$, ci și la probleme care se reduc la ecuația:

$$ax + b = c.$$

Aici nu mai există desigur o simplă proporționalitate ca în primul caz $\left(\text{pentru } ax_1 = c_1 \frac{x}{x_1} = \frac{c}{c_1}\right)$, și soluția se obține după regula:

$$x = x_1 + \frac{c - c_1}{a}; \text{ unde } ax_1 + b = c_1.$$

În operele matematicienilor indieni cunoscute nouă nu se întîlnește regula dublei false poziții, dar matematicienii din țările Islamului o folosesc pe scară largă și o consideră de proveniență indiană.

Pentru a găsi un număr asupra căruia se efectuează o serie de operații pentru a ajunge la numărul dat, indienii folosesc metoda inversiunii. Încă Aryabhata I o descrie și ea constă în faptul că asupra numărului dat se efectuează în ordine inversă operațiile inverse.

Regula de trei constă în găsirea unui număr x, care împreună cu alte trei numere date a, b, c formează proporția:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x},$$

sau cum spuneau matematicienii din vechime, care răspunde la întrebarea: dacă a îl produce pe b, ce va produce c? Regula de trei ocupă un loc central în aritmetica indiană, fiindcă permite să se rezolve în mod automat o serie mare de probleme ce se întîlnesc în viața practică. Bhaskara spune că ea alcătuiește esența aritmeticii, căreia el îi opune algebra, ca știință care impune raționamente și inteligență.

Regula se numește *trairașika*, ceea ce înseamnă aproximativ regula „cu trei locuri". La Aryabhata I rețeta glăsuiește astfel: în regula de trei „rezultatul" (b), fiind înmulțit cu „ceea ce se cere" (c), se împarte cu „ceea ce este dat" (a). Cîtul este rezultatul pentru mărimea căutată (x). Brahmagupta adăuga că primul și ultimul termen, adică ceea ce se dă și se cere, trebuie să fie de același fel. În toate lucrările cele trei numere date poartă denumirile indicate și în rezolvare se așază în linie:

ceea ce este dat — rezultatul — ceea ce se cere.

De exemplu, în problema lui Sriddhara, în a cărei condiție se spune că $1\frac{1}{4}$ măsuri de lemn de santal costă $10\frac{1}{2}$ și se întreabă cît costă $9\frac{1}{4}$ măsuri, numerele se așază astfel:

$$\frac{5}{4} \quad \frac{21}{2} \quad \frac{37}{4};$$

răspunsul $\frac{21 \cdot 4 \cdot 37}{5 \cdot 2 \cdot 4}$ se mai transpune în anumite unități monetare.

Brahmagupta și autorii cei mai tîrzii au adăugat regula de trei inversă și regulile de 5, 7, 9 și 11, denumite *pantarașika*, *saptarașika*, *navarașika* și *ekadașarașika*, al căror sens ad litteram este: „cu 5 locuri", „cu 7 locuri", „cu 9 locuri" și „cu 11 locuri". Regula de trei inversă servește la rezolvarea problemelor în care mărimea căutată este invers proporțională cu mărimea „cerută", de felul următoarei probleme populare în evul mediu: a oameni execută o lucrare în b zile: în cîte zile vor executa aceeași lucrare c oameni? Aici:

$$\frac{a}{c} = \frac{x}{b}.$$

În regula celor cinci mărimi, numărul căutat x care satisface proporțiile:

$$\frac{x}{y} = \frac{d}{e}, \quad \frac{y}{a} = \frac{b}{c}$$

se găsește direct sub forma $\frac{abd}{ce}$. Să ilustrăm cele spuse printr-o problemă din *Lilavati*: dobînda pentru 100 într-o lună este 5: care este dobînda lui 16 pe 12 luni? Notînd prin y dobînda lui 100 pentru 12 luni și prin x — dobînda lui 16 pentru 12 luni, avem:

$$\frac{y}{5} = \frac{12}{1}, \quad \frac{x}{y} = \frac{16}{100}.$$

Bhaskara dă răspunsul așezînd în conformitate cu regula celor cinci numerele 16, 12, 5 și 100, 1 pe două coloane și împărțind produsul numerelor din coloana mai lungă prin produsul din cea mai scurtă.

Expunerea regulilor poartă un caracter formal. De pildă, Sriddhara scrie că în asemenea probleme termenul mijlociu se în-

mulțește cu primul și se împarte cu ultimul. Dar învățații indieni înțelegeau desigur baza lor generală și legăturile reciproce. Bhaskara I, comentînd lucrarea lui Aryabhata I, spune: „Aici, *akaria*[1] Aryabhata descrie doar regula de trei. Cum se obțin atunci regulile binecunoscute de cinci etc.? Eu voi spune următoarele: akaria a descris doar bazele proporției. Toate celelalte reguli, ca regula de cinci etc., decurg din această regulă fundamentală a proporției. Cum? Regulile de cinci și celelalte mărimi sînt alcătuite din combinații ale regulii de trei... În regula de cinci, există două reguli de trei, în cea de șapte — trei reguli de trei etc." [54, I, p. 211].

Nu sînt noi nici problemele unde se caută o mărime care împreună cu celelalte trei date formează o proporție geometrică. Ele se rezolvau pretutindeni și înainte vreme. Indienii separă această grupă de probleme și creează un sistem, deși greoi, dar elegant, de procedee mecanice, cu terminologie proprie, cu o anumită dispoziție de scriere a numerelor date și o anumită ordine de calcul.

Din India, regula de trei se răspîndește spre vest în țările Islamului și mai departe în Europa. Aici ea devine procedeul principal de rezolvare a problemelor de aritmetică, păstrîndu-i-se timp de secole un caracter formal de învățare și de aplicare. Regulile de trei sînt treptat eliminate din învățămîntul școlar european de-abia în secolul al XIX-lea.

Simbolurile algebrice. În domeniul algebrei, indienii se limitează aproape exclusiv la ecuații numerice de gradul întîi și al doilea. Aici nu găsim o dezvoltare atît de înaltă a metodelor numerice ca în China, în schimb indienii obțin succese considerabile în elaborarea simbolurilor, în generalizarea regulilor de rezolvare a ecuațiilor de gradul al doilea, în operațiile cu expresii iraționale și în folosirea numerelor negative.

Sistemele de simboluri ale indienilor cuprind un cerc mare de noțiuni și operații algebrice. Multe simboluri reprezintă prescurtări ale termenilor corespunzători.

La Brahmagupta, mărimea necunoscută se numește *iavat-tavat*, (cantitatea, ad litteram: atît — cît); alte necunoscute sînt desemnate prin cuvinte care înseamnă diferite culori: prescurtări ale acestor cuvinte servesc drept simboluri pentru cîteva necunoscute (pînă la șase). Semnele indiene ale necunoscutelor „ia", „ka",

[1] *Akaria* înseamnă învățat — *N.A.*

„ni“, „pi“, „lo“ erau: पा, का, नी, पी, लो. Pentru deosebirea termenului liber din fața numărului corespunzător se pune semnul „ru“ de la *rupa* (moneda rupia). Prezentăm mai jos acești termeni — simboluri în transcriere romînească

Termenul	Simbolul	Semnificația
rupa	„ru“	termen liber
iavat-tavat	„ia“	(prima) necunoscută
kalaka (negru)	„ka“	a doua necunoscută
nilaka (albastru)	„ni“	a treia necunoscută
pitaka (galben)	„pi“	a patra necunoscută
pandu (alb)	„pa“	a cincea necunoscută
lohita (roșu)	„lo“	a șasea necunoscută

Puterile se formează prin combinarea termenului *varga* (pătrat), *ghana* (corp, cub) și cuvîntul *ghata*. Spre deosebire de Diofant, a cărui scriere corespunde adunării indicilor (de pildă *diuna-mokiubos*, pătrato-cubul este puterea a cincea), în simbolica indiană poziția în rînd a indicilor însemna înmulțirea lor, adică *varga-ghana* este puterea a șasea și nu a cincea. Termenul *ghata* se folosește pentru adunarea indicilor; așa de pildă puterea a cincea se numește *varga-ghana-ghata*. Astfel:

Termenul	Simbolul	Semnificația
varga	„va“	puterea a 2-a
ghana	„gha“	puterea a 3-a
varga-varga	„va-va“	puterea a 4-a
varga-ghana-ghata	„va-ga-ghata“	puterea a 5-a
varga-ghana	„va-gha“	puterea a 6-a
varga-varga-ghana-ghata	„va-va-ga-ghata“	puterea a 7-a
varga-varga-varga	„va-va-va“	puterea a 8-a
ghana-ghana	„gha-gha“	puterea a 9-a

Semnul puterii se pune după semnul necunoscutei.

Mai departe, la Brahmagupta există semnul iraționalității pătratice „k“, prescurtarea lui *karani*, ceea ce în timpuri mai

vechi, de pildă în *Regulile funiei*, însemna rădăcina pătrată; din timpul lui Aryabhata I (poate și mai devreme) rădăcina pătrată se numește *varga-mula*, iar cea cubică — *ghana-mula*.

La scădere, deasupra coeficientului scăzătorului se pune punct; scrierea alăturată corespunde adunării. Semnul egalității lipsește la Brahmagupta; ambele părți ale ecuațiilor se scriu una sub alta.

Notațiile arătate permit să se scrie simbolic expresii algebrice destul de complicate. Să dăm cîteva exemple din lucrarea lui Brahmagupta intitulată *Învățătura perfecționată a lui Brahma*.

Pentru a raționaliza numitorul expresiei:

$$\frac{3 + \sqrt{450} + \sqrt{75} + \sqrt{54}}{\sqrt{18} + \sqrt{3}},$$

Brahmagupta înmulțește numărătorul fracției „ru“ 3 „k“ 450 „k“ 75 „k“ 54 și numitorul fracției „k“ 18 „k“ 3 prin „k“ 18 „k“ $\dot{3}$, adică prin $\sqrt{18} - \sqrt{3}$ și obține:

„ru“ 75 „k“ 675, împărțit prin „ru“ 15, adică:

$$\frac{75 + \sqrt{675}}{15},$$

și, în sfîrșit, „ru“ 5 „k“ 3, adică $5 + \sqrt{3}$.

Termenii lipsă din ecuațiile incomplete se înlocuiesc prin semnul zero (ca mai tîrziu la algebriștii chinezi), iar înainte de rezolvare, ecuațiile se reduc la forma canonică cu termenul liber izolat. Căpătînd într-o problemă ecuația:

$$10x - 8 = x^2 + 1,$$

Brahmagupta o scrie sub forma,

„ia va“ 0 „ia“ 10 „ru“ $\dot{8}$
„ia va“ 1 „ia“ 0 „ru“ 1

și o aduce la forma canonică:

„ia va“ 1 „ia“ $\dot{10}$ „ru“ $\dot{9}$,

adică:

$$-9 = x^2 - 10x.$$

Iată încă un exemplu de ecuație liniară cu trei necunoscute:

„ia“ 197 „ka“ $\dot{1644}$ „ni“ $\dot{1}$ „ru“ 0
„ia“ 0 „ka“ 0 „ni“ 0 „ru“ 6 302,

adică:

$$197x - 1644y - z = 6\,302.$$

Notațiile algebrice ale lui Brahmagupta sînt folosite și de alții, ca de pildă de Bhaskara al II-lea.

Simbolica din manuscrisul de la Bahșali este originală. Aici necunoscuta se numește *sunia*, adică gol, ca și zero, poate fiindcă locul necunoscutei se păstrează în minte pînă la determinarea ei și nu este ocupat; ca semn al necunoscutei servește punctul. Există semnul egalității *pha*, prima silabă din cuvîntul corespunzător *phalam*, semnul adunării *iu* de la *iuta* și al împărțirii *bha* de la *bhaga*, adică, parte. Ca semn al scăderii servește o cruce de felul semnului nostru +, care se pune după scăzător; semnul împărțirii ← → se pune după împărțitor. Pentru înmulțire, factorii se așază alături. Grupele de numere se încadrează între linii și există o oarecare anticipare a folosirii parantezelor. Astfel,

$$\left|\begin{matrix} 5 & 7 & \\ 1 & 1 & \text{iu} \end{matrix}\right| \text{ pha } 12 \text{ înseamnă: } \frac{5}{1} + \frac{7}{1} = 12,$$

$$\left|\begin{matrix} 5 & 32 \\ 8 & 1 \end{matrix}\right| \text{ pha } 20 \text{ înseamnă: } \frac{5}{8} \cdot \frac{32}{1} = 20.$$

Pentru notarea mai puțin complicată a necunoscutelor, în manuscris se folosesc prescurtări ale numerelor ordinale: *pra* (*pratama* — primul), *dvi* (*dvitia* — al doilea), *tr* (*tritia* — al treilea) etc.

Învățații indieni fac un mare pas în crearea algebrei simbolice, deși notațiile lor sînt greoaie, iar înseși semnele, adică literele sanscrite, au un contur complicat. Urmașii matematicienilor indieni — învățații țărilor arabe și din Asia centrală, nu numai că n-au mers mai departe, dar timp de secole au folosit exclusiv scrierea verbală a expresiilor algebrice.

Ecuațiile liniare și de gradul al doilea. La Aryabhata există probleme cu ecuații liniare, cu o singură necunoscută $ax + b = c$. Deși procedeul de rezolvare nu este indicat, această rezolvare este mai curînd algebrică, ca ceva mai tîrziu la Brahmagupta. Aryabhata dă într-o problemă regula de calcul a costului unui obiect, cînd se știe că capitalurile a doi oameni, alcătuite fiecare dintr-un număr dat de obiecte de egală valoare și din sume de bani, sînt egale între ele ($ax + b = a_1x + b_1$).

Este interesantă și o altă problemă a lui Aryabhata care apare apoi în întreaga literatură mondială de algebră sub denumirea de „problema curierilor". Problema este luată din astronomie și face parte din lucrarea *Aryabhatiam*, consacrată îndeosebi acestei științe. Se cere să se determine momentul întîlnirii a doi aștri, fiind date vitezele și distanța dintre ei. Aryabhata spune că dacă aștrii se mișcă unul spre altul, trebuie împărțită distanța la suma vitezelor, iar dacă aștrii se deplasează în aceeași direcție — la diferența vitezelor, și mai adaugă că aceste cîturi dau momentul întîlnirii în trecut sau în viitor. Dacă se notează prin a distanța, prin v_1 și v_2 vitezele, atunci în cazul mișcării în aceeași direcție,

$$t = \frac{a}{v_1 - v_2},$$

iar cînd $v_1 < v_2$, întîlnirea aștrilor s-a produs în trecut. Textul indian nu dă posibilitate să se rezolve întrebarea dacă Aryabhata cunoștea sau nu numerele negative și semnificația lor. Se poate spune doar că cu un secol mai tîrziu, Brahmagupta operează fără dificultăți cu numerele negative. Totuși, în lucrările lui Brahmagupta și ale urmașilor lui nu întîlnim soluții negative pentru ecuații liniare.

Pe același plan cu ecuațiile liniare cu o necunoscută, la autorii de mai tîrziu apar probleme care se reduc la sisteme de ecuații cu mai multe necunoscute. Matematicienii indieni, spre deosebire de cei chinezi, n-au creat un algoritm unitar, pentru rezolvarea unor asemenea sisteme. Aceste probleme servesc mai curînd pentru rafinarea inteligenței, calitate pe care Bhaskara al II-lea o considera ca trăsătură caracteristică a algebrei. Ca exemplu poate servi următoarea rezolvare a unei probleme pe care o dă Bhaskara: dacă A va căpăta de la B 100 de rupii, el va deveni de două ori mai bogat decît ultimul, iar dacă A îi va da 10 rupii lui B, acesta va deveni de șase ori mai bogat decît primul. În loc de a scrie sistemul

$$\left.\begin{aligned} x + 100 &= 2(y - 100), \\ y + 10 &= 6(x - 10), \end{aligned}\right\}$$

Bhaskara consideră că A are $2x - 100$, în timp ce B, conform primei condiții, are $x + 100$. Aceasta duce imediat la o ecuație cu o singură necunoscută:

$$x + 110 = 6(2x - 110),$$

de unde $x = 70$ etc. O asemenea introducere a unei necunoscute auxiliare aminteşte procedeele lui Diofant.

Primele probleme de ecuaţii complete de gradul al doilea sînt date de *Aryabhatiam*. Într-una din ele se cere să se găsească numărul n al termenilor unei progresii aritmetice, cunoscînd suma S, primul termen a şi raţia d. Ecuaţia respectivă de gradul al doilea:

$$dn^2 + (2a - d)n = 2S,$$

nu se aminteşte, dar răspunsul dat în cuvinte este echivalent cu reprezentarea rădăcinii ei pozitive prin radicali. Într-o altă problemă cu dobîndă compusă, condiţia este următoarea: un capital p ($p = 100$) dat la dobîndă aduce pe lună o valoare necunoscută (x). Această creştere se dă apoi cu dobîndă pentru t luni ($t = 6$). Creşterea iniţială împreună cu creşterea sa arătată alcătuiesc q ($q = 16$). Să se găsească valoarea procentului.

Aici ecuaţia ar fi fost:

$$tx^2 + px = qp.$$

Rezolvarea se prezintă în următoarele cuvinte: înmulţeşte suma creşterii capitalului şi a creşterii acestei creşteri (adică q) cu timpul şi cu capitalul, adaugă la aceasta pătratul jumătăţii capitalului, extrage de aici rădăcina pătrată, apoi scade jumătatea capitalului şi împarte cîtul la timp. Astfel:

$$x = \frac{\sqrt{qpt + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \frac{p}{2}}{t} = 10.$$

Probleme similare cu procente există şi la Brahmagupta, Magavira şi alţi autori. Este interesant de observat că în *Bazele algebrei*, deşi A. Clairaut (1746) avea o tendinţă vădită spre o expunere cît mai naturală şi mai apropiată de nevoile practicii, prima problemă cu ecuaţii de gradul al doilea este de asemenea o problemă cu procente compuse.

Ecuaţiile de gradul al doilea sînt studiate mai amănunţit la Brahmagupta. Progresul substanţial în tratarea acestei probleme constă în aceea că se formulează o regulă generală pentru rezolvarea ecuaţiilor de gradul al doilea aduse la o formă canonică unică:

$$ax^2 + bx = c, \ a > 0,$$

în care coeficientul b şi termenul liber c pot fi şi negativi. Abia în anul 1544, M. Stiefel formulează din nou regula generală de rezolvare a ecuației

$$x^2 = bx + c$$

pentru diferite combinaţii ale semnelor coeficienţilor. Regula verbală a lui Brahmagupta corespunde formulei:

$$x = \frac{\sqrt{ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}}{a}.$$

Ea se obține cu ajutorul unei completări pînă la pătratul unui binom, fapt pe care Brahmagupta îl numește „îndepărtarea termenului mijlociu". Ceva mai diferită este regula lui Sriddhara, care la început înmulţeşte cu $4a$ toţi termenii ecuaţiei, ceea ce permite ca rădăcina să se prezinte sub o formă fără fracție la numărător:

$$x = \frac{\sqrt{4ac + b^2} - b}{2a}.$$

După cum am spus, procedeul general de rezolvare a ecuaţiilor de gradul al doilea cu rădăcina pozitivă se bazează pe folosirea numerelor negative. Un exemplu de o asemenea ecuaţie este ecuația:

$$-9 = x^2 - 10x,$$

din lucrarea lui Brahmagupta amintită mai înainte (p. 147). Brahmagupta prezintă regulile de adunare şi de scădere a numerelor pozitive şi negative.

Numerele pozitive se numesc *dhana* sau *sva*, ceea ce înseamnă „avere", iar cele negative — *rina* sau *kşaia* — „datorie". Aceste reguli sînt: suma a două averi este o avere, a două datorii este o datorie; suma unei averi şi a unei datorii este diferenţa lor, iar dacă acestea sînt egale — este zero. Suma dintre zero și o datorie este datorie, suma unei averi cu zero este avere, a două zeruri este zero. Trecînd la scădere, Brahmagupta continuă: ceea ce este mai mic se scade din ceea ce este mai mare, averea din avere, datoria din datorie, iar dacă se scade ceea ce este mai mare din ce este mai mic, valoarea prisosului se schimbă. Datoria scăzută din zero devine avere, iar averea, datorie. Datoria fără zero

rămîne datorie. averea, avere. Pentru a scădea din datorie o avere sau datoria dintr-o avere, trebuie făcută suma lor. Vorbind despre „mai mare“ și „mai mic“ în cazul numerelor negative, Brahmagupta subînțelege valorile lor absolute; înțelesul modern al relațiilor ordinale între numerele negative a fost stabilit în Europa de-abia în epoca Renașterii.

După cum se vede, regulile lui Brahmagupta sînt în esență aceleași ca și vechea *Matematica în nouă cărți* (pp. 53—54), dar matematicianul indian mai adaugă între altele și regulile:

$$+a+(-a)=0,$$
$$0+0=0,$$
$$\pm a-0=\pm a.$$

Regulile înmulțirii și ale împărțirii numerelor negative se întîlnesc pentru prima oară la Bhaskara al II-lea, dar probabil el avusese și precursori. Produsul a două averi sau a două datorii dă o avere. Produsul între o avere și o datorie — datorie; același lucru se întîmplă și la împărțire. Dar Bhaskara merge și mai departe, extinzînd regula asupra extragerii rădăcinii pătrate din numere pozitive. El spune că averea are două rădăcini: una este avere, cealaltă datorie. Aici se introduce deci dubla valoare a rădăcinilor pătrate dintr-un număr pozitiv. Bhaskara se oprește însă aici și nu ajunge să introducă numerele imaginare. Rădăcina dintr-o datorie, declară el, nu există, deoarece datoria nu este un pătrat.

Primele noțiuni despre numerele negative, indienii le datorează probabil matematicii chineze[1]: dar după cum vedem, în India capitolul despre numerele negative capătă în algebră o dezvoltare considerabilă și aplicații noi.

Bhaskara cunoaște dubla valoare a rădăcinilor ecuațiilor de gradul al doilea: dar este îndoielnic că el ar fi fost primul matematician indian care să fi stăpînit acest fapt, care îi era cunoscut lui Muhamed al-Horezmi din Bagdad încă în prima jumătate a secolului al IX-lea. Nu este exclus ca arabii și indienii să se fi bazat aici pe o tradiție comună mai veche.

Dacă matematicienii din India au ajuns în mod independent la ambele descoperiri amintite, atunci succesiunea lor istorică se poate explica în mod diferit.

---

[1] Să amintim că unele probleme de geometrie combinate cu algebră ale lui Brahmagupta și Bhaskara coincid cu problemele învățaților chinezi (p. 69).

Să considerăm ecuația lui Bhaskara

$$x^2 - 64x = -768$$

și să completăm partea ei din stînga pînă la obținerea unui pătrat

$$x^2 - 64x + 32^2 = 256.$$

Partea din stînga este un pătrat atît pentru $x - 32$, cît și pentru $32 - x$ și de aceea (considerînd mai întîi că $\sqrt{256}$ are o singură valoare 16) se pot proba două valori: $x = 32 + 16 = 48$ și $x = 32 - 16 = 16$. Ambele numere sînt soluții ale ecuației, și amîndouă se pot obține din coeficienții ecuației cu ajutorul unei singure reguli, dacă se admite formal că rădăcina pătrată din 256 are două semne ($\pm$).

Pe de altă parte, se poate imagina că la început fusese descoperită dubla valoare a rădăcinii pătrate, în legătură cu stabilirea regulii de înmulțire a numerelor negative, și că această descoperire fusese folosită în rezolvarea ecuației de gradul al doilea.

Ecuația prezentată apare la Bhaskara în următoarea problemă: un grup de maimuțe se distrează; a opta parte din numărul lor total la pătrat se joacă în pădure, iar celelalte douăsprezece țipă pe vîrful unui deal. Spune-mi cîte maimuțe sînt cu totul? Bhaskara adoptă aici ambele soluții subliniind că în ecuația

$$(x - 32)^2 = 256,$$

32 este mai mare decît $\sqrt{256}$ și de aceea rădăcina pătrată se poate lua atît pozitivă, cît și negativă. Bhaskara cunoaște și soluțiile negative ale ecuațiilor dar le neglijează, spunînd că în mod obișnuit ele nu se iau în considerare.

Bhaskara respinge în unele cazuri și una din rădăcinile pozitive, dacă ea nu este în concordanță cu una dintre condițiile problemei. Astfel, determinînd numărul de maimuțe din grup, din totalul căruia o cincime fără trei, la pătrat, se ascunde într-o peșteră și se vede o singură maimuță urcată într-un copac, adică, rezolvînd ecuația:

$$x = \left(\frac{x}{5} - 3\right)^2 + 1 \quad \text{sau} \quad x^2 - 55x = -250$$

cu rădăcinile 50 și 5, Bhaskara nu acceptă a doua rădăcină, deoarece numărul $\frac{1}{5} \cdot 5 - 3$ este negativ. Un comentator de mai tîrziu observă că această rădăcină s-au fi putut accepta modificînd

însă formularea problemei („o cincime din grup, scăzută din trei“); dar în acest caz va trebui să se renunțe la rădăcina 50.

Unele probleme se exprimă prin ecuații de gradul al doilea în raport cu o variabilă auxiliară. De pildă, la Bhaskara al II-lea apare ecuația:

$$\frac{x}{2} + 4\sqrt{x} + 10 = x,$$

iar la Magavira:

$$\left(x - \frac{x^2}{12 \cdot 30}\right) - \frac{1 \cdot 3}{20 \cdot 16}\left(x - \frac{x^2}{12 \cdot 30}\right)^2 = 20,$$

ecuație pe care el o rezolvă considerînd la început ca necunoscută pe

$$x - \frac{x^2}{12 \cdot 30}.$$

În rezolvarea ecuațiilor de grad superior, matematicienii indieni n-au ajuns la rezultate de importanță generală. Bhaskara al II-lea are exemple de ecuații dinainte alese de gradul al treilea și al patrulea ale căror rădăcini întregi se găsesc cu ajutorul unor transformări simple. În ecuația

$$x^3 - 6x^2 + 12x = 35$$

pînă la un cub perfect în partea din stînga, lipsește —8, astfel încît urmează:

$$(x - 2)^3 = 27.$$

Pentru a rezolva ecuația

$$x^4 - 2x^2 - 400x = 9\,999,$$

Bhaskara adaugă la ambele părți cantitatea $4x^2 - 400x + 1$, de unde:

$$(x^2 + 1)^2 = (2x + 100)^2$$

etc.

Merită a fi amintite operațiile cu numere și expresii iraționale. Cu ajutorul regulilor

$$\sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

$$\sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b},$$

împrumutate, poate, de la greci, Bhaskara al II-lea transformă expresii iraționale numerice de gradul al doilea. Mai sus s-a arătat cum se elimină cele mai simple expresii iraționale de gradul al doilea de la numitorii fracțiilor. El simplifică în acest fel expresii destul de complicate, ca de pildă:

$$\frac{\sqrt{9}+\sqrt{54}+\sqrt{450}+\sqrt{75}}{5+\sqrt{3}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5};$$

se poate presupune că în asemenea cazuri, transformările inițiale fuseseră cele efectuate asupra părții din dreapta. Alte transformări, ca de pildă

$$\sqrt{5+\sqrt{24}}=\sqrt{2}+\sqrt{3},$$

s-au putut folosi pentru o extragere aproximativă mai comodă a rădăcinilor.

Pentru extragerea aproximativă a rădăcinilor pătrate, în manuscrisul de la Bahșali se aplică algoritmul de iterație, cunoscut încă de vechii babilonieni, iar apoi de Heron: pentru $\sqrt{A}=\sqrt{a^2+r}$, unde a^2 este cel mai mare pătrat întreg în A, se iau aproximările[1]:

$$a_1=a,$$

$$a_2=a+\frac{r}{2a},$$

$$a_3=a+\frac{r}{2a}-\frac{\left(\frac{r}{2a}\right)^2}{2\left(a+\frac{r}{2a}\right)^2},$$

---

[1] A treia aproximare a_3 pentru un $\frac{r}{a}$ mic diferă foarte puțin de suma celor trei termeni ai dezvoltării rădăcinii într-o serie de puteri:

$$\sqrt{a^2+r}=a+\frac{r}{2a}-\frac{1}{8}\frac{r^2}{a^3},$$

deoarece:

$$\frac{\left(\frac{r}{2a}\right)^2}{2\left(a+\frac{r}{2a}\right)}=\frac{1}{8}\frac{r^2}{a^3+\frac{ra^2}{2}}.$$

care sînt mediile aritmetice pentru

$$a_1 = a, \qquad b_1 = \frac{A}{a},$$

$$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \qquad b_2 = \frac{A}{a_2},$$

$$a_3 = \frac{a_2 + b_2}{2} \qquad b_3 = \frac{A}{a_3},$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

Acest procedeu îl aplică ulterior al-Hassar la sfîrșitul secolului al XII-lea, Leonardo Pisano și alții.

Operațiile efectuate fără dificultăți cu radicalii numerici contribuie la dezvoltarea noțiunii de număr irațional cu aceleași drepturi ca și numerele întregi și raționale. Totodată, în operele indienilor lipsesc atît raționamentele teoretice despre natura aritmetică a iraționalelor, cît și un studiu sistematic al însușirilor și al corelațiilor dintre iraționalele pătratice.

Ecuații nedeterminate. Primul imbold spre rezolvarea ecuațiilor nedeterminate îl dau în India, la fel ca și în China, problemele calendaristice și de astronomie, în care era necesar să se determine perioadele de repetiție ale acelorași poziții relative ale aștrilor cerești (Soare, Lună, planete) cu diferite timpuri de revoluție, precum și alte probleme legate de acestea. Aici totul se reduce la găsirea unor numere întregi care, fiind împărțite prin niște numere date, să dea anumite resturi date, adică problema se reduce la găsirea unor numere care să satisfacă ecuații și sisteme de ecuații liniare nedeterminate. Am întîlnit mai înainte o asemenea chestiune la Sun-țzî; o problemă analogă cu alte date numerice (împărțitorii sînt 2, 3 și 5, iar resturile — 1, 2, 3) există la Bhaskara al II-lea, care analizează și probleme cu conținut pur calendaristic.

Sînt foarte probabile legăturile între matematicienii Indiei și ai Chinei, în rezolvarea problemelor de analiză nedeterminată. Atît unora, cît și altora le revine marele merit de a fi ridicat problema rezolvării ecuațiilor nedeterminate în numere întregi. După cum se pare și studiile eminente ale lui Diofant au influențat pe indieni. După numele matematicianului din Alexandria, capitolul respectiv din teoria numerelor poartă acum numele de analiza diofantiană, deși Diofant ceruse doar ca soluțiile să fie raționale. În analiza nedeterminată, indienii obțin succese mari și creează metode originale. Vom analiza mai amănunțit procedeul

lor de rezolvare a ecuației liniare generale cu două necunoscute [74].

Regula de rezolvare în numere întregi a ecuației nedeterminate o formulează încă Aryabhata I, dar mai amănunțit o expun Brahmagupta și Bhaskara al II-lea. Aceasta este așa-numita metodă a „împrăștierii" sau a „fărîmițării".

Ecuația se ia sub forma:

$$ax + b = cy. \qquad (1)$$

Mai întîi Bhaskara expune algoritmul pentru a găsi cel mai mare divizor comun a două numere; mai departe se presupune că ecuația s-a simplificat cu (a, c), adică cu cel mai mare divizor comun al coeficienților necunoscutelor. Incontestabil că Bhaskara știe că ecuația este nerezolvabilă în numere întregi, dacă termenul liber nu se împarte prin (a, c). Procedeul de rezolvare nu se deosebește în esență de cel care se expune astăzi în manuale, folosind fracțiile continue. Vom expune pe scurt acest procedeu în notațiile noastre.

Fie $a > c$ și cîtul $\frac{a}{c}$ se exprimă prin fracția continuă:

$$\frac{a}{c} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}$$

Să notăm ca de obicei prescurtat o asemenea fracție:

$$[q_0, q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}, q_n].$$

Fracția redusă $\frac{P_k}{Q_k}$ se numește $[q_0, q_1, \ldots, q_k]$. Penultima fracție redusă $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ este $[q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}]$, iar ultima $\frac{P_n}{Q_n}$ coincide cu $\frac{a}{c}$. Atunci toate soluțiile posibile ale ecuației (1) pentru $(a, c) = 1$ se exprimă prin egalitățile:

$$x = (-1)^n bQ_{n-1} + Q_n t,$$
$$y = (-1)^n bP_{n-1} + P_n t, \qquad (2)$$

unde t poate lua orice valori întregi.

Este esențial să reamintim că toate elementele q_k ale fracției continue se obțin în procesul căutării celui mai mare divizor comun (a,c), după algoritmul lui Euclid sub forma unor cîturi rezultate din împărțirile succesive:

$$a = cq_0 + c_1,$$
$$c = c_1q_1 + c_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$c_{n-2} = c_{n-1}\, q_{n-1} + c_n,$$
$$c_{n-1} = c_nq_n,$$

în care c_n este tocmai (a,c); dacă $c_n = 1$, atunci $(a,c) = 1$.

Să analizăm două exemple rezolvate de Bhaskara.

1. Ecuația:

$$100\,x + 90 = 63\,y \quad \text{(pentru } n \text{ impar)}.$$

Dezvoltarea lui $\frac{100}{63}$ în fracție continuă sau găsirea celui mai mare divizor comun (100, 63) ne dă:

$$\frac{P_7}{Q_7} = \frac{100}{63} = [1, 1, 1, 2, 2, 1, 3].$$

În cazul de față $n = 6$ și

$$\frac{P_6}{Q_6} = [1, 1, 1, 2, 2, 1] = \frac{27}{17}.$$

De aceea, conform (2)

$$x = 90\cdot17 + 63t = 1530 + 63t, \qquad y = 90\cdot27 + 100\,t = 2430 + 100\,t.$$

Pentru $t = -24$ se obțin cele mai mici soluții întregi pozitive

$$x = 18, \qquad y = 30.$$

Calculele lui Bhaskara într-o transcriere ceva mai redusă sînt:

$$1\cdot\ 90 + 0 = 90,$$
$$2\cdot\ 90 + 90 = 270,$$
$$2\cdot 270 + 90 = 630,$$
$$1\cdot 630 + 270 = 900,$$
$$1\cdot 900 + 630 = 1530,$$
$$1\cdot1530 + 900 = 2430.$$

După aceasta, Bhaskara obţine, aşa după cum s-a arătat, cele mai mici soluţii întregi pozitive $x = 28$, $y = 30$.

2. Ecuaţia:

$$60\,x + 16 = 13\,y \text{ (pentru } n \text{ impar).}$$

Aici,

$$\frac{P_6}{Q_6} = \frac{60}{13} = [4, 1, 1, 1, 1, 2]$$

şi

$$\frac{P_5}{Q_5} = [4, 1, 1, 1, 1] = \frac{23}{5},$$

astfel încît:

$$x = -16 \cdot 5 + 13\,t = -80 + 13\,t,$$
$$y = -16 \cdot 23 + 60\,t = -368 + 60\,t.$$

Pentru $t = 7$ se obţin cele mai mici soluţii întregi pozitive:

$$x = 11, \; y = 52.$$

La Bhaskara

$$\begin{aligned} 1 \cdot 16 + 0 &= 16, \\ 1 \cdot 16 + 16 &= 32, \\ 1 \cdot 32 + 16 &= 48, \\ 1 \cdot 48 + 32 &= 80, \\ 4 \cdot 80 + 48 &= 360. \end{aligned}$$

Scăzînd din 13, numărul 80, Bhaskara obţine $x = -67$, iar $y = -308$, îl găseşte din 60 — 368. Apoi el adaugă $6 \cdot 13$ la -67 şi $6 \cdot 60$ la -308, obţinînd soluţiile cele mai mici $x = 11$, $y = 52$.

Nu ne putem îndoi că metoda fărîmiţării s-a creat în urma faptului că ecuaţiile de tipul (1) se rezolvau după un procedeu care pînă de curînd se expunea în manualele şcolare de algebră şi care este echivalent cu procedeul descris. Pentru $c < a$ din ecuaţia (1) se exprimă:

$$y = \frac{ax + b}{c} = q_0 x + \frac{c_1 x + b}{c},$$

după care determinarea unui x întreg pentru care va fi întreg şi

$$z = \frac{c_1 x + b}{c},$$

se reduce la rezolvarea unei ecuații analoge cu coeficientul c_1 mai mic decît c. Procesul se continuă pînă cînd penultima necunoscută auxiliară se exprimă prin ultima, în coeficienți întregi.

Dintre problemele cu mai multe necunoscute, vom aminti una despre păsări, care se poate traduce prin două ecuații cu patru necunoscute:

$$x + y + z + u = 100,$$

$$3 \cdot \frac{x}{5} + 5 \cdot \frac{y}{7} + 7 \cdot \frac{z}{9} + 9 \cdot \frac{u}{3} = 100.$$

După cuvintele lui Bhaskara al II-lea, acest exemplu este luat din autori vechi.

Este elegant procedeul de rezolvare a ecuației de gradul al doilea

$$xy = ax + by + c, \tag{3}$$

care se transformă, devenind:

$$(x - b)(y - a) = c + ab. \tag{3'}$$

Dacă numărul $c + ab$ se descompune în factori întregi, atunci soluțiile întregi ale ecuației date se obțin prin egalarea doi cîte doi a factorilor din partea stîngă și cea dreaptă. Transformarea algebrică se explică și prin una geometrică, folosind figura unui gnomon cunoscută încă de autorii *Regulilor funiei*. Diferența dintre dreptunghiul xy și gnomonul $ax + by - ab$ (fig. 36) se reprezintă prin dreptunghiul $(x - b)(y - a)$; pe de altă parte, conform condiției, ea este egală cu $ab + c$; de aici rezultă (3')... Acesta este un exemplu interesant de folosire a noțiunilor geometrice în teoria numerelor

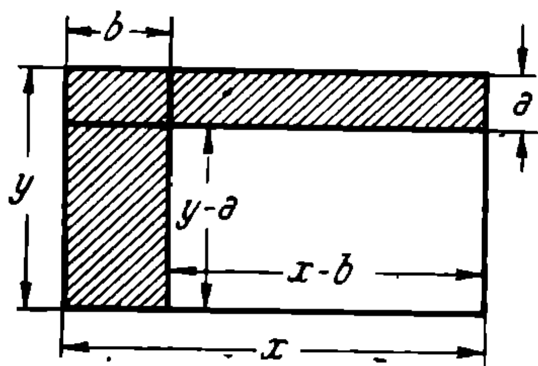


Fig. 36

O realizare remarcabilă a matematicienilor indieni în teoria numerelor este rezolvarea în numere întregi a ecuației:

$$y^2 = ax^2 + b \tag{4}$$

și a unui caz particular important al acestei ecuații:

$$y^2 = ax^2 + 1; \tag{5}$$

aici a este un număr întreg nepătrat.

Asemenea ecuații se întîlnesc pentru întîia oară în matematica greacă. Astfel este mai întîi, ecuația:

$$y^2 = 2x^2 \pm 1,$$

la care s-a ajuns în timpul căutării aproximărilor raționale pentru $\sqrt{2}$; se știe că procesul regulat de obținere a soluțiilor întregi și din ce în ce mai mari ale ei este descris în secolul al II-lea de Teon din Smirna. În general, ecuația (5) are o mare importanță în aproximarea rațională cît mai exactă a lui $\sqrt{a}$. Mai departe, apare ecuația:

$$y^2 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 353\, x^2 + 1,$$

care se găsește mai tîrziu la Arhimede. În expunerea scrisă a problemei păstrată pînă în zilele noastre, ecuația propriu-zisă lipsește; soluția cea mai mică se exprimă prin numere imense și este greu de crezut că Arhimede ar fi dus rezolvarea ei pînă la obținerea unui rezultat numeric.

Ecuațiile (4) și (5) au fost analizate de Brahmagupta și de Bhaskara al II-lea.

Pentru rezolvarea ecuației (5), Bhaskara expune prin exemple metoda care în prezent se numește metoda ciclică. Mai întîi se aleg numerele x_1, y_1 și un b_1 corespunzător, legate prin egalitatea

$$ax_1^2 + b_1 = y_1^2, \tag{6}$$

căutîndu-se ca b_1 să fie cît mai mic posibil $\left(\text{drept } x_1 \text{ și } y_1 \text{ se pot încerca termenii aproximărilor } \sqrt{a} \approx \frac{y_1}{x_1}\right)$; x_1 și b_1 sînt prime între ei, deoarece, dacă ar fi avut un factor comun, pătratul lui ar fi fost factor al tuturor termenilor și egalitatea (6) după reducere s-ar fi putut înlocui printr-alta mai simplă. În continuare se scrie ecuația liniară:

$$\frac{x_1 z + y_1}{b_1} = x_2, \text{ adică } x_1 z + y_1 = b_1 x_2,$$

care se poate rezolva după procedeul „fărîmițării“, iar z și x_2 se iau întregi, astfel încît $z^2 - a$ să fie cît mai mic posibil. După cum e ușor de verificat, numărul $\frac{z^2 - a}{b_1} = b_2$ este întreg, iar expresia $ax_2^2 + b_2$ este pătratul unui număr întreg y_2^2, deci se obține o nouă egalitate:

$$ax_2^2 + b_2 = y_2^2. \tag{7}$$

Continuînd procesul se pot obţine consecutiv soluţiile unui lanţ de ecuaţii de aceeaşi formă, la capătul căruia se ajunge la egalitatea cerută:

$$ax_k^2 + 1 = y_k^2,$$

cu termenul liber egal cu 1.

Ecuaţia (5), cînd a nu este un pătrat perfect, are un număr infinit de soluţii întregi; învăţaţii indieni se limitează la găsirea uneia.

Brahmagupta şi Bhaskara nu demonstrează nici faptul că numărul y_2 este un întreg şi nici că metoda duce în cele din urmă la o ecuaţie cu $b = 1$. Rezolvarea incompletă nu micşorează însă admiraţia noastră faţă de arta creatorilor metodei ciclice.

Ecuaţia (5) formează mai tîrziu obiectul unor studii întreprinse de Fermat, Euler şi Lagrange. Rezolvarea ei completă şi riguroasă, la fel ca şi a ecuaţiei (4), o dă Lagrange în anul 1769, metoda lui fiind apropiată de cea indiană. În urma unei confuzii în secolul al XVIII-lea ecuaţia (5) capătă numele matematicianului englez J. Pell, deşi acesta nu avusese nici un merit în studiul ei. Rezolvarea ecuaţiei generale nedeterminate de gradul al doilea cu două necunoscute se reduce la o ecuaţie a lui Pell, care are un rol important în teoria formelor pătratice, în teoria numerelor algebrice etc. Nu ne vom opri asupra altor procedee indiene de rezolvare în numere întregi sau raţionale a ecuaţiei lui Pell. Vom mai observa că Brahmagupta şi Bhaskara analizează cu ajutorul unor procedee speciale şi alte cîteva probleme nedeterminate de gradul al doilea.

Matematicienii indieni, ca de pildă Naraiana şi Ganeşa, s-au ocupat de pătratele magice la fel ca grecii şi chinezii.

Serii numerice. Exemple izolate de progresii aritmetice şi geometrice există în *Cunoştinţe*. Începînd cu Aryabhata I, sumarea seriilor aritmetice interesează în permanenţă pe matematicienii indieni. Ei elaborează o terminologie specială şi calculează sumele multor serii [75].

Aryabhata cunoaşte diferitele proprietăţi ale progresiei aritmetice. El ştie formulele pentru termenii centrali, pentru termenul general şi pentru sumă; după cum s-a mai amintit, una dintre problemele lui cu progresii aritmetice duce la o ecuaţie de gradul al doilea. Aryabhata prezintă de asemenea regulile de sumare a seriilor de numere triunghiulare, a seriilor de pătrate şi cuburi de numere naturale, iar la Magavira găsim regulile pentru pro-

gresia geometrică. Toate acestea făcuseră parte încă pe timpuri din patrimoniul babilonienilor şi al grecilor. Magavira generalizează rezultatele cunoscute de Aryabhata, sumînd o serie de pătrate a termenilor unei progresii aritmetice (ceea ce făcuse încă Arhimede), o serie de cuburi şi o serie de numere triunghiulare generalizate, adică de sume ale unei progresii aritmetice. Dacă primul termen al progresiei este a_1, iar raţia d, atunci după Magavira:

$$\sum_{r=1}^{r=n}\left(\sum_{m=1}^{m=r} a_m\right) = \frac{n}{2}\left[\left\{\frac{(2n-2)^2 d^2}{6} + \frac{d}{2} + a_1 d\right\}(n-1) + a_1(a_1+1)\right].$$

La mijlocul secolului al XIV-lea, Naraiana efectuează însumări şi mai generale. Să notăm sumele:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = S_n^{(1)};$$
$$S_1^{(1)} + S_2^{(1)} + \dots + S_n^{(1)} = S_n^{(2)};$$
$$S_1^{(2)} + S_2^{(2)} + \dots + S_n^{(2)} = S_n^{(3)}$$

etc. Naraiana dă expresia pentru:

$$S_n^{(m)} = \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+m)}{1\cdot 2\cdot 3\dots(m+1)}.$$

Rezultate similare sînt cunoscute aproximativ în aceeaşi vreme şi în China (pp. 100—101). Naraiana le generalizează pe toate şi pentru cazul unei progresii aritmetice cu primul termen a_1 şi raţia d date; în acest caz suma este:

$$\sigma_n^{(m)} = a_1 \frac{m+1}{n-1} S_{n-1}^{(m)} + d S_{n-1}^{(m)}.$$

Naraiana aplică regulile sale la o problemă în care se cere să se calculeze cît de mare va fi o cireadă de vaci şi de viţele provenită în 20 de ani de la o singură vacă, cu condiţia ca vaca să nască la începutul fiecărui an cîte o viţea, iar viţelele să dea aceiaşi urmaşi cînd ating vîrsta de trei ani. Calculul lui Naraiana este următorul:

1) o vacă, în 20 de ani, dă 20 de viţele în prima generaţie;

2) prima viţea, din prima generaţie, dă 17 viţele în a doua generaţie, a doua — 16 etc. Cu totul, în a doua generaţie vor fi:

$$17 + 16 + \dots + 1 = S_{17}^{(1)};$$

3) prima vițea din cele 17 din a doua generație va da 14 vițele în a treia generație, a doua — 13 etc. În total, vițelele acestui grup vor da:

$$14 + 13 + \ldots + 1 = S_{14}^{(1)} \text{ urmași.}$$

Prima vițea din cele 16 din a doua generație va da 13 vițele în a treia generație, a doua — 12 etc. In total, vițelele din această grupă vor da:

$$13 + 12 + \ldots + 1 = S_{13}^{(1)} \text{ urmași.}$$

Toate vițelele din a doua generație vor da în a treia generație:

$$S_{14}^{(1)} + S_{13}^{(1)} + \ldots + S_{1}^{(1)} = S_{14}^{(2)}.$$

Raționînd în mod analog mai departe, Naraiana exprimă numărul total al vacilor din cireadă după 20 de ani, prin suma:

$$1 + 20 + S_{17}^{(1)} + S_{14}^{(2)} + \ldots + S_{2}^{(6)} = 1 + 20 + \frac{17 \cdot 18}{1 \cdot 2} + \frac{14 \cdot 15 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3} +$$

$$+ \ldots + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 1 + 20 + 153 + 560 + 1\,001 + 792 +$$

$$+ 210 + 8 = 2\,745.$$

Problema se poate rezolva și altfel. La începutul primului an, cireada este alcătuită din două animale, la începutul anului doi — din trei, apoi — din patru și șase. Începînd cu anul patru, efectivul cirezii, la începutul anului k, se poate exprima prin relația recurentă:

$$S_k = S_{k-1} + S_{k-3}$$

și cu ajutorul ei se poate calcula $S_{20} = 2\,745$. Tocmai așa rezolvă Leonardo Pisano o problemă analogă despre niște iepuri de casă. Probleme similare există în culegerea juridică „Ruskaia Pravda", în copiile din cea de-a doua jumătate a secolului al XV-lea.

La sfîrșitul secolului al XIV-lea matematicienii indieni mînuiesc progresia geometrică infinit descrescătoare. Un secol mai tîrziu găsim destul de neașteptat în literatura indiană, dezvoltarea funcției arctangentă într-o serie de puteri (vezi p. 174).

Combinări. În India se cunosc din vechime combinările a n elemente luate cîte m, adică nnmere de forma C_n^m. După un autor din secolul al X-lea, Galaiuda, aceste numere se cunoșteau încă din secolul al II-lea î.e.n. și se știa că:

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

Bhaskara al II-lea expune procedcele de calcul ale unor permutări de elemente diferite sau parțial asemenea, precum și pentru combinări. Combinările s-au folosit și probabil că au apărut în poetica indiană, legate de calculul combinărilor posibile din silabe lungi și scurte într-un picior de vers n-complex. Nu e clar totuși dacă se cunoștea dezvoltarca puterii unui binom, afară de pătrat și de cub.

Geometria. Cunoștințele matematicienilor indieni despre geometrie sînt mult mai prejos decît cele de aritmetică, algebră și teoria numerelor. Aceste cunoștințe cuprind un cerc restrîns de probleme de geometrie calculatorie. În unele cazuri se constată o similitudine cu lucrările geometrilor din Alexandria; acest lucru se referă de pildă la elementele geometrice din operele lui Brahmagupta și lucrările lui Heron.

Operele lui Brahmagupta se caracterizează prin folosirea pe același plan cu reguli exacte și a unor aproximări pe care el le recomandă pentru practicieni. Astfel, el dă o regulă aproximativă pentru calculul ariei unui patrulater în funcție de laturile lui prin formula $\frac{1}{4}(a + c)(b + d)$, unde a și c, b și d sînt opuse două cîte două. Tot așa, pentru volumul trunchiului de piramidă cu bază pătrată (cu laturile a_1 și a_2), el dă pentru practicieni expresia:

$$h\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2,$$

și apoi o altă expresie aproximativă[1]:

$$h\,\frac{a_1^2 + a_2^2}{2},$$

iar cxpresia exactă o obține prin combinarea celor două precedente

$$h\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left[h\,\frac{a_1^2 + a_2^2}{2} - h\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2\right].$$

Brahmagupta dă și el două reguli pentru aria cercului: una aproximativă corespunzătoare lui $\pi = 3$ și una mai exactă în care $\pi = \sqrt{10}$; ultima se folosise pînă atunci în China. Am observat

[1] Folosită încă în Babilonul antic — *N.A.*

mai sus că Aryabhata I lua raportul dintre lungimea cercului și diametru egal cu $\frac{62\,832}{20\,000}$, adică cu valoarea pe care o găsise probabil Apoloniu în lucrarea lui *Okitokion*. Bhaskara al II-lea, recomanda două valori pentru practicieni $\pi = \frac{22}{7}$, și una mai exactă $\pi = \frac{3\,927}{1\,250}$, care coincide cu valoarea dată de Aryabhata.

Comentînd acest rezultat, Ganeșa scrie că el fusese obținut prin calculul laturilor unor poligoane înscrise cu 6, 12, 24, 48, 96, 192 și în sfîrșit 384 de laturi.

Pentru calculul suprafeței triunghiului, afară de procedeul obișnuit, Brahmagupta prezintă așa-numita formulă a lui Heron. Brahmagupta extinde fără a demonstra această formulă asupra patrulaterelor inscriptibile, pentru care aria este:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

unde p este jumătatea perimetrului, iar a, b, c, d sînt laturile; Brahmagupta nu arată în mod explicit că are în vedere patrulatere inscriptibile. De cunoscuta teoremă a lui Ptolemeu se apropie un alt rezultat a lui Brahmagupta: pentru diagonalele x, y ale unui patrulater inscriptibil avem:

$$x^2 = \frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd},$$

$$y^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}.$$

Pe Brahmagupta l-au interesat în mod deosebit patrulaterele inscriptibile cu diagonale perpendiculare și trapezele isoscele.

Brahmagupta dă de asemenea regula pentru construcția triunghiurilor dreptunghice cu laturi raționale:

$$m, \frac{1}{2}\left(\frac{m^2}{n} - n\right), \frac{1}{2}\left(\frac{m^2}{n} + n\right).$$

Cu două secole mai tîrziu găsim la Magavira un procedeu analog pentru obținerea de triplete întregi de numere pitagoreice:

$$pq, \frac{p^2 - q^2}{2}, \frac{p^2 + q^2}{2}.$$

Asemenea triunghiuri erau folosite pentru construirea patrulaterelor inscriptibile (fig. 37).

La Brahmagupta mai găsim calculul segmentelor în care înălţimea împarte o latură a unui triunghi, cele trei laturi fiind date; această problemă o rezolvase şi Heron.

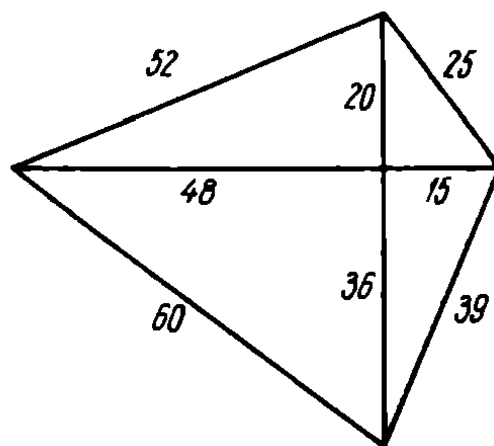


Fig. 37

În rezolvarea de probleme care la fel cu cea de mai sus impun folosirea algebrei, matematicienii indieni dovedesc o mare inventivitate. Iată una din problemele lui Bhaskara: să se determine catetele x, y şi ipotenuza z, fiind date perimetrul şi aria triunghiului. Dacă se ia

$$xy = p \qquad (1)$$

$$x + y + z = q, \qquad (2)$$

atunci calculele sînt următoarele:

$$(x + y)^2 - (x^2 + y^2) = 2p, \quad (x + y + z)(x + y - z) = 2p.$$

De aici

$$x + y - z = \frac{2p}{q}, \qquad (3)$$

şi din (2) şi (3)

$$z = \frac{q^2 - 2p}{q}.$$

Din aceleaşi ecuaţii avem:

$$x + y = \frac{q^2 + 2p}{q}. \qquad (4)$$

Mai departe se determină:

$$(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy = \left(\frac{q^2 + 2p}{q}\right)^2 - 4p \qquad (5)$$

şi apoi din (4) şi (5) se pot determina catetele x şi y.

Într-o altă problemă se dau $xyz = p$, $x + y + z = q$. Bhaskara o rezolvă la fel, determinînd la început pe z. Din punct de vedere tematic, asemenea probleme amintesc problemele chinezeşti cu triunghiuri dreptunghice.

Demonstraţiile propoziţiilor geometrice sînt rare în cărţile indiene, iar atunci cînd se întîlnesc, sînt foarte succinte. De cele

mai multe ori ele se reduc la o figură cu indicația „privește!"; uneori la figură se adaugă cîteva indicații fugitive. Să amintim demonstrația teoremei lui Pitagora (vezi p. 120) și urmîndu-l pe Ganeșa, să prezentăm fundamentarea teoremei privitoare la aria triunghiului. Deducția constă dintr-un desen (fig. 38) pe care înălțimea dreptunghiului se ia egală cu jumătate din înălțimea triunghiului și la care se adaugă: „privește!". În mod analog, Ganeșa explică teorema conform căreia aria cercului este egală cu aria unui dreptunghi ale cărui laturi sînt semicircumferință și semidiametru (fig. 39). După cum se vede din această propoziție, matematicienii indieni operau cu noțiuni infinitesimale cu caracter atomistic. Acest lucru îl confirmă stabilirea regulilor pentru calculul volumului și al suprafeței sferei, date de Bhaskara al II-lea. Comentatorul observă că sfera poate fi considerată ca un ansamblu de piramide asemănătoare cu niște ace ale căror vîrfuri se unesc la centru, iar bazele lor sînt așezate pe suprafață. Într-adevăr, de aici se obține ușor raportul între volumul și suprafața sferei. Ceva mai departe vom face cunoștință cu studii infinitesimale mai profunde ale indienilor.

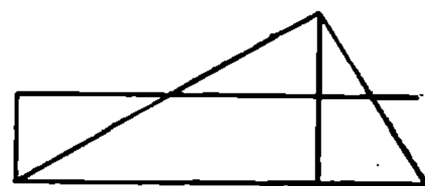


Fig. 38

Laconismul deducțiilor în operele indiene de matematică sau simpla prezență a unor desene cu recomandarea „privește!" nu trebuie înțelese ca o manifestare a unui anumit fel de a trata problema demonstrației, sau al unui mers deosebit al gîndirii. La timpul său, A. Schopenhauer opune principial puterea de convingere intuitivă a figurilor simple (ca de pildă, teorema lui Pitagora în cazul triunghiului isoscel) trucurilor și născocirilor lui Euclid, care obligă pe cititor să fie de acord cu adevărul propoziției, ascunzîndu-i în același timp corelațiile interne [76, p. 72 și următoarele]. Tocmai demonstrația lui Euclid pentru teorema lui Pitagora e numită de Schopenhauer „capcana de șoareci". Totuși laconismul vestit al lucrărilor vechi indiene, în afară de demonstrații, se referă și la reguli.

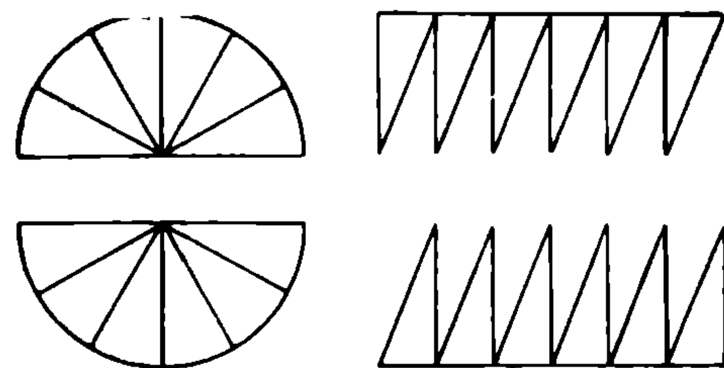


Fig. 39

Cărţile se scriu în general concis, aforistic, deseori în versuri, pentru ca ele să poată fi memorate mai uşor. În timpul şcolii se dădeau explicaţii mai amănunţite, iar desenul cu inscripţia „priveşte!" era însoţit de un comentariu verbal. Afară de aceasta s-au păstrat şi comentarii indiene scrise la lucrările unor învăţaţi mai vechi, care erau neclare tocmai din cauza unei concizii exagerate.

Bazele trigonometriei. Excepţional de importante pentru dezvoltarea matematicii sînt lucrările de trigonometrie ale învăţaţilor indieni, deşi în acest domeniu ei nu avansaseră prea mult.

Odată cu înflorirea astronomiei în ţările elenistice (parte din ele devenite mai tîrziu provinciile Romei) se obţin succese importante atît în elaborarea mijloacelor grafice de rezolvare a problemelor, cît şi în calculul coardelor. În *Analemma* lui Ptolemeu sînt expuse procedee grafice pentru construcţia ceasornicelor solare, adică pentru stabilirea poziţiei Soarelui în funcţie de timp, deci procedee utile în egală măsură şi pentru determinarea orei din zi. La baza construcţiilor se află proiecţia ortogonală a sferei pe trei plane perpendiculare; al meridianului, orizontului şi al cercului vertical. Arcele căutate se construiesc după semicoardele arcelor cunoscute. Pe de altă parte, în *Almagestul* lui Ptolemeu există o trigonometrie destul de dezvoltată.

Indienii se bazează pe lucrările astronomilor din ţările eleniste, dar introduc şi multe lucruri noi. După cum se pare, asupra dezvoltării astronomiei din India au avut influenţă metode mai vechi care intraseră în *Analemma* şi care fuseseră transformate aici într-un sistem de reguli de calcul. Esenţială a fost aici înlocuirea coardelor prin sinusuri. O asemenea înlocuire în sine nu pare să fie atît de esenţială, deoarece coarda arcului este egală cu dublul sinusului arcului 2 φ, adică diferă de sinus doar printr-un factor constant. Dar în realitate, trecerea de la coardă la semicoardă are o importanţă care merge mult mai departe, deoarece ea a permis să se introducă în mod natural diferite funcţii legate de laturile şi unghiurile unui triunghi dreptunghi. În India se pun bazele trigonometriei ca ştiinţă a mărimilor trigonometrice, deşi într-un fel paradoxal se da prea puţină atenţie tocmai rezolvării triunghiurilor.

Sinusul, cosinusul, precum şi sinusul-versus, adică diferenţa între rază şi cosinus, se întîlnesc încă în *Siddhantale* şi în *Aryabhatiam*. Linia sinusului poartă numele de *ardhadjiva* (sau *ardhajia*): *ardha* — înseamnă jumătate, iar *djiva* — coarda unui arc, şi coardă. Mai tîrziu, sinusul este denumit prescurtat *djiva*. În

literatura arabă, termenul indian este transformat în *djiba* şi fiindcă în scrierea arabă se păstrează doar consoanele şi vocalele lungi, cuvîntul djiba lipsit de un sens uzual este înlocuit prin cuvîntul veritabil arab *djaib*, adică cavitate, tăietura hainei, convexitate etc. Un asemenea termen apare încă în prima jumătate a secolului al IX-lea la al-Horezmi şi la al-Habaş; între altele, al-Battani foloseşte cuvîntul *vatar* — coardă. În jurul anului 1145, Robert din Chester, făcînd traducerea din arabă în latină, foloseşte cuvîntul *sinus*, care are aceleaşi sensuri principale ca şi *djaib*. Ceva mai înainte, în jurul anului 1120, Platon din Tivoli traduce cuvîntul *vatar* prin *chorda*.

Cosinusul este denumit de indieni *cotidjiva*, adică sinusul restului (al complementului pînă la 90°) sau, prescurtat, *coti*, transmis în mod corespunzător în limba arabă prin *djaib al-tamam* sau *vatar al-tamam*. În secolul al XII-lea întîlnim, respectiv în traducerile latineşti ale lui Gherardo din Cremona, *sinus residui* iar la Platon din Tivoli — *chorda residui*. În secolul al XI-lea Peuerbach şi Regiomontanus încep să folosească termenul *sinus complementi*, adică sinusul complementului. După cît se ştie, la astronomul englez E. Gunter (1581—1626), în anul 1620 apare pentru prima oară termenul cosinus, rezultat prin inversarea locului şi prescurtarea termenului *complementi*.

Prin cuvîntul *utkramadjiva*, indienii numesc sinusul invers, pe latineşte *sinus-versus*, pe care îl găsim şi în secolul al XII-lea la Gherardo din Cremona. Acelaşi traducător numeşte sinusul spre a-l diferenţia de *sinusul-versus*, prin *sinus-rectus*, adică sinus drept, iar raza cercului *sinus totus* — sinusul complet. Ultimul termen se păstrează în operele europene de trigonometrie pînă în timpurile lui Euler, cînd treptat se trece la scrierea formulelor pentru $r = 1$.

Primele relaţii între mărimile trigonometrice sînt exprimarea directă a teoremei lui Pitagora. Afară de cea mai simplă relaţie

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

un rol important îl joacă regula pentru sinusul arcului pe jumătate

$$\sin^2 \alpha + \sin \operatorname{vers}^2 \alpha = \left(2 \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2 \quad \text{sau} \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}.$$

Indienii exprimă prin cuvinte aceste propoziţii, pentru raze diferite de unitate. Ele sînt cunoscute încă de autorii cărţilor *Siddhanta*, iar într-o formulare explicită apar la Varaha-Mihira. Bhaskara foloseşte în secolul al XII-lea regula sinusului sumei şi a diferenţei.

Indienii luau în considerare mărimile trigonometrice numai în cuprinsul primului sfert de cerc.

Aplicarea trigonometriei în astronomie este imposibilă fără tabele. Primul tabel de sinusuri și de sinus-versus există încă în *Suria siddhanta* și în *Aryabhatiam*. În acesta din urmă se dau 24 de valori pentru ambele funcții, începînd de la 3°45′ = 225′ cu un interval de 225′. Chiar dacă indienii au avut ca prototip vreun tabel al grecilor pentru coarde, atunci aceasta n-a fost în mod sigur, tabelul lui Ptolemeu. În *Almagest* argumentul crește cu 30′, ceea ce corespunde unui tabel de sinusuri cu un interval de 15′, iar valorile sînt tabulate mai exact. Dăm mai jos începutul și sfîrșitul vechiului tabel indian. Coloana primelor diferențe Δ^1 lipsește în *Suria siddhanta*, dar există la Aryabhata. Diferențele de ordinul doi Δ^2 și valorile sinusurilor exacte pînă la sutimi de minută sînt adăugate pentru lămuriri ulterioare.

Arcul		Sinusul indienilor			Sinus-versus	Valoarea sinus, în minute
în grad și min	în min	în min	Δ^1	Δ^2		
3° 45′	225	225			7	224,84
			224			
7 30	450	449		—2	29	448,72
			222			
11 15	675	671		—3	66	670,67
			219			
15 00	900	890		—4	117	889,76
. . . . .	. . . .	. . . .	. . .	. . . .	. . . .	. . . . . .
78 45	4 725	3 372		—14	2 767	3 371,70
			37			
82 30	4 950	3 409		—15	2 989	3 408,24
			22			
86 15	5 175	3 431		—15	3 213	3 430,39
			7			
90 00	5 400	3 438			3 438	3 437,75

Tabelul sinusurilor în cea mai mare parte a lui este corect pînă la ultima cifră semnificativă, iar în 10 cazuri din 24, eroarea la ultima cifră este egală cu 1, dacă respectăm regulile noastre de rotunjire.

Particularitatea caracteristică a tabelului este măsura mărimilor trigonometrice. La fel ca și în știința elenistică, circumferința se împarte în 360°, iar gradul — în 60′. Dar astronomii din Alexandria împart diametrul în 120, adică raza în 60 de părți, și exprimă coardele în aceste părți și în fracțiunile lor sexagesimale, iar autorii cărților *Siddhanta* și *Aryabhataiam* exprimă raza și mărimile trigonometrice prin părți dintr-o circumferință. Pentru învățați educați în tradițiile matematicii clasice grecești măsu-

rarea segmentelor de dreaptă în fracţiuni de circumferinţă ar fi fost cu totul străină. După cum se vede din tabel, indienii iau raza egală cu 3438′. Este incontestabil că acest număr este rotunjirea valorii numărului 3437,7., care se obţine pentru rază din $2\pi r = 3600'$ şi cu $\pi = 3{,}1416$; o asemenea valoare a lui π există în *Aryabhatiam*.

Procedeul de calcul al tabelului nu se descrie în literatura indiană cunoscută; probabil că el a fost următorul. Mai întîi s-a găsit sinusul de 30°, ca semilatură a unui hexagon regulat înscris cu 1719′, sinusul de $60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3438' = 2978'$ (eroarea la ultima cifră este provocată probabil de aproximarea insuficient de exactă a lui $\sqrt{3}$) şi sinusul de $45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3438' = 2431'$. Aplicarea regulii sinusului arcului pe jumătate, adică extragerea rădăcinii pătrate, a dat apoi sinusurile de 22° 30′, 11°15′, 15°, 7°30′ şi 3°45′; apoi s-au putut găsi sinusurile complementelor acestor arce şi jumătăţile de complemente etc. Calculul s-a oprit la arcul de 225′, probabil datorită faptului că valoarea sinusului de 225′ coincide în limitele exactităţii calculelor, cu însăşi valoarea arcului. Sinusurile arcelor mai mici s-au luat desigur şi ele egale cu arcele corespunzătoare; pentru arcele mici o asemenea egalitate aproximativă este pe deplin justificabilă. Coloana primelor diferenţe a permis să se găsească valorile funcţiilor lipsă din tabel, prin interpolare liniară.

În *Suria siddhanta* se mai dă o regulă cu care se poate restabili întregul tabel plecînd de la sinusul de 225′, astfel încît un astronom indian avea totdeauna tabelul sinusurilor oarecum în minte. Anume, dacă notăm sinusul indian prin Sin, atunci:

$$\text{Sin}\,(n+1)\alpha = \text{Sin}\,n\alpha + \Delta^1_{n-1} - \frac{\text{Sin}\,n\alpha}{\text{Sin}\,\alpha},$$

unde

$$\Delta^1_{n-1} = \text{Sin}\,n\,\alpha - \text{Sin}(n-1)\alpha \quad \text{şi} \quad \alpha = \text{Sin}\,\alpha = 225'.$$

Trebuie să presupunem că regula a fost descoperită prin analiza tabelei valorilor sinusului şi a primelor diferenţe. E aproape evident faptul că diferenţele de ordinul doi cresc împreună cu sinusurile, iar cîtul $\frac{\text{Sin}\,n\alpha}{\text{Sin}\,\alpha}$ este foarte apropiat de valorile Δ^2_{n-1}.

Varaha-Mihira, la fel ca şi alexandrinii, întocmeşte un tabel al sinusurilor pentru diametrul de 120. Bhaskara revine în secolul

al XII-lea la raza de 3 438. La Bhaskara găsim un alt procedeu de întocmire a tabelului cu intervalul de 1°, începînd cu sinusul de 1°, luat ca 60′. Acest procedeu se bazează pe regula sinusului sumei sau a diferenței, care pentru o rază oarecare r se poate scrie sub forma:

$$\text{Sin}\ (\alpha \pm \beta) = \frac{\text{Sin}\,\alpha\,\text{Cos}\,\beta \pm \text{Cos}\,\alpha\,\text{Sin}\,\beta}{r}.$$

Aici Sin și Cos înseamnă respectiv sinusul și cosinusul pentru un cerc de rază r. Pentru $r = 3\,438$ și Sin 1° = 60, Bhaskara găsește

$$\frac{\sin 1^\circ}{r} = \frac{10}{573}, \quad \frac{\text{Cos}\,1^\circ}{r} = 1 - \frac{1}{6\,569}$$

(ultima valoare dă 5 cifre zecimale exacte) și în sfîrșit:

$$\text{Sin}\ (\alpha \pm 1^\circ) = \text{Sin}\ \alpha - \frac{\text{Sin}\ \alpha}{6\,569} \pm \frac{10\ \text{Cos}\ \alpha}{573}.$$

Tabelele lui Bhaskara sînt mult mai precise decît ale lui Aryabhata.

Trigonometria este expusă în partea a patra din cartea *Cununa științei* scrisă de Bhaskara. În *Lilavati* pentru calculul coardei l în funcție de lungimea C a circumferinței, arcul s și diametrul d, se dă formula:

$$l = \frac{4ds(C - s)}{\frac{5}{4}C^2 - s(C - s)},$$

care, după cum spune însuși Bhaskara, este insuficientă pentru calcule mai exacte. Dacă $s = \frac{C}{n}$, atunci regula se poate scrie sub forma:

$$l = \frac{4(n - 1)d}{\frac{5}{4}n^2 - n + 1}.$$

Cînd $n = 3$ și 4, ea dă pentru l valori exacte pînă la sutimi, pentru $n = 6$ — valoarea exactă, cînd $n = 180$ pentru sinusul de 1° se obține valoarea 61, mai puțin exactă decît cea adoptată în trigonometria lui Bhaskara. Nu se știe cum a fost obținută această regulă.

În rezolvarea problemelor de astronomic, învăţaţii indieni merg pe calea creării unor reguli de calcul corespunzătoare construcţiilor grafice în spiritul *Analemmei*. Pentru a găsi înălţimea Soarelui, durata zilei şi a nopţii etc., după diferite date, în regulile din cărţile *Siddhanta* şi alte opere, se enumără în mod regulat succesiunea operaţiilor aritmetice asupra sinusurilor, sinus-versusurilor şi a razei. În felul acesta, rezolvarea triunghiurilor dreptunghice se efectuează, cum s-ar spune, pe cale ocolită. Aici nu apare sistemul de reguli pentru rezolvarea triunghiurilor, ale cărui origini existaseră în *Almagest*.

Regulile indiene conţin implicit unele teoreme din trigonometria sferică. Astfel, cu ajutorul unor transformări simple, putem separa din reţetele cuprinse în *Suria siddhanta*, teorema sinusurilor unui triunghi dreptunghic şi chiar teorema generală a cosinusurilor. Dar indienii n-au exprimat asemenea propoziţii, cum sînt de pildă relaţiile generale dintre elementele triunghiurilor. Ele se mai strecoară în indicaţiile privitoare la rezolvarea unor probleme izolate, într-o formă foarte deosebită de cea de mai tîrziu.

Pentru a măsura înălţimile şi distanţele, în India se elaborează cîteva reguli bazate pe măsurarea umbrei unei prăjini verticale — gnomon şi pe asemănarea triunghiurilor. Capitolul al XI-lea din *Lilavati* este consacrat învăţăturii despre „umbra gnomonului". Gnomonul împărţit în 12 părţi şi proiecţia lui (umbra) figurează şi în problemele trigonometrice, intrînd la numitorii şi numărătorii cîtorva expresii fracţionare. Toate acestea anticipează introducerea tangentei şi a cotangentei, dar acest merit le revine învăţaţilor din califatul arab în prima jumătate a secolului al IX-lea.

Deşi indienii n-au introdus explicit noi funcţii trigonometrice, este evident că ultimul şi totodată cel mai strălucit rezultat al matematicii din India, spre sfîrşitul perioadei analizate, este descoperirea dezvoltării în serii infinite de puteri ale tangentei şi arctangentei.

Calculul lui π şi seria arctangentei. Scopul dezvoltării arcului de cerc după puterile tangentei sau ale cotangentei este de a calcula cît mai exact valoarea lui π. Imboldul spre dezvoltarea unor idei noi în matematică este iarăşi legat de problemele de calcul ale astronomiei.

Sursa cea mai timpurie și sigură în această direcție este *Culegerea științifică (Tantrasangraha)* sanscrită a învățatului sud-indian Nilakanta, cunoscut de asemenea prin comentariul lui prețios la cartea *Aryabhatiam*. Judecînd după datele astronomice din *Culegerea științifică*, aceasta a fost redactată în perioada 1501—1502 [77—81].

Asemenea cîtorva alți învățați din Orient (vezi p. 336), Nilakanta este convins de iraționalitatea raportului dintre lungimea cercului și diametru. În comentariul la lucrarea *Aryabhatiam*, el spune:

„Dacă diametrul măsurat cu ajutorul unei unități oarecare de măsură este comensurabil cu această unitate, atunci circumferința nu poate fi măsurată exact cu ajutorul aceleiași unități; iar dacă în raport cu o unitate oarecare, circumferința este măsurabilă, atunci cu ajutorul acestei unități nu se poate măsura diametrul" [77, p. 81]. Pentru un calcul mai exact al lui π, pe care autorii din secolele al VI-lea —al VII-lea îl cunoșteau în cel mai bun caz pînă la zecimea de miime, în *Culegerea științifică* lungimea sfertului de cerc se prezintă sub forma a diferite dezvoltări în serii numerice infinite, care se obțin din seria de puteri a arctangentei. În lucrarea lui Nilakanta scrisă în versuri nu există vreo demonstrație. Regula generală de dezvoltare spune:

„Ia un arc de cerc astfel încît sinusul lui să fie mai mic decît cosinusul. Înmulțește sinusul arcului cu raza și împarte la cosinus. Aceasta va da prima cantitate. Înmulțește această cantitate cu pătratul sinusului și împarte la pătratul cosinusului și vei obține a doua cantitate. Repetă operația, înmulțind cu pătratul sinusului și împărțind la pătratul cosinusului. Cantitățile obținute împarte-le în ordine la numerele întregi impare 1,3,5,... Dacă cantitățile obținute vei începe alternativ să le scazi și să le adaugi la prima, atunci în cele din urmă vei obține arcul de cerc" [77, p. 77].

La regula dată corespunde formula:

$$r\,\varphi = \frac{r\,\mathrm{Sin}\,\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi} - \frac{r\,\mathrm{Sin}^3\,\varphi}{3\,\mathrm{Cos}^3\,\varphi} + \frac{r\,\mathrm{Sin}^5\,\varphi}{\mathrm{Cos}^5\,\varphi} - \ldots, \qquad (1)$$

cu restricția $\mathrm{Sin}\,\varphi < \mathrm{Cos}\,\varphi$(ar fi fost mai exact să spunem $\mathrm{Sin}\,\varphi \leqslant \leqslant \mathrm{Cos}\,\varphi$). Este evident că Nilakanta ține seama de convergența seriei (1) cînd $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$ și divergența ei cînd $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

În ultimul caz se recomandă o serie care dă un arc complementar sfertului de cerc:

$$r\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\frac{r\operatorname{Sin}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}{\operatorname{Cos}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}-\frac{r\operatorname{Sin}^3\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}{3\operatorname{Cos}^3\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}+$$

$$+\frac{r\operatorname{Sin}^5\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}{5\operatorname{Cos}^5\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}\cdots \tag{2}$$

În notațiile noastre pentru $r = 1$, seriile (1) și (2) vor fi respectiv:

$$\varphi = \operatorname{tg}\varphi - \frac{\operatorname{tg}^3\varphi}{3}+\frac{\operatorname{tg}^5\varphi}{5}-\cdots \tag{1'}$$

și

$$\frac{\pi}{2}-\varphi = \operatorname{ctg}\varphi - \frac{\operatorname{ctg}^3\varphi}{3}+\frac{\operatorname{ctg}^5\varphi}{5}-\cdots \tag{2'}$$

Pentru calculul lui π în *Culegerea științifică* se dă o serie care rezultă din (1) pentru $\varphi = 45°$. Este foarte interesant că $\frac{C}{4d}$ sau $\frac{\pi}{4}$ nu se exprimă simplu prin suma particulară S_n, ci sub forma unei sume S_n și a unei corecții K_n, exprimată sub trei forme diferite, și anume:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}+K_n, \tag{3}$$

unde:

$$\left.\begin{aligned} K_n^{(1)} &= \frac{(-1)^n}{4n},\\ K_n^{(2)} &= \frac{(-1)^n n}{4n^2+1},\\ K_n^{(3)} &= \frac{(-1)^n (n^2+1)}{n(4n^2+5)}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Este ușor de observat că $|K_n^{(1)}| > |K_n^{(3)}| > |K_n^{(2)}|$. Chiar și pentru valori mici ale lui n aceste corecții îmbunătățesc

sensibil aproximările. Astfel, dacă ne vom limita la o exactitate de miimi, $\frac{\pi}{4} = 0{,}785$, $S_3 = 0{,}825$, iar $S_3 + K_3^{(1)} = 0{,}775$, așa încît eroarea prin folosirea corecției s-a micșorat de patru ori.

Afară de seria lent convergentă (3), în *Culegerea științifică* se mai prezintă și altele care dau pentru același număr de termeni, aproximări cu mult mai exacte. Cea mai simplă este seria:

$$\frac{\pi - 2}{4} = \frac{1}{2^2 - 1} - \frac{1}{4^2 - 1} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)^2 - 1} + \cdots \qquad (5)$$

cu termenul de corecție dat sub două forme:

$$K_n' = \frac{(-1)^n}{2(2n+1)^2}, \quad K_n'' = \frac{(-1)^n}{2[(2n-1)^2 + 2]}. \qquad (6)$$

Primii doi termeni din (5) dau pentru $\frac{\pi}{4}$ valoarea 0,767, iar cu corecția K_2' — valoarea 0,787, a cărei eroare este de circa 0,002.

Și mai comode pentru calcul sînt seriile:

$$\frac{\pi - 3}{4} = \frac{1}{3^3 - 3} - \frac{1}{5^5 - 5} + \frac{1}{7^7 - 7} - \cdots \qquad (7)$$

și

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{1^5 + 4\cdot 1} - \frac{1}{3^5 + 4\cdot 3} + \frac{1}{5^5 + 4\cdot 5} - \cdots\right) \qquad (8)$$

Valoarea lui π în *Culegerea științifică* se exprimă prin fracția 104 348/33 215. Fracția zecimală corespunzătoare este 3,141 592 653 9, unde ne-am oprit la cifra a 11-a; ea are zece cifre exacte. Acesta este un minunat succes al matematicii calculatorii, deși încă la începutul secolului al XV-lea Djemșid al-Kași, urmînd o altă cale, căpătă o aproximare mai exactă (vezi p. 336).

Tot atît de remarcabile ca și rezultatele prezentate în *Culegerea științifică* sînt și metodele cu ajutorul cărora s-au găsit aceste rezultate. Nilakanta formulează doar regulile, dar noi sîntem informați (e adevărat, incomplet) și despre procedeul pentru deducerea lor. O asemenea concluzie o conține lucrarea anonimă *Lămuriri în matematică (Iukti Bhașa)*, scrisă în proză în prima jumătate a secolului al XVII-lea în limba malaialam vorbită și în ziua de astăzi. Nu există temeiuri să presupunem că atît Nilakanta, cît

și precursorii sau contemporanii lui necunoscuți care se ocupau de serii să fi aplicat alte metode decît cele descrise în cartea *Lămuriri în matematică.* Vom reproduce aceste metode în notații și termeni moderni fără a schimba esența lucrurilor.

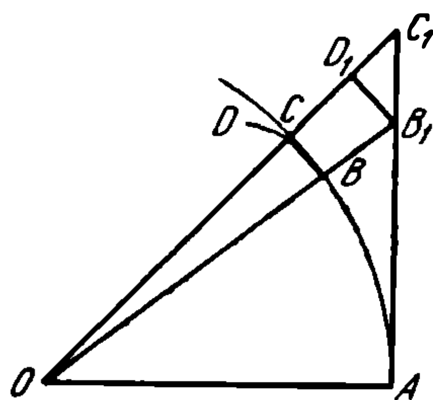


Fig. 40

Ne vom opri mai în amănunt asupra deducerii seriei generale a arctangentei (1). După cum vom vedea imediat, rolul principal îl joacă aici: 1) folosirea triunghiului infinitesimal pentru deducerea unei expresii echivalente cu diferențiala arctangentei, 2) descompunerea acestei expresii, avînd formă de fracție, într-o serie infinită de puteri și 3) integrarea termen cu termen bazată pe o egalitate la limită, echivalentă cu integrarea funcției x^n pentru n natural.

1. Fie BC un arc mic dintr-un cerc de rază 1, iar BD și B_1D_1 perpendiculare pe OC (fig. 40). Din asemănarea triunghiurilor:

$$\frac{BD}{B_1D_1}=\frac{1}{OB_1},\quad \frac{B_1D_1}{B_1C_1}=\frac{1}{OC_1},\quad BD=\frac{B_1C_1}{OB_1\cdot OC_1}.$$

Înlocuind pe BD prin arcul BC, precum și pe OC_1 prin OB_1, avem:

$$\breve{BC}=\frac{B_1C_1}{1+AB_1^2},$$

sau notînd $\sphericalangle AOB=\varphi$

$$\Delta\varphi=\frac{\Delta\,\mathrm{tg}\,\varphi}{1+\mathrm{tg}^2\varphi} \tag{9}$$

2. Segmentul de tangentă $t=\mathrm{tg}\,\varphi$ se împarte în n părți egale și fiecăreia i se aplică egalitatea (9). Sumarea consecutivă și trecerea la limită, exprimate desigur cu totul altfel decît în spiritul vremurilor noastre, dau pentru arcul φ o egalitate intermediară:

$$\varphi=\mathrm{arc\ tg}\,t=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\frac{t}{n}}{1+\left(\frac{kt}{n}\right)^2}. \tag{10}$$

Împărţirea de sub semnul sumei se face prin folosirea identităţii:

$$\frac{b}{c} = 1 - \frac{c-b}{b} \cdot \frac{b}{c},$$

care pentru $b<c$ dă seria:

$$\frac{b}{c} = 1 - \frac{c-b}{b} + \frac{(c-b)^2}{b^2} - \dots \tag{11}$$

Dacă în (11) se ia $b = 1$, $c = 1 + \left(\frac{kt}{n}\right)^2$, atunci

$$\varphi = \text{arc tg}\, t = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t}{n}\left[1 - \left(\frac{kt}{n}\right)^2 + \dots + (-1)^{m-1} \left(\frac{kt}{n}\right)^{2m-2} + \dots\right]. \tag{12}$$

3. Pentru calculul părţii din dreapta a expresiei (12) se calculează mai întîi:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}. \tag{13}$$

Sumele puterilor numerelor naturale erau cunoscute pentru $p = 1, 2, 3$. Propoziţia generală (13) s-a obţinut probabil prin inducţie. În sfîrşit, în virtutea relaţiei (13), partea din dreapta din (12) trece în seria arctangentei (1).

Mai puţin informaţi sîntem asupra procedeelor de transformare a seriei infinite

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \dots \tag{3'}$$

într-o serie mai repede convergentă şi despre felul cum s-au obţinut corecţiile pentru sumele ei parţiale.

Conform *Lămuririlor în matematică*, seria (5) se găseşte introducînd în paranteză doi cîte doi termeni ai seriei (3′), începînd cu primul sau al doilea, şi făcînd apoi scăderea termen cu termen a celor două serii obţinute. Într-adevăr, în primul caz avem:

$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{6^2-1} + \dots,$$

iar în al doilea:

$$\frac{4-\pi}{8}=\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{8^2-1}+\cdots.$$

De aici, prin scădere, se obţine uşor (5).

Există o reconstrucţie suficient de simplă şi verosimilă [81] pentru deducerea corecţiilor (4) şi totodată a seriilor (7) şi (8). Această deducţie s-a efectuat prin mijloace pe deplin accesibile pentru matematicienii indieni din secolul al XV-lea. Dacă vom lua pentru $\frac{\pi}{4}$ valoarea $\frac{377}{480}$ corespunzătoare lui $\pi = 3\frac{17}{120}$, cunoscută lui Aryabhata şi Bhaskara, atunci calculul diferenţelor dintre $\frac{\pi}{4}$ şi sumele parţiale iniţiale (3′), chiar din prima aproximare va da corecţiile $K^{(1)}$. Iar dacă vom descompune diferenţele în fracţii continue, atunci în a doua aproximare se obţin corecţii $K^{(2)}$ ceva mai mici. Într-adevăr,

$$S_1-\frac{\pi}{4}=\frac{103}{480}=\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{35}{68}}},\qquad K_1^{(1)}=\frac{1}{4},\qquad K_1^{(2)}=\frac{1}{5},$$

$$\frac{\pi}{4}-S_2=\frac{19}{160}=\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{2+\cfrac{3}{8}}},\qquad K_2^{(1)}=\frac{1}{8},\qquad K_2^{(2)}=\frac{2}{27},$$

$$S_3-\frac{\pi}{4}=\frac{13}{160}=\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}},\qquad K_3^{(1)}=\frac{1}{12},\qquad K_3^{(2)}=\frac{3}{37},$$

$$\frac{\pi}{4}-S_4=\frac{69}{1120}=\cfrac{1}{16+\cfrac{1}{4+\cfrac{5}{16}}},\qquad K_4^{(1)}=\frac{1}{16},\qquad K_4^{(2)}=\frac{4}{65}.$$

Aceasta ar fi fost pe deplin suficient pentru concluzia preliminară că $\left|\frac{\pi}{4}-S_k\right|$ se exprimă cu o bună aproximare prin fracţii de

forma $\frac{1}{4n}$ sau $\frac{n}{4n^2+1}$. O verificare numerică ne poate convinge de justețea concluziei. După cum se vede, afară de folosirea fracțiilor continue sau a unui aparat echivalent cu ele, reconstrucția presupune doar o analiză minuțioasă a relațiilor numerice în căutarea legilor care se ascund în ele. Această calitate le era de mult proprie învățaților indieni.

Numărătorul și numitorul corecției intermediare $K_n^{(3)}$ s-au putut obține ca sume ale numărătorilor și numitorilor $K_n^{(1)}$ și $K_n^{(2)}$ dacă pentru $K_n^{(2)}$, aceștia (adică numărătorul și numitorul) s-ar înmulți în prealabil cu n. Toate acestea sînt simple, deși nu se impun de la sine. În sfîrșit, o cale posibilă pentru deducerea seriilor (7) și (8) ar fi fost următoarea. Dacă se notează

$$N_n^{(1)} = S_n + K_n^{(1)}, \qquad K'^{(1)}_n = \frac{(-1)^n}{4n},$$

unde $N_1^{(1)} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} N_n^{(1)}$. Deoarece,

$$N_{n+1}^{(1)} - N_n^{(1)} = S_{n+1} - S_n + K_{n+1}^{(1)} - K_n^{(1)} = K_{n+1}^{(1)} - K_n^{(1)} + \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

atunci,

$$N_{n+1}^{(1)} - N_n^{(1)} = \frac{(-1)^{n+1}}{2n(2n+1)(2n+2)} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^3-(2n+1)}.$$

Exprimînd succesiv $N_2, N_3, \ldots, N_n, \ldots$, vom obține seria (7). În mod cu totul analog se poate introduce:

$$N_n^{(2)} = S_n + K_n^{(2)}, \quad K_n^{(2)} = \frac{(-1)^n n}{4n^2+1},$$

și atunci,

$$N_{n+1}^{(2)} - N_n^{(2)} = \frac{(-1)^{n+1}\cdot 4}{(2n+1)(4n^2+1)[4(n+1)^2+1]} =$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}\cdot 4}{(2n+1)^5 + 4(2n+1)}$$

și de aici rezultă seria (8). Transformările pe care le-am scris algebric sub formă generală s-ar putea face și aritmetic pentru cîțiva dintre primii termeni.

Descoperirile expuse încununează pe drept cuvînt dezvoltarea matematicii în India medievală. În această privință, învățații indieni anticipează un șir întreg de rezultate descoperite în Europa de-abia în secolul al XVII-lea și chiar al XVIII-lea. Seria arctangentei (1) a fost regăsită de J. Gregory în anul 1671, iar G.W. Leibniz, al cărui nume îl poartă pînă astăzi seria (3'), a descoperit-o în anul 1773. Prezentarea arctangentei, sub forma (10), e folosită de L. Euler în anul 1739 pentru descompunerea lui π într-o anumită serie semiconvergentă, care dă 12 cifre zecimale exacte [21, III, p. 672 și următoarele]. În manualele noastre de analiză matematică, seria arctangentei se deduce deseori după un procedeu similar celui indian: în egalitatea:

$$\operatorname{arctg} t = \int_0^t \frac{dx}{1+x^2},$$

funcția de sub integrală se descompune într-o serie de puteri, care apoi se integrează termen cu termen.

Dezvoltările în serii infinite obținute prin diviziune nelimitată, de felul celei din (11), sînt introduse în mod sistematic între 1660—1670, de către N. Mercator și I. Newton. Limitele (13) sau teoreme echivalente lor au fost obținute pentru un număr natural arbitrar p, în decada 1630—1640 de către P. Fermat, B. Cavalieri, G. Roberval și alții, mai întîi prin inducție incompletă. De problema îmbunătățirii convergenței seriilor infinite s-au ocupat intens savanții din secolul al XVIII-lea, cum au fost, de pildă, C. Goldbach și alții, și îndeosebi L. Euler.

Astfel, plecînd de la calculul aproximativ al lui π, care pînă atunci se efectua doar prin mijloacele matematicii elementare, indienii elaborează un întreg complex de procedee, conținînd vlăstarele calculului diferențial și integral și ale teoriei seriilor. Dar aceste vlăstare n-au înflorit în India propriu-zisă. Create pentru a fi aplicate la o singură problemă particulară, ele n-au găsit aici alte aplicații mai vaste, care să stimuleze continuarea studiilor, așa cum s-a întîmplat ceva mai tîrziu în Europa, unde calculul infiniților mici s-a dezvoltat în interdependență permanentă cu mecanica generală și mecanica cerească, cu primele începuturi ale fizicii teoretice etc.

Ideile din *Culegerea științifică* a lui Nilakanta au rămas pe vremea lor necunoscute în afara granițelor Indiei. Dar alte descoperiri fundamentale ale învățaților indieni, ca de pildă sistemul zecimal

pozițional, bazele trigonometriei, o serie de procedee de algebră și teoria numerelor, încep să se răspîndească încă de la sfîrșitul secolului al VIII-lea în țările arabe și au avut o influență puternică asupra dezvoltării ulterioare a științei din Orient și din Occident[1].

---

[1] După ce cartea de față a fost dată la tipar, am luat cunoștință de lucrarea [81 a], din care se vede că atît în *Culegerea științifică* cît și în *Tehnica calculelor (Karanapaddhati)*, scrisă în secolul al XV-lea sau al XVI-lea, se formulează în cuvinte regulile de dezvoltare în serii de puteri ale sinusului și cosinusului (s fiind arcul corespunzător unghiului φ)

$$r \sin \varphi = s - \frac{s^3}{3!\,r^2} + \frac{s^5}{5!\,r^4} - \ldots, \quad r \cos \varphi = r - \frac{s^2}{2!\,r} + \frac{s^4}{4!\,r^3} + \ldots,$$ precum și

formulele aproximative pentru sinus și arcsinus:

$$r \sin \varphi \approx s - \frac{s^3}{6r^2}, \quad r\varphi \approx r \sin\varphi + \frac{(r \sin \varphi)^3}{6r^2}$$

Deducerea seriei pentru sinus se găsește și în *Lămuriri în matematică*. Neavînd posibilitatea să reproducem această deducere, vom observa doar că în ea se folosește în particular un triunghi caracteristic, în același spirit ca și la B. Pascal (1658). Mai tîrziu, seriile pentru sinus, cosinus și arctangentă sînt deduse de I. Newton în jurul anului 1666 (publicate în 1711) — *N.A.*

Generalități. În secolul al VII-lea lumea este surprinsă de ridicarea neobișnuit de rapidă a imperiului arab. La sfîrșitul secolului al VI-lea și începutul secolului al VII-lea, Arabia trece printr-o grea criză economică și politică. Muhammed sau Mahomed, fondatorul unei noi religii, fuge de dușmanii lui politici și religioși de la Mekka la Iathrib, viitoarea Medina, în anul 622. Această formă de monoteism, denumită islam[1], avînd la bază credințe formate în păturile de jos ale societății, apare pentru a contrabalansa politeismul straturilor conducătoare ale Arabiei. Mahomed întemeiază la Medina o uniune a triburilor arabe care adoptă islamul. Mahomed este recunoscut ca proroc al lui Alah. Anul fugii (hegirei) din Mekka (622) devine anul de la care pornește numărătoarea anilor în calendarul musulmanilor, adepții islamului. În anul 630, Mahomed se înapoiază învingător la Mekka, unde moare după doi ani. Urmașii „prorocului" — califii[2] încep o serie de expediții de cucerire în țările bogate din Răsărit și Apus sub lozinca războiului sfînt împotriva necredincioșilor, în numele răspîndirii islamului. Într-o scrisoare către F. Engels, K. Marx observă că „istoria Răsăritului ia aspectul unei istorii a religiilor" [6, p. 73].

În mai puțin de 100 de ani arabii pun stăpînire pe un teritoriu imens. Înspre anul 637 în mîinile lor se și află Siria și Iranul, iar către anul 642 — Egiptul. Garnizoanele bizantine din Siria și Egipt nu pot opune o rezistență puternică, iar meseriașii și țăranii oprimați cu cruzime ca și în alte țări îi susțin chiar pe arabi, în speranța că-și vor îmbunătăți condițiile de viață. În anul 711, arabii împreună cu berberii traversează strîmtoarea îngustă dintre Africa și Europa: în anul 712 armatele arabe cotropesc Horezmul și o parte din Pendjab. La mijlocul secolului al

[1] *Islam* înseamnă supunere (lui Alah) — *N.A.*
[2] *Calif* înseamnă locțiitor și continuator (al prorocului) — *N.A.*

VIII-lea, califii stăpînesc Peninsula Iberică, și în afara unei fîșii înguste din Asturia, toate țările mediteraneene din Africa, Orientul Apropiat, regiuni întinse din Asia Mică, Caucaz și Asia centrală, o parte din valea Indului pe ambele maluri ale rîului. Dar avîntul lor nestăvilit slăbește. Granițele vestice ale Chinei se dovedesc a fi puternice. În anii 717—718, bizantinii resping ultima încercare a flotei arabe de a cuceri Constantinopolul de pe mare. Pe cîmpiile Franței, Carol Martel înfrînge oștile arabe lîngă Poitiers în anul 732. Ca un fel de compensare, în mijlocul secolului al IX-lea, arabii se consolidează pentru aproape două secole în Sicilia.

În timpul dinastiei Omeiazilor, începînd cu anul 635 capitala califatului se află în Siria, la Damasc. În 762, al doilea calif, al-Mansur din noua dinastie a Abbasizilor mută capitala în orașul Bagdad, pe care-l întemeiază atunci în Irak.

Evenimentele politice din califat se desfășoară pe fondul descompunerii formației sclavagiste și de statornicire a feudalismului. Guvernanții de la Bagdad acordă o mare atenție agriculturii și prin urmare irigațiilor. Se dezvoltă orașele, se ridică minunate construcții arhitectonice, se perfecționează meseriile, se face un vast comerț. Odată cu aceasta, în forme ceva mai diferite de cele din Europa occidentală, feudalilor li se împart pămînturile, fapt care duce la întărirea tendințelor centrifuge. Bazele regimului sînt subminate de răscoalele intermitente ale țăranilor și ale sclavilor. Toate acestea au contribuit mai tîrziu la descompunerea califatului.

Îndeosebi la început, arabii manifestă o anumită toleranță față de credința și obiceiurile popoarelor subjugate, iar profesarea religiei islamului prezenta avantaje hotărîtoare. Treptat, sub influența comună a stimulării și a silniciei, majoritatea populației califatului trece la islam. Acest lucru a fost ușurat de caracterul eclectic al islamului, care cuprinde elemente de politeism, iudaism și creștinism. Limba arabă — limba oficială a statului și a bisericii — devine populară în multe țări și limba comună a intelectualilor.

În țările cucerite, arabii găsesc o cultură mai dezvoltată decît cultura lor proprie dar curînd asimilează complexul vast al concepțiilor spirituale, acumulat din vechime în aceste țări. Împreună cu sirienii, perșii, evreii etc., arabii încep să creeze o cultură nouă și originală. S-a păstrat legenda că cel de-al doilea calif Omar (634—644) a ordonat să se distrugă multe cărți luate pradă în Iran, spunînd: „Dacă ele conțin ceva care să ducă spre adevăr,

atunci noi avem de la Alah ceea ce duce şi mai bine spre el, iar dacă conţin lucruri false, ele nu ne sînt necesare". Se poate întîmpla ca aceste cuvinte să şi exprime tendinţele primilor cuceritori, dar un asemenea fanatism dus la extrem este străin unei serii întregi de conducători musulmani de mai tîrziu. Puternice curente raţionaliste şi materialiste din filozofia islamului contribuie la însuşirea moştenirii de idei a lumii vechi şi la înflorirea ştiinţelor naturii. În unele cazuri, expediţiile arabilor sînt însoţite de represiuni crude împotriva populaţiei şi de distrugerea patrimoniului cultural al acesteia. Aşa s-a întîmplat cu vechiul stat Horezm, stat foarte dezvoltat. Al-Biruni, născut în Horezm, povesteşte în felul următor în secolul al XI-lea despre cucerirea patriei sale de către arabi:

„Şi nimici Kuteiba pe oamenii care cunoşteau bine scrisul din Horezm, ştiau legendele lui şi-i învăţau [ştiinţele] existente la locuitorii din Horezm, şi i-a supus la tot felul de cazne şi au devenit [aceste legende] aşa de ascunse, încît nu se mai poate afla cu exactitate ce s-a întîmplat [cu locuitorii Horezmului chiar] după apariţia islamului" [82, p. 46]. În consecinţă, noi nu ştim nici pînă astăzi nimic despre situaţia ştiinţelor în vechiul Horezm, şi totuşi mulţi învăţaţi mari din ţările Islamului fuseseră originari din Horezm.

În acele vremuri, comerţul are o mare importanţă în transmiterea cunoştinţelor ştiinţifice. Legăturile comerciale ale califatului sînt imense: arabii fac negoţ cu India şi China, Imperiul Bizantin şi Rusia, cu regiunile de pe întregul litoral al Mării Mediterane. Negustorii şi călătorii arabi urcă departe, în sus, pe Volga, ajung pînă-n Africa centrală şi de-a lungul malurilor ei vestice, pînă la Madagascar. Ambasadori ai califilor apar pe lîngă curtea lui Carol cel Mare şi a împăraţilor chinezi.

Primul centru mare ştiinţific al califatului este Bagdadul. Terenul pentru noua înflorire a ştiinţei în regiunile centrale ale ţării fusese în parte pregătit dinainte. În Siria şi Iran funcţionaseră încă dinainte mari şcoli: în secolul al V-lea şi al VI-lea veneau aici în căutarea refugiului învăţaţi păgîni sau creştini, adepţi ai diferitelor secte izgoniţi din Bizanţ — se traduseseră în limba siriană multe lucrări ştiinţifice greceşti. La sfîrşitul secolului al VIII-lea şi începutul secolului al IX-lea la Bagdad se adună mulţi învăţaţi şi traducători din diferite locuri. Un şir de califi, începînd cu al-Mansur (754—755) şi Harun al-Raşid (786—809), sprijină dezvoltarea ştiinţelor naturii şi a matematicii. În timpul lui Harun se deschide o mare bibliotecă care se completează cu

manuscrise aduse chiar și din Bizanț. În oraș există zeci de alte biblioteci și mulți oameni se ocupă cu transcrierea operelor științifice. Al-Mamun (813—833) reunește pe învățați într-un fel de academie denumită *Beit al-Himka*, *(Casa înțelepciunii)*. Pe lîngă această „casă a înțelepciunii", a existat un observator astronomic bine utilat. Se întreprind lucrări vaste de astronomie și geografie, se măsoară din nou lungimea meridianului și înclinarea eclipticii. Mai trebuie adăugat că acest mare interes al guvernanților pentru astronomie era legat de o serie de superstiții astrologice.

La Bagdad, un imbold deosebit pentru preocupările astronomice îl imprimă cunoașterea realizărilor indiene. În dicționarul său biografic, marele dregător și mecenat al secolului al XIII-lea, Abu-l-Hasan al-Kifti (1172—1248), scrie:

„În anul 156 al hegirei [adică anul 773], din India sosește la Bagdad un om foarte informat despre științele din patria lui. Acest om stăpînea procedeul Sindhind referitor la mișcările aștrilor și la calculele cu ajutorul sinusurilor din sfert în sfert de grad. El mai cunoștea diferite procedee pentru determinarea eclipselor și a răsăritului constelațiilor zodiacului. El a întocmit o scurtă expunere a unei opere corespunzătoare, atribuită unui rege indian, după nume Figar. În această operă, *cardadja* s-au calculat din minut în minut. Califul a ordonat să se traducă tratatul indian în limba arabă, pentru ca musulmanii să cunoască precis stelele. Traducerea i s-a încredințat lui Muhammed, fiul lui Ibrahim al-Fazari, primul dintre musulmanii care s-a preocupat de studierea mai profundă a astronomiei. Mai tîrziu, această traducere astronomii au numit-o „Marele Sindhind" [83, p. 392]. Cuvîntul *sindhind* este *siddhanta*, iar *cardadja* este probabil cuvîntul indian *ardhadjiva* [vezi p. 169], iar Figar poate să fie numele denaturat al regelui indian Viagr'a sau Viagr'amuka, în timpul căruia Brahmagupta și-a scris opera. Care dintre cărțile *siddhanta* fusese tradusă în timpul lui al-Mansur nu se știe. Informația lui al-Kifti este foarte apropiată de povestirea mai veche a astronomului Muhammed ibn Hamid, aproximativ din anul 900 [18, I, pp. 44—45]. Dacă sosirea învățatului indian permite pentru întîia oară să se cunoască la Bagdad astronomia din cărțile *siddhanta*, totuși terenul pentru preocupări astronomice și un interes față de astronomie existaseră aici încă dinainte. Se cunosc numele a trei astronomi care au lucrat în timpul lui al-Mansur. Despre ei s-a mai amintit; aceștia sînt: al-Kifti Abu Ishak Ibrahim al-Fazari (decedat în jurul anului 777), primul constructor al astrolabului arab. fiul său, Muhammed (decedat în jurul anului 800),

și în sfîrșit autorul lucrărilor de sferică și al unor tabele, Iakub ibn Tarik (decedat în jurul anului 796).

Școala de matematică din Bagdad funcționează activ timp de două secole. La început, un loc foarte important îl ocupă studiul și publicarea în limba arabă a autorilor vechi. Aproximativ în 100—150 de ani se traduc în limba arabă, din greacă sau din traducerile siriene, operele fundamentale ale lui Euclid, Arhimede, Apoloniu, Menelau, Teodosiu, Heron, Ptolemeu, Diofant și ale altor autori. Unele opere, ca de pildă *Elementele lui Euclid*, s-au tradus de cîteva ori. La traduceri și comentarii participă învățați care dau o nouă viață acestei literaturi. Operele autorilor greci, care timp de cîteva secole zăcuseră în uitare, devin din nou manuale de studiu curent. Un rol important în formarea matematicii în țările Islamului îl joacă și cunoștințele căpătate din India și tradițiile din Horezm, Persia și Mesopotamia. Mai tîrziu, capătă importanță legăturile cu China, deși, după cîte cunoaștem, traduceri directe din limba chineză în arabă n-au existat.

Astronomia are o importanță fundamentală pentru progresul matematicii din Orientul Apropiat și Mijlociu, afară de problemele de construcții, măsurători de pămînt, comerț și finanțe de stat, care uneori luau un caracter foarte original (probleme complicate de împărțirea moștenirilor, construcții complicate și calcule de arhitectură). O mare importanță fundamentală o are astronomia. La fel ca în India și China, matematicienii țărilor Islamului sînt în cea mai mare parte și astronomi. Aici, un rol important îl capătă din nou problemele referitoare la calendarul lunar. Un nivel înalt îl atinge construcția aparatelor științifice. Mulți matematicieni se ocupă ei înșiși de îmbunătățirea instrumentelor astronomice cunoscute și de construirea altora noi. Se perfecționează ceasul cu apă. Observațiile astronomice obținute în observatoarele utilate după ultimul cuvînt al tehnicii întrec în calitate pe cele din Alexandria, iar acest lucru sporește cerințele față de exactitatea calculelor efectuate adesea cu un număr mare de semne sexagesimale. La progresul astronomiei și al geografiei descriptive contribuie călătoriile în țări îndepărtate și îndelungate călătorii pe mare. Studii speciale de matematică devin necesare în optica geometrică, pentru studiul oglinzilor de diferite forme. Astfel, în centrul intereselor școlii din Bagdad se ridică chiar de la început probleme de aritmetică comercială, măsurarea figurilor, calcule și construcții aproximative, trigonometrie, algebră numerică.

În dezvoltarea matematicii în țările Islamului se pot distinge trei etape care trec pe nesimțite de la una la alta. Inițial, desigur, precumpănește asimilarea moștenirii culturale atît elene, cît și a celei orientale, părînd într-un timp că elementele elene ocupă primul loc. În realitate însă, pe același plan cu crearea unei imense literaturi de traduceri și comentarii ale acestora, încă în secolul al IX-lea se formează o cultură originală matematică, ale cărei particularități le-am remarcat mai sus. Încă de pe atunci cunoștințele și metodele vechilor greci se aplică pe larg pentru rezolvarea problemelor de matematică calculatorie. Această tendință se amplifică în decursul secolelor al X-lea — al XI-lea, odată cu dezvoltarea calculelor astronomice și a metodelor algebrice și trigonometrice aproximative și, în sfîrșit, se manifestă cu toată tăria în secolele al XII-lea — al XV-lea. După toate aparențele, aici a avut o importanță deosebită consolidarea contactelor cu știința Chinei.

Odată cu aceasta, după cum am subliniat, studiul aprofundat și îndelungat al lui Euclid, Arhimede și Ptolemeu a avut o importanță excepțională pentru matematica din Orientul Apropiat și Mijlociu și a condiționat deosebirea ei specifică de interesele școlii științifice chineze și indiene, apropiate între ele ca orientare generală.

Asimilarea moștenirii clasice permite matematicienilor din țările Islamului să ridice considerabil nivelul de elaborare a problemelor rezolvabile prin calcul și algoritmi și să antreneze pentru rezolvarea și generalizarea lor mijloace mai puternice decît acelea pe care le avuseseră la dispoziție indienii și chinezii. Acolo unde aceștia se limitaseră la crearea unor reguli izolate de calcul, învățații țărilor Islamului construiesc adesea teorii întregi. Astfel, pe baza teoriei antice a secțiunilor conice ei creează o dezvoltată știință geometrică referitoare la ecuațiile de gradul al treilea. Chiar și în comentarea elenilor, ei scot pe primul plan idei noi, înlocuind de pildă teoria rapoartelor lui Eudoxus și Euclid printr-o altă teorie, care conține o noțiune mai largă privind numărul real și răspunde noilor cerințe ale științei și ale aplicațiilor ei.

Influența matematicii elene se reflectă nu numai asupra metodelor de cercetare, ci și asupra stilului operelor arabe, în care se acordă o atenție mărită raționamentelor demonstrative, prezentării sistematice a materialului și expunerii lui cît mai complete. În acele cazuri cînd autorii nu prezintă deducerea regulilor, formulările lor se disting prin claritate și amănunțime. În multe

cărţi întîlnim totodată o abundenţă de exemple şi probleme, caracteristică matematicii orientale şi avînd adesea un conţinut practic concret.

Şirul de învăţaţi eminenţi ai şcolii din Bagdad îl deschide primul clasic al matematicii ţărilor Islamului, Muhammed al-Horezmi care lucrează în timpul lui al-Mamun. Lăsînd deoparte numele multora dintre ei, vom cita pentru secolul al IX-lea, pe Tabit ibn Korra, în secolele al IX-lea — al X-lea pe Abu-l-Vafa, al-Kuhi şi al-Karadji. Bagdadul este centrul ştiinţific principal al califatului, dar nu este unicul. Cercetări se mai efectuează la Damasc şi în alte oraşe. Al-Battani lucrează în jurul anului 900 la Observatorul de la ar-Rakka de pe Eufrat, al-Hodjandi — la Observatorul din oraşul Rei, în apropiere de actualul Teheran.

Asemenea altor state feudale din evul mediu, califatul arab nu a fost o formaţie politică durabilă. La sfîrşitul secolului al VIII-lea se separă îndepărtatele provincii spaniole şi africane, iar apoi alte părţi din Africa de nord. Către sfîrşitul secolului al IX-lea devine independent Egiptul cu o serie de regiuni învecinate, iar ceva mai devreme se separă regiuni întregi din Iran, Tadjikistan şi Caucaz. Se creează şi dispar state mari. În schimbarea statelor şi a dinastiilor, un rol deosebit îl joacă neînţelegerile feudale şi cele dintre triburi. Se ridică triburile tiurice şi conducătorii lor. Pe o parte din actualul Iran, Tadjikistan şi Afganistan se creează un stat de fapt independent, deşi la început supus formal dinastiei Abbasizilor, statul Samanizilor (875—999), cu capitala la Buhara. Unul dintre conducătorii de oşti samanizi, bazîndu-se pe armatele tiurice, se răscoală şi pune bazele statului Gaznevizilor, în care intră Afganistanul şi Pendjabul (962—1186); numele acestui stat provine de la capitala — oraşul afgan Gazna, devenit un mare centru cultural şi ştiinţific. Vestitul neam turkmen al seldgiucizilor formează un imperiu întins (1038—1157) în partea de sud a Asiei centrale, în Iran, Irak, o parte din Asia Mică şi Transcaucazia. În anul 1055 seldgeucizii cuceresc Bagdadul şi doboară pe Abbasizi. În timpul seldgeucizilor se ridică oraşele Rei, Merv, Ispahan. În primul sfert al secolului al XIII-lea năvălesc mongolii sub conducerea lui Gingis-han, distrugînd gospodăriile şi nimicind populaţia. După ce se consolidează în Asia centrală şi în Iran, mongolii pornesc mai departe şi în anul 1258 cuceresc şi Bagdadul. Totuşi imperiul mongol, sfîşiat de contradicţii interne, cînd se descompune, cînd se reunifică sub conducători mai puternici, de felul lui Timur (1370—1405).

Pentru consolidarea puterii, mongolii încurajează restabilirea economiei regiunilor distruse, îndeosebi în Asia centrală. Se reconstruiesc într-o strălucire și mai mare orașe pe jumătate distruse, se curăță și se construiesc canale noi și drumuri, reînfloresc meseriile și negoțul.

Situația învățaților este adesea grea. Ca și întreaga populație, ei pot deveni ușor jertfe ale cuceritorilor. Dar afară de aceasta, ei mai trebuie să se păzească și de conflictele cu religia oficială și sînt îndeosebi într-o dependență materială directă față de suverani și magnați. Aventurieri dibaci, dușmani înverșunați ai învățaților veritabili se bucură de încrederea conducătorilor neștiutori și superstițioși, fiind folosiți adesea ca vraci și astrologi. Vestitul poet, astronom și matematician Ommar Khayyam, a cărui tinerețe se desfășoară în timpul anilor de luptă pentru putere a seldgeucizilor, scrie:

„Am fost martorii nimicirii învățaților, din care rămase doar o mînă de oameni, puțin numeroasă, dar mult chinuită. Asprimea soartei în aceste timpuri îi împiedică să se consacre perfecționării și adîncirii științei lor. Mulți dintre aceia care astăzi au aspectul unor învățați, îmbracă adevărul în minciună, fără să iasă în știință dincolo de granițele falsificării și ale fățărniciei, iar cunoștințele pe care le mai au le folosesc doar în scopuri josnice trupești. Și dacă întîlnesc vreun om care se deosebește de ceilalți prin aceea că iubește și caută adevărul, străduindu-se să respingă minciuna și falsitatea și reneagă lăudăroșenia și înșelăciunea, ei îl fac obiect al disprețului și al derîderii lor“ [132, p. 16].

Totuși toate aceste împrejurări n-au putut opri timp îndelungat progresul științific. În orașele mari, îndeosebi în capitale, apar școli și biblioteci noi și se construiesc observatoare. Pentru a imprima mai multă strălucire stăpînirii lor, conducătorii mai luminați întemeiază un fel de academii la fel ca și monarhii de mai tîrziu din Europa, în secolele al XVII-lea — al XVIII-lea. Toate acestea asigură preluarea cunoștințelor din trecut, deși nu în aceeași măsură, cum se întîmplă mai tîrziu după inventarea tiparului și după publicarea în masă a lucrărilor științifice.

În diferite timpuri, centre mari științifice se află la Buhara, Horezm, Gazna, Rei și alte orașe. La Gazna lucrează îndeosebi timp îndelungat, al-Biruni. Khayyam conduce la sfîrșitul secolului al XI-lea Observatorul din Ispahan. După distrugerea Bagdadului, hanul mongol Hulagu pune pe marele astronom și matematician Nasireddin at-Tusi la conducerea Observatorului special construit la Maraga, ceva mai la sud de Tebriz. De o pro-

tecție deosebită se bucură învățații din partea conducătorului Ulug-bek (1394—1449) din Samarkand, care se ocupă el însuși de astronomie. La Observatorul lui Ulug-bek din Samarkand lucrează un grup mare de învățați, alcătuit din Djemșid Ghiaseddin al-Kași, Kazi-zade ar-Rumi, al-Kușci și alții.

În jurul anului 900 la Cairo lucrează algebristul Abu-Kamil. Tot acolo, timp de 200 de ani, începînd cu sfîrșitul secolului al X-lea, funcționează academia egipteană *Dar-al-Himka*, adică *Lăcașul înțelepciunii*, proslăvit în secolele al X-lea — al XI-lea de astronomul ibn Iunis și matematicianul și fizicianul ibn al-Haisam.

Studii de matematică se mai efectuează atît în Peninsula Iberică, cît și în Africa de nord-vest. Curînd după ce sînt cucerite de arabi și berberi (mai tîrziu, arabii și berberii capătă denumirea de mauri), aceste provincii ale califatului obțin independența (756). În anul 929 emirul de Cordoba, Abd-ar-Rahman al III-lea (912—961), se proclamă calif și consolidează formal separarea de Bagdad. În califatul Cordobei înflorește o cultură originală mauro-spaniolă, care cuprinde elemente hispano-romane, orientalo-arabe, berbere și evreiești. O importanță hotărîtoare pentru tematică o are aici răspîndirea realizărilor școlii din Bagdad, începînd cu lucrările lui Muhammed al-Horezmi. Totuși, din cauza dezbinării politice, contactul științific cu Orientul slăbește treptat și multe rezultate nu mai ajung pînă în Spania. Astfel, despre minunatele lucrări ale lui Khayyam în Peninsula Iberică se știa numai din auzite. Matematicienii mauritani, ca de pildă Gabir ibn Afla, care lucrează la Sevilla în secolul al XII-lea, sau marocanul ibn al-Banna, care trăiește în secolele al XIII-lea — al XIV-lea, fac în mod independent unele descoperiri, îndeosebi de trigonometrie. Totuși, matematica nu atinge aici niciodată o înflorire similară cu cea din țările musulmane răsăritene. Procesul de feudalizare duce la începutul secolului al XI-lea la descompunerea califatului de Cordoba în nenumărate principate mărunte. În acest timp se întărește *reconquista* — recucerirea de către spanioli și portughezi a pămînturilor ocupate de mauri. În anul 1085 spaniolii ocupă orașul Toledo. Sosirea unor noi triburi berbere frînează întrucîtva *reconquista*, dar în anul 1236 cade Cordoba, iar ceva mai tîrziu în stăpînirea maurilor rămîne doar emiratul de sud al Granadei. În anul 1492 cade și acesta, iar cu puțin mai devreme se mută la Tunis ultimul mare matematician mauritan, al-Kalasadi. Secolul al XV-lea este de asemenea și

ultimul secol al progresului matematicii în țările răsăritene ale Islamului.

Activitatea învățaților din țările mauritane sau din teritoriile recucerite de spanioli are o mare importanță pentru răspîndirea cunoștințelor în Europa. Tocmai de aci începe să pătrundă și în alte țări europene moștenirea științifică a Orientului și a Greciei (în traduceri arabe). În secolele al XII-lea — al XIII-lea în Spania și în special la Toledo lucrează mulți traducători și compilatori, cărora știința le datorează texte latinești sau prelucrări ale multora dintre cele mai importante opere arabe și grecești traduse în limba arabă. Activitatea acestor oameni este tot atît de importantă pentru noul avînt al matematicii în Europa ca și munca traducătorilor din Bagdad pentru știința țărilor Islamului.

Vorbim aici cînd despre matematica arabă, cînd despre matematica țărilor Islamului. Ambii termeni prezintă neajunsuri. Descoperirile matematice din țările musulmane sînt rezultatul colaborării creatoare dintre învățații multor popoare, ca de pildă perșii, horezmienii, arabii, tadjicii, grecii, sirienii, maurii, evreii etc. Faptul că literatura de bază s-a scris în limba arabă caracterizează, desigur, tot atît de puțin conținutul ei matematic, ca și faptul că în majoritatea cazurilor autorii ei fuseseră musulmani. O denumire scurtă și perfect convenabilă pentru acel complex al cercetărilor de matematică despre care vorbim nu există în prezent și pe viitor ne vom folosi de ambii termeni întrebuințați în general, ei fiind mai scurți decît „matematica în țările Orientului Apropiat și Mijlociu".

Și-acum, cîteva cuvinte despre literatura de specialitate. În bibliotecile și muzeele multor țări se păstrează un număr imens de manuscrise de matematică și astronomie în limba arabă și persană, precum și traducerea lor în latină. Multe dintre ele sînt publicate sau cel puțin descrise în amănunt. Dispunem de traducerea în limbile europene a tratatelor fundamentale ale lui al-Horezmi, Abu-l-Vafa, Abu Kamil, al-Karadji, al-Biruni, at-Tusi și ale altor învățați. Dar publicarea literaturii arabe de matematică este și pînă în prezent departe de a fi încheiată, rămînînd necunoscute sau puțin cunoscute lucrări foarte importante. Acest lucru l-au arătat în mod convingător cercetările din ultimul timp, în care s-au studiat pentru întîia oară asemenea capodopere, cum sînt: comentariile lui Khayyam, la *Elementele* lui Euclid sau opera lui al-Kași despre măsurarea cercului. Tabloul de dezvol-

tare a matematicii arabe pe care-l propunem mai jos va apărea desigur incomplet într-un viitor apropiat, și trebuie să presupunem că aceasta se referă numai la amănunte. Completările ulterioare nu vor putea însă decît să dea o apreciere și mai înaltă realizărilor obținute de matematicienii Orientului Mijlociu și Apropiat și din Asia centrală [84—94].

Răspîndirea numerației zecimale poziționale. Mai întîi să facem cunoștință cu lucrările lui Abu Abdullah Muhammed ibn-Musa al-Horezmi al Madjusi (aproximativ între anii 780 și 850). Despre viața lui cunoaștem destul de puține lucruri. Nisba[1] al-Horezmi arată că el se născuse în Horezm, iar cuvîntul Madjusi arată că printre strămoșii lui unii au fost magi — preoți ai lui Zoroastru. În Horezm domnea zoroastrismul. Al-Horezmi se află în centrul unei pleiade de matematicieni și astronomi care lucrează în timpul lui al-Mamum în *Casa înțelepciunii*. S-au păstrat parțial, sub formă de prelucrări, cinci opere ale lui al-Horezmi: de aritmetică, algebră, astronomie, geografie și calendar. Probabil că tot lui îi aparțin și tratatele dispărute despre ceasul solar și despre astrolab [95].

Lucrările lui al-Horezmi, îndeosebi tratatele de aritmetică și de algebră, au avut o influență imensă asupra dezvoltării ulterioare a matematicii. Ele devin punctul de plecare a numeroase cercetări; ele au fost comentate; părți din acestea au intrat în alte cărți; după ele învață zeci de generații. Autorul a cules în lucrările sale elementele de bază necesare atît învățaților cît și oamenilor de afaceri, ținînd seama îndeosebi de nevoile practice de fiecare zi (compară cu p. 14).

În lucrarea de aritmetică a lui al-Horezmi se dă prima expunere în limba arabă a numerației poziționale și a operațiilor bazate pe aceasta.

Tratatul de aritmetică al lui al-Horezmi a ajuns pînă la noi doar într-o traducere latină [96]. Traducerea s-a făcut către mijlocul secolului al XII-lea, dar unicul manuscris cunoscut pînă în prezent datează de la mijlocul secolului al XIV-lea. Totodată, el nu constituie o traducere fidelă a textului original — arab sau latin —, ci o expunere a acestuia, ceea ce rezultă incontestabil din incluziunile, lipsurile și inexactitățile pe care le conține. Manuscrisul se păstrează la biblioteca din Cambridge. El începe

[1] Nisba — acea parte din nume care indică locul de naștere — *N.A.*

(fig. 41) cu cuvintele *Dixit Algoritmi*[1], adică „Algoritmi a spus...." și se oprește la mijlocul unui exemplu de înmulțire a fracțiilor. Din fericire tratatul de aritmetică al lui al-Horezmi se poate studia mai ușor pentru că mai există alte două opere latine apropiate de el. Acestea sînt în primul rînd *Cartea Algorismului despre practica aritmeticii (Liber Algorismi de practica arismetrice)*, o compilație întocmită după toate probabilitățile de Joannes din Sevilla sau Toledo, evreu spaniol creștinat, care a lucrat la Toledo aproximativ între anii 1135 și 1153 [96]. Primele capitole din *Cartea Algorismului*, în ce privește conținutul, sînt foarte asemănătoare cu manuscrisul de la Cambridge. O altă operă este *Cartea introducerii Algorismului în arta astronomică, întocmită de magistrul A.* (*Liber ysagogarum Alchorismi in artem astronomicam a magistro A. Compositum* vezi p. 377), cunoscută în două copii, una datată cu anul 1143, iar alta ceva mai tîrziu. Se presupune că „magistrul A" ar fi fost englezul Adelard din Bath care aparținuse și el școlii toledane. Este posibil ca același Adelard din Bath să fi tradus și tratatul de aritmetică al lui al-Horezmi [97—98].

Deși manuscrisul din Cambridge n-are titlu, totuși dacă comparăm cîteva expresii din el cu copia lucrărilor lui al-Horezmi, făcută de un autor arab din secolul al IX-lea, ne permite să presupunem că titlul tratatului fusese *Carte despre adunare și scădere după sistemul indienilor (Kitab al-djam va-t-tafrik bi-hisab al-Hind)*. După cum se vede, titlul cuprinde doar numele celor două operații fundamentale ale aritmeticii, la care se reduc celelalte. La început, al-Horezmi spune că are de gînd să expună procedeul de calcul al indienilor cu ajutorul a nouă cifre-„litere", prin care se exprimă ușor și pe scurt orice număr și se efectuează operațiile aritmetice. În manuscris cifrele nu sînt scrise și în dreptul lor s-a lăsat loc gol; în general, în manuscris se întîlnesc doar rareori cifre indiene pentru 1, 2, 3, 5 și cerculețul pentru zero; cel care a făcut copia probabil că n-a avut timp să transcrie aproape nicăieri exemplele de numere în cifre indiene care sînt date așa cum se scria în general, în Europa, prin cifre romane sau prin cuvinte; de aceea în locul numerelor au rămas locuri goale.

Explicînd în amănunt procedeul de scriere a numerelor în sistemul zecimal pozițional cu ajutorul semnelor indiene și îndeo-

---

[1] De aici, a fost derivat termenul de *algoritm* în sensul de metodă de calcul. Gheorghe Asachi, în *Algebra* sa (tipărită la Iași în 1837), spune că termenul vine de la „numele unui rege numit Algor". Faptul dovedește existența unei tradiții ale cărei origini nu mai erau cunoscute pe vremea cînd Asachi a studiat matematica la Viena — *I.P.*

Fig. 41. Prima pagină din textul latin al tratatului de aritmetică al lui al-Horezmi (manuscrisul de la Cambridge din secolul al XIV-lea).

sebi întrebuinţarea „cercului mic asemănător cu litera o", al-Horezmi arată cum se pronunţă numerele mari, folosind doar denumirea unităţilor, a zecilor, sutelor şi a miilor. Numărul 1 180 703 051 492 863, netrecut în manuscris, se citeşte astfel: o mie de mii mii mii mii de cinci ori şi o sută de mii mii mii mii de patru ori şi opt zeci de mii mii mii mii de patru ori şi apoi şapte sute de mii mii mii de trei ori şi trei mii mii mii de trei ori şi cincizeci şi una. de mii mii de două ori şi patru sute de mii şi nouăzeci şi două de mii şi opt sute şase zeci şi trei. Asemenea denumiri stîngace de numere se păstrează timp îndelungat în literatura arabă şi europeană.

Mai departe urmează descrierea amănunţită a operaţiilor aritmetice după modele indiene, iar al-Horezmi sfătuieşte ca operaţiile să se înceapă de la rangurile superioare, fiindcă aşa este mai uşor şi mai util. Se recomandă cu insistenţă să nu se uite să se scrie zerourile, pentru a nu greşi la rezultat. Pentru înmulţire, trebuie învăţată tabla înmulţirii pînă la 9 ori 9; se amintesc în mod deosebit proprietăţile multiplicative ale lui zero. Se analizează detaliat cazul scăderii cînd trebuie făcut un împrumut de la rangurile superioare. În general, abstracţie făcînd de conciziunea textului, toate regulile se explică destul de clar pe exemple. Această împrejurare a scăpat atenţiei multor istorici ai matematicilor, care îi reproşează lui al-Horezmi că dă lămuriri incomplete şi ocoleşte dificultăţile. După textul tratatului, calculele se efectuează pe o tablă acoperită cu praf sau nisip, folosind un beţişor ascuţit, după cum se făcea în India[1]. Totodată în manuscris se spune că se poate efectua calculul şi pe orice alt obiect; calculul pe hîrtie sau pe pergament nu se prea face din cauza rarităţii şi a preţului ridicat al acestor produse. Odată cu folosirea hîrtiei, ştergerea cifrelor întrebuinţate se înlocuieşte prin scrierea tuturor calculelor intermediare, inclusiv mutarea înmulţitorului etc. O asemenea practică întîlnim de pildă în manuscrisele europene din secolul al XII-lea ai căror autori urmează modelul arab. Se mai aplică şi bararea cifrelor intermediare întrebuinţate; în acest caz, scrierea devine foarte greoaie şi greu de citit. Vom prezenta un exemplu relativ uşor de înmulţire: 324 · 753 din cartea *Lucruri suficiente despre calculul indian* (*Al-mukni fi-l hisab al-Hind* [100]) al lui Abu-l-Hasan Ali ibn-

[1] Pentru operaţiile cu numere mici, în cercurile de afaceri se folosea calculul pe degete. Nu se ştie dacă s-au folosit abacul cu pietricele sau jetoane (compară [99] şi [98]). — *N.A.*

Ahmed al-Nasavi, născut la Nasa, oraş din apropierea actualului Aşhabad (decedat în jurul anului 1030):

43
309
2977
215962 produsul *243972*
324
753
753
753

În manuscrisul de la Cambridge lipsesc definițiile adunării și ale scăderii numerelor întregi, dar el există la Joannes din Sevilla[1]. Despre înmulțire se spune că în ea unul dintre numere se înmulțeşte *(duplicetur)* după numărul unităților din celălalt (în algebră, al-Horezmi defineşte înmulțirea ca o adunare repetată); despre împărțire se spune că este similară cu înmulțirea, dar este inversă ei, aşa încît în timpul împărțirii se scade, iar la înmulțire se adună. La Joannes din Sevilla se spune că a împărți *(dividere)* înseamnă a desface un număr mare în părți *(partire)* după cantitatea unui număr mai mic, adică se scade de atîtea ori numărul mai mic din cel mai mare, cît este posibil[2]. Înmulţirea se verifică cu ajutorul probei cu nouă.

Al-Horezmi prezintă separat operația împărțirii și a înmulțirii cu doi. Dublarea și înjumătățirea, după cum știm, jucase un rol important în matematica egipteană, unde cu ajutorul acestei operaţii se făceau înmulțirea și împărţirea cu alte numere. Este neclar de unde a preluat al-Horezmi aceste două operaţii rudimentare; poate că el le-a inclus în virtutea unei vechi tradiţii[3]. Istoricii matematicii îi reproșează deseori lui al-Horezmi că a

---

[1] „A aduna *(aggregare)* înseamnă a culege *(colligere)* într-unul singur două sau mai multe numere"; „A scădea *(diminuere)* înseamnă a scoate un număr oarecare dintr-altul mai mare" [96 a, p. 30 și 32]. Definiţii analoge care ţin de logistica antică elenă [96 a, pp. 378 și 382] se întîlnesc în manualele de aritmetică arabe și europene în tot timpul evului mediu — *N. A.*

[2] Aceeaşi definiţie a împărţirii numerelor întregi apare și în manualul de aritmetică practică al lui Abu-l-Vafa (compară p. 204), iar apoi la al-Nasavi și la mulţi autori de mai tîrziu. — *N.A.*

[3] După unele informaţii, negustorii orientali foloseau din vechime dublarea şi înjumătăţirea pentru calcul verbal la înmulţiri și împărţiri mai complicate [101, p. 104] — *N.A.*

introdus aceste operații particulare și de prisos, care de la el au trecut aproape în întreaga literatură medievală arabă și europeană. Cel mai probabil e că al-Horezmi a păstrat și a scos în evidență dublarea și înjumătățirea ca două operații deosebite, numai cu scopul de a ușura elevilor memorarea procedeului de extragerea rădăcinii pătrate. În orice caz, el știe că dublarea este un caz particular al înmulțirii, iar înjumătățirea — al împărțirii. E adevărat că nu se vorbește în manuscrisul de la Cambridge despre aceasta, în schimb în *Cartea Algorismului* a lui Joannes din Sevilla se arată de-a dreptul că înjumătățirea este o formă a împărțirii, iar dublarea — o formă a înmulțirii și că ele „sînt necesare la găsirea rădăcinii care se află cu ajutorul dublării și al înjumătățirii. Din această cauză ele se dau separat aici“ [96, p. 38]. După cum se știe, uneori înjumătățirea trebuie folosită și la rezolvarea ecuațiilor complete de gradul al doilea, iar în algebra sa, al-Horezmi caracterizează aceste ecuații spre deosebire de cele binome, ca ecuații în care „rădăcinile se dedublează“.

După ce expune operațiile asupra numerelor întregi, al-Horezmi trece la fracții. Ne vom referi la ele ceva mai tîrziu, iar acum vom observa că, chiar la începutul capitolului consacrat fracțiilor, al-Horezmi promite să arate în cele ce vor urma cum se extrag rădăcinile. În manuscrisul de la Cambridge nu există descrierea acestei operații. Din *Cartea Algorismului* se vede că al-Horezmi proceda la extragerea rădăcinilor pătrate la fel ca și indienii (compară cu p. 138). Joannes de Sevilla expune de asemenea „găsirea rădăcinilor cu ajutorul zerourilor“, adică extragerea aproximativă a rădăcinii dintr-un număr oarecare N după formula:

$$\sqrt{N} = \frac{1}{10^k} \sqrt{N \cdot 10^{2k}};$$

partea fracționară a rezultatului se transformă în fracții sexagesimale. Verificarea rădăcinii pătrate scoase dintr-un pătrat întreg se face prin proba cu nouă.

Forma cifrelor folosită de al-Horezmi nu se cunoaște și nu e justificată aprecierea lor după cele cîteva semne de cifre pe care le conține manuscrisul de la Cambridge. Este posibil ca pentru cifrele de la 1 la 9 el să fi folosit literele alfabetului, așa cum se procedează uneori mai tîrziu și cum a făcut de pildă al-Biruni. Este de asemenea cu putință ca al-Horezmi să fi folosit de pe

atunci așa-numitele cifre arabe răsăritene (fig. 42). În general, istoria cifrelor noastre prezintă multe neclarități pînă în prezent. Puținele lucruri ce se cunosc cu certitudine se reduc la următoarele:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Cifre arabe răsăritene	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	٠
Cifre arabe apusene	/	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	

Fig. 42. (A doua linie — după un manuscris egiptean din secolul al X-lea).

Cîtva timp după cucerirea Egiptului, Siriei și a Mesopotamiei, arabii folosesc numerația alfabetică greacă. La începutul secolului al XIX-lea apare o numerație arabă proprie, alfabetică, cu semne distincte pentru unități, zeci, sute și mii. Dar încă în prima jumătate a aceluiași secol începe să se răspîndească scrierea pozițională a numerelor cu ajutorul așa-numitelor cifre arabe răsăritene și al semnului zero. Pare foarte probabil că cifrele arabe răsăritene ar fi o modificare a cifrelor brahmi. Aproximativ în același timp, în Peninsula Iberică apar cifrele arabe apusene *gubar*, parțial asemănătoare cu cele răsăritene și despre care vom avea de vorbit în cap. IV (p. 374). Cifrele arabe răsăritene s-au păstrat într-o serie de țări, și anume: în Egipt, Siria, Turcia, Iran etc. Cifrele arabe apusene se folosesc astăzi în Maroc. De la sfîrșitul secolului al IX-lea se păstrează documente cu cifre noi, cel mai vechi document fiind din anii 873—874. În el găsim data corespunzătoare calculului musulman al anilor, adică 260 cu zero sub formă de punct [33, I, p. 41].

Procesul de introducere a numerației zecimale poziționale în țările Islamului este de lungă durată, deoarece și în evul mediu el n-a putut elimina definitiv alte forme de numerație. Cercuri largi ale populației continuă să folosească numerația pur verbală. Despre acest fapt stă mărturie de pildă *Cartea despre ceea ce trebuie să cunoască grămăticii, oamenii de afaceri și alții în știința aritmeticii (Kitab fi ma iahtadj ilaihi al-kuttab min'ilm al-hisab)* a lui Abu-l-Vafa, scrisă între anii 961 și 976. Primele două capitole ale cărții sînt consacrate operațiilor cu numere întregi și fracționare, al treilea se ocupă de măsurarea figurilor plane, a corpurilor și a distanțelor, iar celelalte patru capitole (încă nestudiate — vezi [143]) se ocupă de diferite probleme de aritmetică practică: afaceri comerciale, impozite, sisteme de măsuri, schimb de diferite sorturi de grîne, schimb de bani, împărțirea tainurilor și a sol-

delor în armată, calcule în construcţii de clădiri şi baraje etc. În această operă special adresată practicienilor, sistemul zecimal poziţional nu e folosit şi toate numerele se exprimă prin cuvinte. Cele spuse se referă şi la o altă operă cunoscută de aritmetică, scrisă în jurul anului 1000 de către al-Karadji — *Carte suficientă despre ştiinţa aritmeticii* (vezi p. 239), care se înrudeşte cu tratatul lui Abu-l-Vafa şi cu multe manuale de mai tîrziu, mergînd pînă în secolul al XVI-lea. O asemenea expunere a aritmeticii corespunde mai mult obiceiurilor din cercurile largi ale oamenilor de afaceri şi a concurat cu succes mult timp noua numeraţie ai cărei propagandişti sînt al-Horezmi, al-Nasavi şi alţii (vezi 194—195). Chiar în lucrările de algebră, numerele se transcriau prin cuvinte; aşa se întîmplă şi cu textul de algebră al lui al-Horezmi ajuns pînă în zilele noastre. În multe opere transcrierea numerelor prin cuvinte se împleteşte cu folosirea cifrelor indo-arabe. În practica ştiinţifică şi, în special, în calculele de astronomie, numerele se prezintă în sistem sexagesimal, folosind fie numeraţia alfabetică, fie numeraţia nouă. În Europa, sistemul modern de numeraţie a apărut mai tîrziu decît în ţările arabe, dar el s-a încetăţenit mai repede.

Fracţiile. După cum am spus, o parte din tratatul de aritmetică al lui al-Horezmi are ca obiect fracţiile — în latină *fractiones*, ceea ce reprezintă o traducere a cuvîntului arab *kasr* — de la *kasara* — a frînge. De aici vin diferitele denumiri ale fracţiei în limbile europene[1]: în limba franceză *nombre rompu*, vechea denumire rusească *lomanoe cislo*, (număr frînt — *N.T.*), cuvîntul englez *fraction* şi cel german *Bruch*. Textul latin al aritmeticii lui al-Horezmi exprimă o particularitate caracteristică a limbii arabe în care există numerale speciale pentru fracţiile cu numărător unitate numai pînă la $\frac{1}{10}$ inclusiv. Acestea sînt $\frac{1}{2}$ = nisf, $\frac{1}{3}$ = suls, $\frac{1}{4}$ = rub', $\frac{1}{5}$ = hums, $\frac{1}{6}$ = suds, $\frac{1}{7}$ = sub', $\frac{1}{8}$ = sumn, $\frac{1}{9}$ = tus', $\frac{1}{10}$ = 'uşr. Rădăcinile acestor cuvinte (fără a socoti jumătatea) sînt comune cu rădăcinile cuvintelor exprimînd numerele întregi, ca de pildă 3 = salasa, iar 5 = hamsa. Celelalte

[1] De menţionat faptul că Gh. Lazăr, în cursurile sale (traduceri după Christian Wold şi Metzburg), foloseşte termenul de „număr frîngeros" pentru număr fracţionar — *I.P.*

fracţiuni de unitate în limba arabă n-au o denumire proprie, cum ar fi la noi, de pildă, o treisprezecime, ci „o parte din treisprezece părţi" sau „o parte din treisprezece". În mod corespunzător se deosebesc denumirile fracţiilor de forma $\frac{m}{n}$; graiul arab cunoaşte „trei cincimi", dar nu „trei şaptesprezecimi", în locul căreia se spune „trei părţi din şaptesprezece" sau „trei părţi din şaptesprezece părţi". De aceea fracţiunile de unitate pînă la $\frac{1}{10}$ inclusiv se numeau „articulabile", iar celelalte — „nearticulabile".

Al-Horezmi descrie mai întîi fracţiile sexagesimale pe care le atribuie indienilor, la fel ca şi Joannes de Sevilla. Pe primul loc se află înmulţirea. În prealabil el prezintă regulile pentru determinarea rangului unui produs cînd se înmulţesc două ranguri sexagesimale. Pentru înmulţirea fracţiilor sau a numerelor mixte se recomandă să se transforme fiecare înmulţitor în unităţile rangului său inferior, după care totul se reduce la înmulţirea a două numere întregi şi transformarea produsului într-o fracţie sexagesimală. Al-Horezmi observă că există un alt procedeu mai scurt; probabil că el are în vedere înmulţirea fracţiilor sexagesimale, similară cu înmulţirea noastră a fracţiilor zecimale, cunoscută de învăţaţii din Babilon şi Grecia de mai tîrziu. Pentru împărţire, deîmpărţitul şi împărţitorul se exprimă în unităţile celui mai mic rang al lor; dacă deîmpărţitul are mai puţine unităţi de acest fel, el se transformă în rangul inferior imediat următor. Mai departe se descriu adunarea, scăderea, dublarea şi înjumătăţirea fracţiilor sexagesimale. Joannes din Sevilla prezintă şi extragerea rădăcinii pătrate. Trebuie observat că în capitolul despre fracţii manuscrisul de la Cambridge conţine multe erori.

Pentru fracţiile ordinare se consacră ultima pagină a manuscrisului de la Cambridge care, după cum s-a mai spus, se opreşte la mijlocul unui exemplu de înmulţire a lui $3\frac{1}{2}$ cu $8\frac{3}{11}$. Acest exemplu îl are şi Joannes din Sevilla în a cărui operă capitolul despre fracţii ocupă circa 15 pagini tipărite. Rezolvînd exemplul, Joannes adaugă: „Aceasta este tocmai ceea ce se spune despre înmulţirea şi împărţirea fracţiilor în *Alhorism*, deşi într-un alt fel" [196, p. 68]. Explicînd operaţiile cu fracţiile ordinare, al-Horezmi şi Joannes din Sevilla subliniază analogia cu fracţiile sexagesimale, asemuind fracţiunile iniţiale cu minutele, iar produsul lor — cu secundele. La înmulţire ei urmează schema

prezentată mai departe; fracția din stînga $8\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5}$, scrisă în coloană după modelul indian, după ce se aduce la același numitor devine $\frac{358}{40}$, iar cea din dreapta $3\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{9}$ devine $\frac{93}{27}$; cîtul este aici $\frac{32\,294}{1\,080} = 30\ \frac{894}{1\,080}$:

8		3
1 2		1 3
1 4		1 9
1 5		
40	|1 080|	27
358	33 294	93
	.30. .894. .10 80.	

Acest exemplu dovedește că matematicienii țărilor arabe în timpul lui al-Horezmi și incontestabil mai devreme chiar, prezentau fracțiile ordinare sub forma unor sume de fracții cu numărător unitatea, răspîndită din vechime pe teritoriile Egiptului și Babilonului căzute sub stăpînirea arabilor.

La împărțire, ambele numere se aduc la același numitor, așa încît totul se reduce la împărțirea a doi numărători întregi; Joannes observă în mod special că aducerea la același numitor (efectuată prin simpla înmulțire a tuturor numitorilor) este importantă pentru împărțire, adunare și scădere. Pentru extragerea rădăcinii pătrate dintr-o fracție cu un numitor nepătratic se folosește regula: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$, iar în cazul fracției de forma $\frac{M}{60^{2k-1}}$, el înmulțește cu 60 atît numitorul, cît și numărătorul.

Foarte amănunțit se expun fracțiile în *Cartea despre ceea ce trebuie să cunoască grămăticii, oamenii de afaceri și alții în știința aritmeticii* a lui Abu-l-Vafa, amintită mai sus unde se generalizează și se dezvoltă mai departe experiența oamenilor de finanțe și a calculatorilor. Fiind destinată practicienilor, cartea lui Abu-l-Vafa nu conține demonstrații, ci numai definiții, reguli și exemple.

Manuscrisul nu s-a publicat încă, dar capitolele care ne interesează din acest manuscris sînt descrise [102].

În primul rînd, Abu-l-Vafa arată că un raport este măsura unuia din cele două numere în comparaţie cu celălalt şi că există trei feluri de rapoarte: un număr mai mic faţă de unul mai mare, unul mai mare faţă de altul mai mic şi raportul a două numere egale. Pentru amănunte el ne trimite la o altă operă a sa, încă nedescoperită. Fracţiile apar în rapoarte între numere mai mici faţă de altele mai mari. O asemenea tratare a fracţiilor se întîlneşte încă la greci. În *Elementele* lui Euclid, la care Abu-l-Vafa se referă de nenumărate ori, nu există o definiţie similară a raportului sau a fracţiei, dar propoziţia 4 din cartea a VII-a spune că orice număr mai mic (în raport) faţă de unul mai mare alcătuieşte o parte sau părţi din el, adică după cum am spune noi, $\frac{1}{n}$ sau $\frac{n}{m}$ dintr-un număr mai mare. Poate că în opera amintită, dar neajunsă, pînă în zilele noastre, Abu-l-Vafa îşi va fi construit într-un fel oarecare cu ajutorul rapoartelor teoria despre fracţii şi operaţiile asupra lor. În cartea pentru grămătici, această fundamentare nu există, dar noţiunea şi termenul de „raport" se folosesc pretutindeni.

Raportul unei perechi oarecare de numere se poate exprima prin procedee diferite. Al-Kaşi, care defineşte fracţia ca „o cantitate raportată la un întreg, luat ca unitate" [126, p. 45], scrie:

„Fiecare raport între numărătorul fracţiei şi numitorul ei se exprimă într-o infinitate de moduri, dar cel mai bun dintre ele pentru a fi folosit este numărul cel mai mic din două numere întregi care se află în acelaşi raport, iar toate celelalte expresii sînt mai puţin bune" [126, p. 46]. Abu-l-Vafa învaţă cum se efectuează operaţiile cu fracţii ordinare şi reducerea lor, dar în centrul atenţiei lui se află tot timpul procedeul de „raportare a unui număr la altul", aplicat în cercurile de afaceri, adică, îl preocupă tocmai exprimarea rapoartelor prin fracţii cu numărător unitatea. Acestei probleme îi este în întregime consacrat primul capitol din cartea pentru grămătici.

Abu-l-Vafa separă trei grupe de fracţii, pe care noi le vom numi fundamentale, şi anume:

1) fracţii principale — fracţii cu numărător unitatea de la $\frac{1}{2}$ pînă la $\frac{1}{10}$ inclusiv;

2) fracţii compuse de forma $\frac{m}{n}$, $m < n \leqslant 10$, printre care un loc deosebit îl ocupă $\frac{2}{3}$;

3) fracţii legate — produse ale fracţiilor principale de forma $\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n} \cdot\cdot\cdot \frac{1}{p}$ (exclusiv cele principale).

Abu-l-Vafa numeşte „exprimabile" sau „articulabile" toate fracţiile fundamentale, precum şi toate fracţiile care se pot prezenta sub forma unor sume sau produse ale fracţiilor fundamentale, celelalte sînt numite — „inexprimabile" sau „nearticulabile", surde, *asam* — cu acelaşi termen folosit pentru denumirea numerelor iraţionale, după cum vom vedea mai departe. Fracţii exprimabile sînt acelea ai căror numitori au ca factori numerele 2, 3, 5, 7; cele inexprimabile au la numitor factori primi, mai mari decît 7. Terminologia este evident legată de particularitatea mai sus arătată a limbii arabe.

În calculele comerciale, financiare şi altele similare, locuitorii din ţările Orientului Apropiat şi Mijlociu folosesc mult fracţiile cu numărător unitatea, iar celelalte fracţii le prezintă sub formă de sume şi produse ale acestora. Abu-l-Vafa formulează amănunţit numeroasele reguli pentru o asemenea prezentare care este exactă pentru fracţiile exprimabile şi aproximativă pentru cele inexprimabile. În esenţă, totul constă în descompunerea fracţiilor ordinare în fracţii sexagesimale, reprezentate la rîndul lor prin fracţii fundamentale. Mai întîi trebuie să se ştie cum se descompun în fracţii principale şi legate două tipuri de rapoarte, avînd numitorul egal cu 60 şi un numărător întreg, fracţionar sau mixt. Pentru regulile respective se dau patru tabele cu expresiile celor mai uzuale fracţii cu numărătorul sexagesimal sau, după cum spune însuşi Abu-l-Vafa, „diviziuni din şaizeci" — şi cu numitorul egal cu 60. În tabelul I se dau diviziunile din şaizeci pentru fracţiile principale:

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$
30	20	15	12	10	$8\frac{4}{7}$	$7\frac{1}{2}$	$6\frac{2}{3}$	6

Tabelul II conţine diviziunile din şaizeci a diferitelor fracţii compuse, începînd cu $\frac{2}{3}$ şi terminînd cu $\frac{9}{10}$; totodată pentru ele

$\left(\text{afară de } \frac{2}{3}\right)$ se dau „expresii mai frumoase“ sub forma unor sume de fracții principale sau legate, ca de pildă:

$$\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4},\ \frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10},\ \ldots,\ \frac{9}{10}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10}.$$

În tabelul III sînt incluse diviziunile din șaizeci a cîtorva din cele mai importante sume a unor perechi de fracții de genul $\frac{1}{2}+\frac{1}{7}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{9}$ etc. pînă la $\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$. În sfîrșit, în tabelul IV se dau diviziunile pentru cîteva perechi de fracții legate, ca de pildă: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}$ etc. pînă la $\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{10}$.

Toate aceste tabele se folosesc apoi pentru descompunerea altor fracții.

I. Rapoartele de forma $\frac{n}{60}$, numărul întreg $n < 60$.

Descompunerile se realizează pe baza următoarelor reguli:

a) pentru $n = 10k + 5$ unde $k = 2, 3, 4, 5$, la numărător se separă 15, adică se folosește transformarea:

$$\frac{n}{60}=\frac{n-15}{60}+\frac{1}{4};$$

b) pentru $n = 10k + 2$ și $n = 10k + 7$, unde $k = 1, 2, 3, 4, 5$, la numărător se separă 12, adică se folosește transformarea:

$$\frac{n}{60}=\frac{n-12}{60}+\frac{1}{5};$$

c) pentru $n = 6, 7, 8, 9$, $n = 10k + 1$, $n = 10k + 3$, $n = 10k + 6$, $n = 10k + 8$, la numărător se separă 6, adică:

$$\frac{n}{60}=\frac{n-6}{60}+\frac{1}{10};$$

d) pentru $n = 10k + 4$, și $n = 10k + 9$, la numărător se separă 4, adică:

$$\frac{n}{60}=\frac{n-4}{60}+\frac{1}{15}.$$

De exemplu:

$$\frac{49}{60}=\frac{45}{60}+\frac{4}{60}=\frac{30}{60}+\frac{15}{60}+\frac{4}{60}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10}.$$

Chiar și $\frac{48}{60}$ se exprimă nu prin fracția compusă $\frac{4}{5}$, ci sub forma:

$$\frac{48}{60}=\frac{42}{60}+\frac{6}{60}=\frac{30}{60}+\frac{12}{60}+\frac{6}{60}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}.$$

În general, se preferă ca fracțiile compuse $\left(\text{afară de } \frac{2}{3}\right)$ să fie exprimate prin fracții principale și legate, deși ele se folosesc mult în calculele intermediare.

II. Rapoarte de forma $\frac{n+\alpha}{60}$ unde $n<60$ iar α are forma $\frac{p}{q}$ sau $\frac{p}{q}\cdot\frac{1}{k}$, pentru $1 \leqslant p < q \leqslant k \leqslant 10$, dacă este o sumă a unor fracții exprimabile.

Aici Abu-l-Vafa dă un număr mare de reguli pentru diferiți α. Fără să intrăm în amănunte, să observăm doar că descompunerea pentru $\frac{n+\alpha}{60}$, în general vorbind, nu se obține pur și simplu ca o sumă de descompuneri pentru $\frac{n}{60}$ și $\frac{\alpha}{60}$, ci se efectuează cu ajutorul unor descompuneri auxiliare ale numărătorului în termenii unei sume, care duc la un rezultat cu totul diferit. Algoritmul de descompunere nu este univoc; se dă preferință expresiei sau expresiilor alcătuite dintr-un număr mai mic de fracții principale.

III. Alte rapoarte.

În celelalte cazuri descompunerea se face prin înmulțire cu 60 și apoi raportare la 60. În exemplele lui Abu-l-Vafa se folosește transformarea:

$$\frac{s}{t}=\left(\frac{s\cdot 60}{t}\right):60=\frac{n+\alpha}{60}, \quad n<60, \quad \alpha<1,$$

și toate se reduc fie direct la cazurile I și II, fie, dacă se cere, procedeul se poate itera, înmulțind și împărțind din nou cu 60. Pentru $t=2^{m_1}3^{m_2}5^{m_3}7^{m_4}$ acest procedeu duce la descompunerea exactă. Dacă există alți factori simpli ireductibili la numărător, procesul de descompunere care devine infinit se oprește de fapt la prima sau a doua fază a calculului. De exemplu:

$$\frac{3}{17}=\frac{180}{17}:60=\frac{10+\frac{10}{17}}{60}.$$

Aici Abu-l-Vafa rotunjeşte numărătorul pînă la 11, observînd că: $10 > \frac{1}{2} \cdot 17$:

$$\frac{3}{17} \approx \frac{11}{60} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{10}.$$

Pentru exactitate mai mare, procesul se poate continua:

$$\frac{3}{17} = \frac{10 + \frac{10}{17}}{60} = \left(10 + \frac{600}{17} : 60\right) : 60 = \left(10 + \frac{35}{60} + \frac{5}{17} : 60\right) : 60.$$

Neglijînd ultimul termen al adunării din paranteză, deoarece $5 < \frac{1}{2} \cdot 17$, Abu-l-Vafa obţine:

$$\frac{3}{17} \approx \left(10 + \frac{35}{60}\right) : 60 = \left(10 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) : 60 = \left(6 + 3\frac{1}{3} + 1\frac{1}{4}\right) : 60 =$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8}.$$

Acest procedeu este o descoperire a unor învăţaţi şi poate chiar a lui Abu-l-Vafa. În asemenea cazuri, spune el, grămăticii adaugă la numărătorul şi la numitorul fracţiei inexprimabile un număr oarecare, pentru ca în cele din urmă să obţină o fracţie exprimabilă; în cazul dat

$$\frac{3}{17} \approx \frac{3+1}{17+1} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}.$$

Aproximarea este cu atît mai proastă, cu cît numărul care se adaugă este mai mare, iar alegerea unor termeni fracţionari suficient de mici este dificilă. De aceea Abu-l-Vafa recomandă să se aplice procedeul expus mai sus. Într-adevăr, erorile celor trei aproximări sînt următoarele: prima aproximare a lui Abu-l-Vafa este de circa 4%, a doua — de circa 0,05%, iar pentru numărul 2/9 — de circa 26%. Însuşi Abu-l-Vafa dă eroarea absolută a primei aproximări egală cu $\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{17}$ şi o a treia aproximare, cu o eroare absolută egală cu $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{17}$, aşadar 0,001%.

În cap. II al cărții se descriu operațiile cu numerele întregi, cu fracții ordinare și fracții exprimabile prin cele principale. Am amintit mai sus despre definiția împărțirii numerelor întregi. Merită atenție faptul că lipsesc operațiile de dublare și de înjumătățire. Și mai remarcabil este că, pentru aducerea fracțiilor la același numitor, se recomandă foarte clar să se alcătuiască cel mai mic multiplu comun al tuturor numitorilor. Operațiile cu fracțiile după procedeele grămăticilor și ale calculatorilor au în esență un caracter sexagesimal. Acest lucru rezultă clar din următoarele exemple de adunare și înmulțire:

$$\frac{4}{5}+\frac{2}{3}+\frac{3}{10}=\frac{\frac{4}{5}\cdot 60+\frac{2}{3}\cdot 60+\frac{3}{10}\cdot 60}{60}=\frac{106}{60}=1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10};$$

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)=\frac{\left(\frac{1}{4}\cdot 60+\frac{1}{5}\cdot 60\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)}{60}=\frac{22\frac{1}{2}}{60}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}.$$

Deocamdată sîntem nevoiți să lăsăm deschisă problema originii procedeelor descrise. Este incontestabilă răspîndirea lor mare și din vechime pe teritoriile țărilor arabe; sînt incontestabile urmele clare ale calculului antic babilonian; sînt probabile legăturile cu folosirea fracțiilor cu numărător unitatea în Egipt, Babilonul antic și în țările elenistice. Cu toate acestea, procedeele descrise de Abu-l-Vafa sînt atît de originale în ceea ce privește alegerea inițială a fracțiilor fundamentale, cît și exemplele de transformări, încît sîntem pe deplin îndreptățiți să presupunem că în această privință au existat tradiții populare proprii, durabile, care au dat matematicienilor imboldul de a continua perfecționarea lor. Legat de aceasta, poate să fi avut importanță și faptul că printre variatele sisteme monetare din diferitele regiuni ale Orientului arab fusese foarte răspîndit raportul 1 dinar = 6 danghi[1] = 60 așairi.

Reprezentarea fracțiilor ordinare prin sume și produse de fracții cu numărător unitatea se întîlnește mai tîrziu la mulți alți autori de manuale de aritmetică: în Orient — la al-Karadji, în Apus — la Abu Zakaria Muhammed al Hassar [103] și la al-Kalasadi etc.

O varietate a calculului în fracții cu numărător unitatea este și calculul în danghi, tasudji și așairi, descris în amănunt, de

[1] O rădăcină comună cu cuvîntul *dang* o are cuvîntul rusesc *denga* care, inițial, a avut valoarea unei unități monetare de 1/2 copeici — *N.A.*

pildă, de al-Kași, foarte răspîndit în cercurile de afaceri și la populațiile din Asia centrală și Iran. Danghi, tasudji și așairi sînt unități de măsură medievale pentru greutăți și bani și alcătuiesc respectiv $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{24}$ și $\frac{1}{96}$ din unitatea de bază (dinar, dirhem și altele); pentru scriere se folosesc cifrele *siaka*, apărute din formele de scriere rapidă a numeralelor arabe. Drept fracții elementare mai mărunte serveau danghii așairilor, tasudjii așairilor și așairii așairilor, adică fracțiile: $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{96}$, $\frac{1}{24}\cdot\frac{1}{96}$, $\frac{1}{96}\cdot\frac{1}{96}$ etc.

Al-Kași arată mai întîi cum se transformă fracțiile ordinare în danghi, tasudji, așairi și invers. În primul caz, calculele sînt analoge cu cele prezentate mai sus, cu singura deosebire că în locul factorului 60 apar pe rînd 6, 4 și 6. De pildă:

$$\frac{5}{7} = \frac{30:7}{6} = \frac{4}{6} + \frac{8\cdot 7}{24} = \frac{4}{6} + \frac{1}{24} + \frac{4:7}{96} = 4d\ 1t\ \frac{4}{7}\text{aș}.$$

Pentru înmulțirea și împărțirea fracțiilor prezentate în acest sistem se folosesc tabele conținînd produsele între multiplii diferitelor fracții elementare. Astfel, pentru a înmulți $5d$; $3t$; 3 aș cu $4\ d\cdot 1t\cdot 2$ aș, se găsesc direct în tabel toate cele nouă produse intermediare, se scriu unele sub altele, după ranguri și adunîndu-le se obține rezultatul: $4d\cdot 1t\cdot 1$aș $\cdot\, 1d\cdot$aș $\cdot\, 2t\cdot$aș 2aș $\cdot$aș. Împărțirea se efectuează într-un mod similar.

Tratatul de algebră al lui al-Horezmi. Algebra lui al-Horezmi a ajuns pînă la noi într-o stare mult mai bună decît aritmetica lui. În biblioteca Universității din Oxford există manuscrisul algebrei încheiat în anul 1342 [104]. Afară de aceasta, mai există cîteva manuscrise latine, dintre care unul este o traducere făcută de englezul Robert Chester, la Segovia, în anul 1145 și celălalt o traducere a italianului Gherardo din Cremona (1114—1187) efectuată la Toledo [105, 106]. Textul arab poartă titlul *Scurtă carte despre calculul algebrei și almukabalei (Al-kitab al-muhtasar fi hisab al-djabr va-l-mukabala)* și este alcătuit din următoarele:

1) un capitol propriu-zis de algebră după care urmează un mic capitol despre chestiuni comerciale, și-anume despre regula de trei simplă după modelul indian;

2) un mic capitol de geometrie despre măsurători, cu cîteva aplicații ale algebrei;

3) o carte vastă despre testamente.

În traducerile latine lipsesc al doilea și al treilea capitol. În toate textele există mici deosebiri. Al-Horezmi nu folosește nici un fel de simboluri, expunerea lui este pur verbală și foarte amplă.

Am mai amintit că scopul principal al lui al-Horezmi la întocmirea tratatului de algebră fusese să scrie un manual pentru rezolvarea problemelor practice de fiecare zi. Prin aceasta se explică locul important pe care el îl consacră în mod special problemelor despre testamente și moșteniri, care ocupă ceva mai mult de jumătate din carte. Dreptul musulman de moștenire fusese (iar în unele locuri mai este și azi) supus unei regulamentări severe și complicate care stabilește părțile din avere ce pot reveni moștenitorilor în funcție de gradul de rudenie (soție, soț, fiică, părinți etc.), limitînd drepturile testatorului. De aceea, în fața juriștilor apăreau probleme destul de încurcate, care în manuale se complică încă și mai mult, pentru exersare. Înaintea lui al-Horezmi — încă în Babilonul antic — și după el, se acordă multă atenție problemelor relative la testamente [107].

Algebra lui al-Horezmi este știința despre rezolvarea ecuațiilor numerice liniare și de gradul al doilea. În aritmetică, spune el, oamenii au de-a face cu numere simple. În algebră se studiază trei feluri de numere: numărul sau pur și simplu *dirhem* (*dirhem* — de la grecescul *drahma* — unitate monetară), *djizr* (rădăcina) sau *șai* (obiectul) și *mal* (averea, suma de bani etc., de asemenea, un pătrat). *Mal*, spune al-Horezmi, este produsul lui *djizr* prin el însuși, iar *djizr* este o mărime care uneori trebuie înmulțită prin ea însăși.

Despre proveniența termenilor algebrici ai lui al-Horezmi există diferite ipoteze. În capitolul despre testamente și moșteniri, *mal* înseamnă avere și servește ca necunoscută în problemele liniare. Probabil că mai tîrziu *mal* începe să însemne pătrat, spre deosebire de rădăcină — *djizr*. Cuvîntul *șai* putea să fi fost luat desigur pentru a nota mărimea, obiectul căutat. *Djizr* este probabil traducerea cuvîntului sanscrit *mula*, rădăcină; este posibilă și legătura între cuvîntul *dirhem* și sanscritul *rupa* care înseamnă tot monedă. În orice caz, sensul matematic al termenilor este clar și putem numi prin *djizr* sau *șai* necunoscuta sau rădăcina, iar prin *mal* — pătratul.

Mai întîi al-Horezmi face o clasificare a celor șase tipuri de ecuații liniare și de gradul al doilea analizate de el și procedeele lor de rezolvare. Apoi explică pe exemple cum se aduc alte ecuații la cele șase forme normale. Tocmai aici apar cele două

operaţii fundamentale cuprinse în titlul operei — al-djabr şi al-mukabala.

În forma normală toţi membrii ecuaţiilor trebuie să figureze ca termeni de adunat şi nu de scăzut. Cele şase tipuri (sînt şase, deoarece cazurile în care se ştie că nu există soluţii pozitive sînt dinainte eliminate) sînt următoarele:

1) pătratele sînt egale cu rădăcinile $ax^2 = bx$,
2) pătratele sînt egale cu un număr $ax^2 = c$,
3) rădăcinile sînt egale cu un număr $ax = c$,
4) pătratele şi rădăcinile sînt egale cu un număr $ax^2 + bx = c$,
5) pătratele şi numerele sînt egale cu o rădăcină $ax^2 + c = bx$,
6) rădăcinile şi numerele sînt egale cu pătratele $bx + c = ax^2$.

Pentru a fi rezolvată, orice altă ecuaţie trebuie adusă la una din aceste forme. Dacă există termeni de scăzut, aceştia se elimină cu ajutorul *al-djabr*-ei, adică prin completare, pentru care la ambii membri ai ecuaţiei se adaugă nişte termeni egali cu cei de scăzut. Mai departe, toţi termenii asemenea se reduc la unul singur cu ajutorul *al-mukaba*-lei, adică prin comparaţie. Afară de aceasta, coeficientul termenului de grad superior al ecuaţiei de gradul al doilea trebuie redus la unitate, fiindcă regulile de rezolvare a ecuaţiilor 4) —6) sînt formulate pentru acest caz.

De exemplu, într-o problemă a cărei condiţie se poate scrie sub forma:

$$x^2 + (10 - x)^2 = 58,$$

sau:

$$2x^2 + 100 - 20\,x = 58,$$

al-Horezmi face succesiv transformările:

$$2x^2 + 100 = 58 + 20\;x \quad (\textit{al-djabr}),$$

apoi împarte la 2, reduce termenii asemenea:

$$x^2 + 21 = 10x \quad (\textit{al-mukabala}),$$

şi prin aceasta se obţine o ecuaţie de tipul 5.

Denumirea transformării *al-djabr*, prima din titlul tratatului, se răspîndeşte curînd asupra întregii ştiinţe a ecuaţiilor. Încă Ommar Khayyam scrie despre „soluţiile algebrei“ şi despre algebrişti. Arabii din apus, prin intermediul cărora devine cunoscută în Europa opera lui al-Horezmi, pronunţau litera *djim* ca litera

g şi, respectiv, nu *al-djabr*, ci *al-gabr*. În Europa cuvîntul „algebra“ apare în secolul al XIV-lea, ca denumire a acestei ştiinţe.

În studiul primelor trei tipuri de ecuaţii merită atenţie două situaţii. În primul rînd, al-Horezmi tratează ecuaţia $ax^2 = bx$, ca o ecuaţie liniară, neţinînd seama de soluţia nulă care e neinteresantă în probleme concrete. Aşa se procedează pînă în secolul al XVII-lea. În al doilea rînd şi acest lucru este de remarcat, — ca necunoscută căutată apare nu numai rădăcina ecuaţiei, ci şi pătratul ei. Astfel, determinînd rădăcina $x = 5$ din ecuaţia $x^2 = 5x$, al-Horezmi adaugă că pătratul ei este 25. Şi în cazul ecuaţiei liniare $\frac{1}{2}x = 10$, odată cu rădăcina 20 el prezintă şi valoarea pătratului ei, adică 400; mai mult decît atît, în primul exemplu de acest fel, de la început se spune că rădăcina este egală cu 3, iar apoi se adaugă că pătratul ei este 9.

Rezolvarea ecuaţiilor complete de gradul al doilea impune o analiză specială. Mai întîi autorul prezintă regulile verbale de exprimare a rădăcinilor lor în radicali, iar apoi dă demonstraţiile geometrice. Demonstraţiile se fac pe exemple numerice, dar **au** un caracter pe deplin general.

Rezolvarea ecuaţiei

$$x^2 + 10x = 39,$$

care la fel ca şi alte exemple ale lui al-Horezmi a pătruns în aproape toate cărţile de algebră arabe şi europene medievale, se fundamentează cu ajutorul a două construcţii diferite, ambele corespunzînd completării pînă la un pătrat. Într-una din ele se construieşte pătratul căutat x^2, pe laturile lui — patru dreptunghiuri cu înălţimea $\frac{10}{4}$, iar în colţurile figurii (fig. 43) se adaugă patru pătrate cu latura $\frac{10}{4}$. Pătratul mare obţinut astfel are o arie egală cu $39 + 4\left(\frac{10}{4}\right)^2 = 64$, iar latura lui,

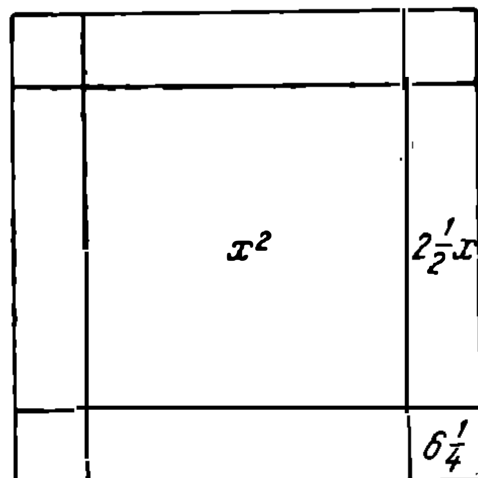


Fig. 43

adică $x + 2\cdot\frac{10}{4}$, este egală cu 8, de unde rezultă că $x = 3$.

În cazul ecuaţiei

$$x^2 + px = q,$$

transformările geometrice corespund celor algebrice:

$$x^2 + 4\left(\frac{p}{4}x\right) + 4\left(\frac{p}{4}\right)^2 = q + 4\left(\frac{p}{4}\right)^2,$$

$$\left(x + 2 \cdot \frac{p}{4}\right)^2 = q + 4\left(\frac{p}{4}\right)^2,$$

$$x + 2 \cdot \frac{p}{4} = \sqrt{q + 4\left(\frac{p}{4}\right)^2},$$

de unde și rezultă regula lui al-Horezmi

$$x = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \frac{p}{2}.$$

O altă demonstrație geometrică rezultă clar din fig. 44, unde:

$$x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

etc. Notațiile de pe ambele figuri sînt ale noastre.

$5x$	x^2
25	$5x$

Fig. 44

Rădăcina negativă a ecuației nu se ia în considerație atît aici, cît și în alte cazuri.

Lăsînd la o parte cel de-al șaselea tip reprezentat prin ecuația

$$x^2 = 3x + 4$$

(în acest caz ecuația are una și numai o singură rădăcină pozitivă), să considerăm ecuația

$$x^2 + q = px.$$

Al-Horezmi știe că în acest caz pot exista fie două rădăcini (pozitive), fie una singură (dublă), fie nici una (ambele — imaginare). Regula se formulează pentru ecuația

$$x^2 + 21 = 10x$$

în următorii termeni:

„Împarte prin doi rădăcinile și vei obține cinci, înmulțește aceasta cu egalul său, vei obține douăzeci și cinci, și scade din aceasta 21 care adăugate la pătrat vor rămîne patru, extrage rădăcina — vei avea doi și scade aceasta din jumătatea rădăcinilor, adică din cinci, vor rămîne trei; aceasta va fi rădăcina pătratului pe care o caut, iar pătratul este nouă. Dacă vrei însă, adaugă

aceasta la jumătatea rădăcinilor, vei obţine şapte şi aceasta este rădăcina pătratului pe care îl caut, iar pătratul este patruzeci şi nouă. Dacă vei întîlni o problemă care te aduce la acest caz, verifică justeţea ei cu ajutorul adunării şi dacă nu este aşa atunci fără îndoială [soluţia] se obţine cu ajutorul scăderii. Numai în acest caz din cele trei, în care rădăcinile trebuie înjumătăţite, se foloseşte atît adunarea, cît şi scăderea. Să ştii de asemenea că atunci cînd în acest capitol înjumătăţeşti rădăcinile şi le înmulţeşti cu egalul lor, dacă produsul este mai mic decît *dirhemurile* adăugate la pătrat, problema este imposibilă, iar dacă el este egal cu *dirhemurile*, rădăcina pătratului este egală cu jumătatea rădăcinilor fără a aduna şi fără a scădea" [104, pp. 111—112]. Ultimul caz $x = \frac{p}{2}$ se remarcă aici în mod special pentru întîia oară în literatura de matematică cunoscută pînă în prezent.

Demonstraţia geometrică a regulii se împarte în două cazuri, corespunzător rădăcinilor:

$$x = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Mai întîi se analizează amănunţit primul caz pe exemplul numeric dat. Dreptunghiul $GCDE$ cu laturile $GC = p$ şi $CD = x$ (fig. 45) este format din pătratul ABCD $= x^2$ şi dreptunghiul ce i se adaugă $GBAE = (p - x)\,x = q$. Presupunînd $x < \frac{p}{2}$ (acest lucru nu-l spune al-Horezmi), în F, mijlocul segmentului GC, se ridică perpendiculara FH, care se continuă cu $HK = AH = \frac{p}{2} - x$. Se completează pătratele $GFKM = \left(\frac{p}{2}\right)^2$ şi $JHKL = \left(\frac{p}{2} - x\right)^2$. Prin construcţie, dreptunghiurile $EJLM$ şi $FBAH$ cu laturi respectiv egale sînt egale între ele. De aceea pătratul $JHKL$ egal cu diferenţa între pătratul $GFKM$ şi suma dreptunghiurilor $GFHE$ şi $EJLM$ este egal cu diferenţa dată a mărimilor $GFKM$ şi $GBAE$, adică cu:

$$\left(\frac{p}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q.$$

De aci latura $JH = AH = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$, iar latura căutată $AD = HD - HA$, adică:

$$x = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

În manuscrisul arab de la Oxford nu se analizează al doilea caz, ci se spune doar că rădăcina mai mare se obține dacă la DH

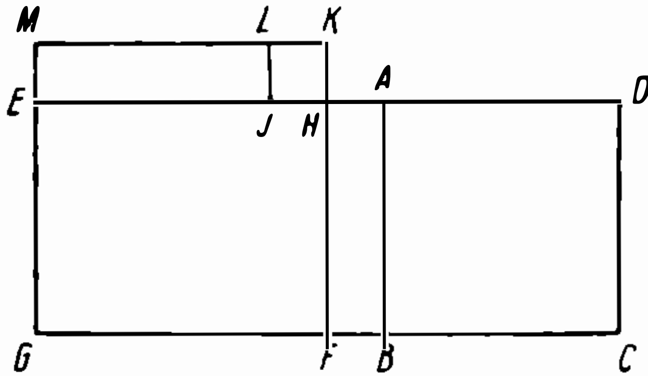


Fig. 45

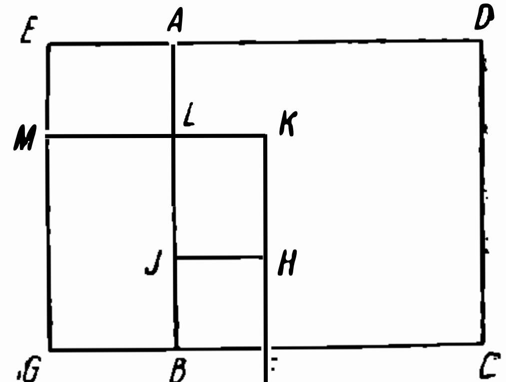


Fig. 46

se adaugă linia JH. Este posibil ca al-Horezmi să fi cunoscut construcția și pentru al doilea caz. În unele texte latinești ale algebrei lui [106, pp. 84—87] există desenele corespunzătoare (compară cu fig. 46 unde în ipoteza că $x > \frac{p}{2}$, F este mijlocul lui $GC = p$ și se află în interiorul segmentului $BC = x$, $AB = BC$ și pătratul $BFHJ$ cu latura $BF = x - \frac{p}{2}$ este egal cu diferența dintre pătratul $GFKM = \left(\frac{p}{2}\right)^2$ și suma dreptunghiurilor $GBLM$ și $JHKL$, la rîndul său egală cu $GBAE = q$, astfel încît:

$$BF = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \text{ și } x = CF + FB;$$

pentru comoditate am modificat întrucîtva desenul.

Expunînd rezolvarea tipurilor de ecuații canonice, al-Horezmi explică pe exemple regulile fundamentale ale operațiilor asupra expresiilor algebrice: înmulțirea monoamelor și a binoamelor de felul $\left(10 + \frac{x}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - 5x\right)$, reducerea termenelor asemenea din

sume și diferențe, introducerea factorilor sub radicali de gradul al doilea sau scoaterea lor de sub radicali, înmulțirea unor asemenea radicali. Exemplele sînt simple de genul $2\sqrt{x} = \sqrt{4x}$, $\sqrt{5} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{50}$ etc. Operațiile de adunare și scădere sînt ilustrate pe segmente de drepte, cerînd să se respecte omogenitatea. Expresia

$$(100 + x^2 - 20x) + (50 + 10x - 2x^2),$$

dată bineînțeles prin cuvinte, după al-Horezmi nu se poate prezenta în figură, fiindcă aici sînt în cauză trei cazuri diferite; dar adaugă el, ea este ușor de explicat prin cuvinte.

În aceste capitole ale cărții, reprezentînd oarecum bazele calculului algebric, există o indicație despre existența iraționalelor pătratice numerice pe care al-Horezmi le numește *djizr asam*, adică rădăcina mută sau surdă. Probabil că aceasta este traducerea cuvîntului grecesc *alogos*, înțeles în sensul de „nearticulabil", „inexprimabil" prin cuvinte și nu în sensul de rădăcină irațională[1]. Gherardo din Cremona traduce cuvîntul *asam* în latinește prin *surdus*, păstrat pînă în secolul al XVIII-lea împreună cu cuvîntul *irrationalis* care se întîlnește încă din vechime.

Între altele, al-Horezmi folosește în mică măsură numerele iraționale, toate exemplele lui de ecuații avînd coeficienți raționali și adesea soluții întregi. Excepție fac doar cîteva ecuații de forma $x^2 = q$ și o ecuație completă de gradul al doilea:

$$10x = (10 - x)^2, \text{ adică } x^2 + 100 = 30x,$$

a cărei soluție irațională $x = 15 - 5\sqrt{5}$ nu se prezintă.

După aceste capitole, care constituie un fel de bază a calculului algebric expuse în cuvinte, urmează șase probleme numerice cu ecuații de toate cele șase tipuri. În patru cazuri este vorba despre împărțirea numărului 10 în două părți, conform unor anumite condiții, primele trei fiind:

$$4x(10 - x) = x^2, \text{ adică } 5x^2 = 40x,$$

$$2 \cdot \frac{7}{9}x^2 = 10^2, \text{ adică } \frac{25}{9}x^2 = 100,$$

$$\frac{10 - x}{x} = 4, \text{ adică } 5x = 10.$$

---

[1] Să amintim că Abu-l-Vafa tot prin cuvîntul *asam* numea fracțiile „inexprimabile" (vezi p. 205) — *N.A.*

Să observăm că în cea de-a doua problemă al-Horezmi folosește fracții cu numărător unitatea și pentru a împărți 100 prin $\frac{25}{9}$, îl scrie pe $\frac{9}{25}$ sub forma $\frac{1}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5}$. În problema a cincea se cere să se împartă 10 în două părți, astfel încît suma pătratelor lor să fie egală cu 58, ceea ce duce la ecuația pe care am mai întîlnit-o la p. 214.

$$x^2 + 21 = 10x.$$

În capitolul următor despre diferite probleme, se rezolvă sisteme cu aceeași primă condiție, adică $x + y = 10$, iar cea de-a doua serie de condiții este:

$$xy = 21,$$

$$x^2 - y^2 = 40,$$

$$x^2 + y^2 + (x - y) = 54,$$

$$\frac{y}{x} + \frac{x}{y} = 2\frac{1}{6}$$

etc., dar al-Horezmi nu introduce în mod explicit cea de-a doua necunoscută, ci operează cu părțile x și $10 - x$ adică, cu „obiectul" și „zece fără obiect". Asemenea exemple nu sînt de altfel unice. Printre ele, cea mai interesantă din punct de vedere al condiției este problema în care se cere să se găsească un număr de oameni x dacă $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{6}$.

Ecuații complete de gradul al doilea se folosesc mai departe, în capitolul de geometrie al algebrei lui al-Horezmi, unde ele apar într-un stadiu intermediar al rezolvării, deoarece după reducere, totul revine la ecuații de gradul întîi. Cartea conține numeroase probleme cu ecuații liniare; ele umplu capitolul despre moșteniri și testamente.

Vom analiza o asemenea problemă și vom vedea că rezolvarea lui al-Horezmi, cu toate că nu conține nici un fel de simboluri, are totuși un caracter algebric; din aceleași motive prezentarea se face prin nenumărate cuvinte și este foarte întinsă.

La moarte, cineva lasă prin testament celor patru fii ai săi cîte o parte din avere, iar unui alt om îi lasă atît cît alcătuiește partea fiecăruia dintre fii și un sfert din ceea ce rămîne din treimea averii, scăzîndu-se această parte și un dirhem *d*. Însemnînd

prin d averea, prin x partea unui fiu şi prin y ceea ce îi revine acelui om, noi am exprima problema prin ecuaţiile

$$z = y + 4x, \quad y = x + \frac{1}{4}\left(\frac{z}{3} - x\right) + d$$

şi, făcînd substituţia, am obţine relaţia $z = 5\frac{2}{11}x + 1\frac{1}{11}d$.

În esenţă, al-Horezmi face acelaşi lucru. Regula de rezolvare, spune el, este următoarea: trebuie luată $\frac{1}{3}$ din avere şi scăzut din ea o parte, apoi se scade $\frac{1}{4}$ din ceea ce a rămas din $\frac{1}{3}$ de avere fără o parte şi un dirhem, aşa încît rămîn $\frac{3}{4}$ şi $\frac{1}{3}$ din avere sau $\frac{1}{4}$ din avere fără $\frac{3}{4}$ de părţi şi fără dirhem (cu alte cuvinte în notaţiile moderne: $\frac{1}{3}z - x - \frac{1}{4}\left(\frac{z}{3} - x\right) - d = \frac{1}{4}z - \frac{3}{4}x - d$). Aceasta se adaugă la $\frac{2}{3}$ din avere; atunci 11 din 12 părţi de avere fără $\frac{3}{4}$ de părţi şi fără un dirhem sînt egale cu 4 părţi (cu alte cuvinte, $\frac{2}{3}z + \frac{z}{4} - \frac{3}{4}x - d = \frac{11}{12}z - \frac{3}{4}x - d = 4x$). Mai departe se face completarea cu trei pătrimi dintr-o parte şi un dirhem, după care 11 din 12 părţi de avere sînt egale cu $4\frac{3}{4}$ părţi şi 1 dirhem (cu alte cuvinte, $\frac{11}{12}z = 4\frac{3}{4}x + d$). Noi am fi înmulţit acum cu $\frac{12}{11}$; al-Horezmi adaugă la fiecare termen 1 din cele 11 părţi ale lui şi obţine că averea este egală cu $5\frac{2}{11}$ dintr-o parte şi $1\frac{1}{11}$ dirhemi.

În problema dată şi în altele cîteva înrudite cu ea, dirhemul joacă rolul unui parametru. În esenţă, aici avem de-a face cu o serie de probleme cu ecuaţii nedeterminate, adesea omogene (d se ia dinainte egal cu zero). Într-o serie de cazuri, al-Horezmi mai arată cum fiind dat un d întreg se pot obţine valori întregi numerice pentru z şi x. În alte probleme condiţia se exprimă printr-o ecuaţie cu o necunoscută, iar dacă aceasta nu este o avere în sensul propriu-zis al cuvîntului, atunci se numeşte obiect.

Nu se știe dacă îi aparțin lui al-Horezmi rezultate algebrice independente. La începutul tratatului el scrie că unii învățați au întîietatea în descoperiri, alții lămuresc punctele grele ale precursorilor lor și ușurează înțelegerea lor, iar alții pun în ordine cunoștințele existente, corectînd inexactitățile și perfecționînd ideile tovarășilor lor „fără a le face adaosuri și fără orgoliu în suflet“. Al-Horezmi nu vorbește despre descoperiri noi pe care le-ar fi făcut el însuși.

Pînă în prezent este nerezolvată problema surselor algebrei lui al-Horezmi. În aritmetică el urmează în mod evident modelele indiene după cum am văzut (chiar calculul sexagesimal îl atribuie indienilor), dar algebra lui prezintă o serie de particularități. În algebra indiană nu se întîlnesc justificări geometrice pentru regulile de rezolvare a ecuațiilor de gradul al doilea sau operațiile cu mărimi algebrice, ceea ce ocupă un loc important la al-Horezmi. Spre deosebire de matematicienii indieni, învățatul din Bagdad nu folosește numere negative și simboluri. Afară de aceasta, indienii formulează regula de rezolvare a ecuației complete de gradul al doilea deodată pentru un coeficient arbitrar pe lîngă termenul de gradul al doilea și încă Brahmagupta nu deosebește tipurile 4) — 6). Al-Horezmi pare că se apropie de algebra greacă prin construcția geometrică a rădăcinilor ecuațiilor de gradul al doilea [33, III, p.72 și următoarele], dar în ansamblu, felul lui de a trata problema diferă esențial de algebra geometrică din *Elementele* lui Euclid. O asemănare veritabilă se poate observa doar între cea de-a doua construcție a lui al-Horezmi pentru ecuația de tipul 4 și propoziția 2 din cartea a II-a a *Elementelor*, care prezintă geometric formula $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Însă chiar prima construcție a lui al-Horezmi pentru aceeași ecuație nu are un prototip cunoscut nouă în matematica greacă. Desenul lui al-Horezmi pentru primul caz al ecuației de tipul 5 amintește construcția din propoziția 5 din cartea a II-a, dar în deducțiile propriu-zise există deosebiri importante. Afară de aceasta, propoziția 5 nu dă a doua rădăcină a ecuației „cu ajutorul adunării“ ca și propoziția corespunzătoare 28 din cartea a VI-a a *Elementelor*. Construcția lui al-Horezmi pentru al șaselea tip de ecuații nu are nici un analog la Euclid. În sfîrșit, întregul stil al raționamentelor și al expunerii este cu totul diferit la cei doi autori. Chiar dacă algebra geometrică antică a avut vreo influență asupra lui al-Horezmi, atunci aceasta apare într-o formă foarte modificată și adaptată nevoilor algebrice numerice și din punct de vedere istoric n-a fost încă demonstrată. Comună la

Diofant şi al-Horezmi este reducerea ecuaţiei de gradul al doilea la trei forme canonice (cu acea deosebire totuşi că Diofant nu reduce la unitate coeficientul pătratului necunoscutei). În multe alte privinţe ei nu se aseamănă; de pildă, problemele care se reduc la sistemele

$$x + y = a, \quad xy = b$$

sau

$$z + y = a, \quad x^2 \pm y^2 = b$$

sînt rezolvate de Diofant prin introducerea necunoscutei auxiliare $\frac{x - y}{2} = z$. Aşadar, o influenţă directă a lui Diofant este puţin probabilă deoarece după cît se ştie, primele traduceri arabe ale lui Diofant au fost făcute la Bagdad de către învăţatul creştin Kosta ibn Luka al Ba'labakka (decedat în 912 în Armenia) din Baalbek (Heliopolis) în Siria, şi mai tîrziu de Abu-l-Vafa [108, pp.261—264; 109—110].

Pare probabil că al-Horezmi cunoscuse bine tradiţiile formate în Orientul Apropiat şi Mijlociu şi care cuprind elemente contopite atît ale ştiinţei babiloniene, cît şi ale celei greco-romane. Există presupunerea că însuşi cuvîntul *al-djabr* provine prin intermediul sirienilor şi al armenilor de la cuvîntul asirian *gabru-djabru-maharu*, şi mai departe de la termenul *maharu-gabru* care servea în Babilon pentru a exprima egalitatea a două obiecte [109, p.275].

Regula de trei. Am amintit că în algebra lui al-Horezmi se prezintă şi se explică regula de trei simplă. Această regulă este folosită şi de alţi matematicieni. Al-Biruni consacră o operă specială regulilor de trei, introducînd în ea generalizările făcute de indieni (vezi pp. 141—142). În tratatul *Despre raşik-i indieni* („Fi raşikat al-Hind")[1] el analizează regula directă şi inversă, regula celor 5, 7 şi mai multe mărimi. În India, spune al-Biruni, el a întîlnit probleme cu cel mult 11 mărimi, dar numărul lor poate fi orice număr impar. Esenţa regulilor şi schema de calcul se explică amănunţit pe exemple numerice ale căror date iniţiale se scriu pe două coloane. Deosebit de reuşită este analiza cîtorva probleme cu regula de 5 cu aceleaşi date numerice, dar cu mărimi ce sînt direct sau invers proporţionale. În problemele prezentate

[1] Cunoscut autorului după traducerea nepublicată a lui B.A. Rosenfeld.

se găsesc pînă la 17 mărimi. Toate exemplele lui al-Biruni sînt cu numere întregi, dar regulile de trei sînt fundamentate cu ajutorul teoriei generale a rapoartelor compuse; cu acest prilej el se referă la Euclid și la comentatorii lui. De aceea demonstrațiile lui al-Biruni poartă un caracter general. Întîlnim aici tendința foarte caracteristică pe care am mai remarcat-o, a matematicienilor din țările Islamului, de a fundamenta regulile folosite în matematica practică cu ajutorul teoriilor antice grecești.

Regula falsei poziții. Probabil că în vremea lui al-Horezmi, la Bagdad se cunoaște regula celor două false poziții. Expunerea acestei reguli există în manuscrisul latin al traducerii din limba arabă a lucrării *Cartea despre mărire și micșorare* unde regula este atribuită indienilor[1] [111, 112.] Autorul cărții este necunoscut; unii istorici presupun că acesta ar fi fost Abu Kamil Șudja ibn Aslam născut în Egipt (în jurul anului 900); alții consideră că această carte a scris-o evreul spaniol Abraham ben Meir ibn Ezra (născut în jurul anului 1090, decedat în 1167). Aici regula se aplică la probleme care se exprimă prin mai multe ecuații liniare cu o necunoscută sau sisteme liniare cu două necunoscute.

Vom prezenta ca model cîteva probleme în care se cere să se determine cantitatea de bani pe care o au doi oameni după două condiții simetrice: dacă unul dă celuilalt o sumă oarecare, atunci sumele pe care le dețin se vor afla într-un raport dat. Aceste probleme se pot exprima prin ecuațiile:

$$x + a = m\ (y - a)$$

$$x - b = n\ (y + b).$$

Asemenea probleme se întîlnesc în literatura greacă (distihul popular despre un măgar și un catîr încărcați cu greutăți diferite), în Bizanț, inclusiv la Nicolae Artavazda, în India la Bhaskara

[1] Titlul complet al manuscrisului este: *Cartea despre mărire și micșorare, denumită calculul ghicitului, pe care a cules-o și a întocmit-o Abraham pe baza a ceea ce au stabilit înțelepții indieni în conformitate cu cartea, denumită indiană (Liber augmenti et diminutionis vocatus numeratio divinationis, ex eo quod sapientes Indi posuerunt, quem Abraham compilavit et secundum librum qui Indorum dictus est composuit).* E lesne de observat asemănarea terminologiei cu „adaosul" și „lipsa" de la chinezi. N-a pătruns oare această regulă în literatura arabă pe alte căi din China fără intermediul Indiei, unde în operele de matematică cunoscute pînă în prezent ea nu este amintită? — *N.A.*

al II-lea, la urmașii lui al-Horezmi, ca de pildă al-Karadja, în Europa la Alcuin și Leonardo Pisano etc.

Kosta ibn Luka al-Ba'labakka scrie o operă specială despre regula celor două false poziții sau după numele ei din literatura arabă, regula *al-hatain* (a celor două erori). *Tratatul lui Kosta ibn Luka despre demonstrarea operațiilor în calculul celor două erori* (*Makala li-Kosta ibn Luka fi-l-burhan ala asmal hibas al-hatain*) [113] începe cu observația că prin acest procedeu se pot rezolva toate problemele din știința calculului în care nu intră rădăcini, adică problemele liniare. Conținutul fundamental al tratatului îl alcătuiește demonstrarea regulii. Autorul prezintă două deducții: una pur aritmetică, nu prea clară, poate din cauza celui care a făcut transcrierea, iar alta, bazată pe mijloacele algebrei geometrice a celor antici. Acesta este încă unul din exemplele nenumărate de folosire a teoriilor grecești pentru fundamentarea algoritmilor matematicii calculatorii.

Demonstrația se prezintă pentru o problemă exprimată printr-o ecuație de forma:

$$\left(\frac{m_1}{n_1} + \dots + \frac{m_k}{n_k}\right) x = b$$

sau, mai pe scurt, prin ecuația:

$$ax = b$$

(propriu-zis la Kosta ibn Luka figurează la început problema $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} = 10$, dar raționamentele au un caracter absolut general). Sînt analizate separat trei cazuri:

1) cînd ambele poziții false sînt mai mici decît necunoscuta

2) cînd ele sînt mai mari și

3) cînd necunoscuta este cuprinsă între ele.

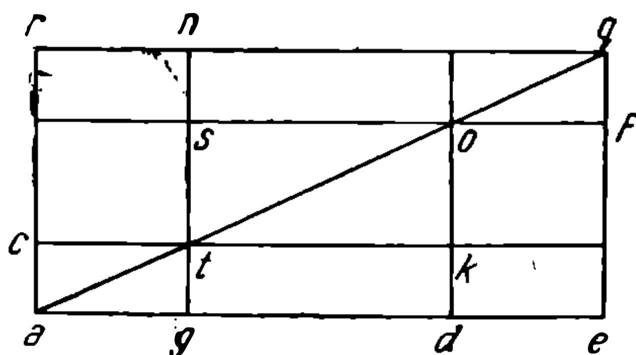


Fig. 47

Demonstrațiile sînt foarte asemănătoare în toate cele trei cazuri, de aceea vom prezenta doar pe cel de-al treilea.

Valoarea necunoscutei căutate este *ad* și pozițiile false *ag*, *ae* sînt reprezentate prin segmentele unei drepte orizontale, așa fel încît $ag < ad < ae$ (fig. 47), iar termenul liber al ecuației este perpendiculara *do*. Să trasăm *ao* și să ridicăm perpendicularele *gt*

și *eq* pînă la intersecția cu *ao* și continuarea ei *aq*. În virtutea proporționalității

$$\frac{gt}{ag} = \frac{eq}{ae} = \frac{do}{ad},$$

perpendicularele *gt* și *eq* reprezintă valorile părții din stînga a ecuației pentru $x = ag$, $x = ae$. Deoarece falsa poziție *ag* este dată, atunci sînt date *gt* și prima eroare *ts*; în mod analog sînt date *eq* și cea de-a doua eroare $fq = sn$. De aceea sînt date aria dreptunghiului $fc = ts \times ae = 1$ er. $\times$ 2 fals. poz. și a dreptunghiului $rs = fq \times ag = 2$ er $\times$ 1 fals. poz. precum și suma lor, dreptunghiul *fc* + dreptunghiul *rs*. Dar conform uneia din teoremele despre gnomon, dreptunghiul *no* = dreptunghiul *fk* și de aceea dreptunghiul *fc* + dreptunghiul *rs* = dreptunghiul *rk*, care este de asemenea dat. În sfîrșit, dreptunghiul $rk = ad(ts + sn)$ și, prin urmare

$$ad = \frac{1 \text{ er.} \times 2 \text{ fals. poz.} + 2 \text{ er.} \times 1 \text{ fals. poz.}}{1 \text{ er.} + 2. \text{ er}}$$

Dacă se notează cu $ag = x_1$, $b - ax_1 = d_1$, $ae = x_2$, $ax_2 - b = d_2$, atunci

$$x = \frac{x_{12}d + x_2d_1}{d_2 + d_1}$$

Regula celor două false poziții se folosește mult în țările Orientului Apropiat și Mijlociu și în țările mauritane. O descriere amănunțită a acestei reguli există de pildă în *Scurtă expunere a operațiilor aritmetice (Talhis fi a'mal al-hisab)* [114] a lui Abu-l-Abbas Ahmed ibn Muhammed ibn al-Banna al-Marracuș (născut în jurul anului 1256 la Marakeș — decedat în jurul anului 1321). Numele „ibn al-Banna“ înseamnă „fiul constructorului“. Aici regula celor două false poziții apare sub denumirea de „regula celor două talere ale cîntarului“ prezentată schematic în fig. 48. Numărul *b* se așază în adîncitura de sus, iar x_1 și x_2 — între dreptele paralele în dreapta și în stînga — după expresia lui ibn al-Banna, se așază pe talerele cîntarului. Erorile d_1 și d_2 se scriu deasupra sau dedesubtul talerelor pentru x_1 și x_2 în funcție de faptul dacă aceste erori (după cum am spune noi) sînt pozitive sau negative. Probabil că ibn al-Banna cunoaște demon-

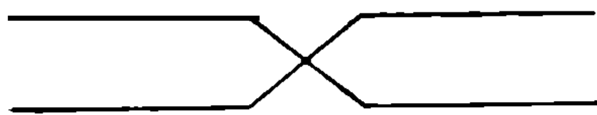


Fig. 48

strația geometrică a regulii, deși el n-o prezintă: regula, spune el, se bazează pe geometrie. Ibn al-Banna nu formulează pe un exemplu numeric regula talerelor de cîntar, ci trece deodată la expresii generale. Această particularitate caracteristică a *Scurtei expuneri*, proprie și altor reguli pe care le conține, a îngreuiat studiul acestei opere și timp de două secole a dus la apariția unui șir de comentarii scrise.

În literatura matematică arabă se întîlnește uneori și regula unei singure false poziții.

Geometria în lucrările lui al-Horezmi. În capitolul de geometrie al algebrei lui al-Horezmi sînt adunate regulile pentru măsurarea figurilor și se dau cele mai simple aplicații ale algebrei în probleme de triunghiuri. Unele reguli sînt prevăzute cu definiții și demonstrații, sau cel puțin cu scurte lămuriri.

Dintre figurile plane, al-Horezmi analizează triunghiurile, patrulaterele și cercul. El deosebește trei feluri de triunghiuri: dreptunghice, ascuțite și obtuzunghiuri; pentru recunoașterea lor, el prezintă egalitățile sau inegalitățile respective între pătratul laturii mari și suma pătratelor celorlalte două laturi. Toate acestea au existat în cărțile I și a II-a din *Elementele* lui Euclid, traduse pentru prima oară de al-Hadjjadj ibn Iusuf ibn Matar, în timpul lui Harun ar-Rașid, iar a doua oară, în timpul lui al-Mamun, precum și în operele lui Heron. Al-Horezmi demonstrează teorema lui Pitagora pentru cazul particular al triunghiului isoscel. Demonstrația lui se poate ușor înțelege din fig. 49 și ea coincide cu cea cunoscută atît în Grecia cît și în India (p. 121). Patrulaterele sînt de cinci feluri: pătrate, dreptunghiuri, romburi „avînd forma de ochi“, paralelograme — „romboidale“, și, în sfîrșit, patrulatere cu laturi și unghiuri „complet inegale“. Aria rombului se calculează după diagonale sau după o diagonală și una dintre laturi: un patrulater oarecare se împarte printr-o diagonală în triunghiuri (probabil că se presupun cunoscute laturile și diagonalele). O clasificare absolut similară a patrulaterelor există și în cartea I din *Elemente*. Heron mai adaugă la aceasta și definiția trapezului.

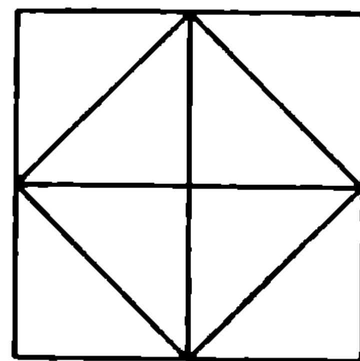


Fig. 49

Unele probleme ale lui al-Horezmi coincid cu ale lui Heron chiar și în ceea ce privește datele numerice. Asemenea probleme sînt cele în care se cere să se determine aria unui triunghi echi-

lateral cu latura 10 (răspuns: 43 și ceva); înscrierea pătratului într-un triunghi isoscel cu baza 12 și latura 10 și determinarea ariei unui triunghi ascuțitunghi cu laturile 13, 14, 15.

O oarecare deosebire în formularea celei de-a doua probleme constă în faptul că Heron dă baza 12 și înălțimea 8. O altă deosebire mai importantă există în rezolvare. Heron exprimă deodată[1] latura pătratului ca $\frac{8\cdot 12}{8+12}$, în timp ce al-Horezmi, calculînd înălțimea, găsește latura căutată din egalitatea dintre aria triunghiului și suma celor patru părți, în care o divide un pătrat înscris. Există o deosebire și în rezolvarea celei de-a treia probleme. Al-Horezmi ia drept necunoscută (fig. 50) partea din latura BC determinată de înălțime și adiacentă cu latura AC. Exprimînd de două ori înălțimea prin teorema lui Pitagora, el obține ecuația:

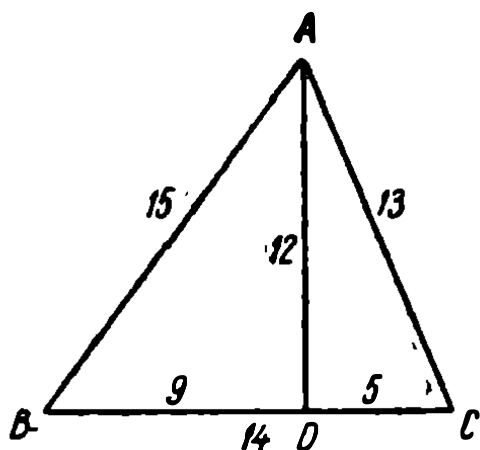


Fig. 50

$$13^2 - x^2 = 15^2 - (14 - x)^2,$$

sau

$$28x = 140,$$

de unde $x = 5$, înălțimea este egală cu 12, iar aria — cu 84. Heron aplică imediat propoziția 13 din cartea a II-a a *Elementelor* referitoare la pătratul laturii într-un triunghi ascuțitunghi,

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2CB\cdot CD,$$

ceea ce dă $cd = x = 5$*. Exemplele cu ariile triunghiurilor obtuzunghiuri sînt diferite la al-Horezmi și Heron.

Pentru raportul între lungimea circumferinței și diametru, al-Horezmi propune trei valori: $3\frac{1}{7}$, $\sqrt{10}$ și $\frac{62\,832}{20\,000}$, spunînd că ele sînt folosite de astronomi. Probabil că ultimele două valori el le posedă de la indieni. Toate aceste valori, adaugă al-Horezmi, sînt aproximativ egale. Mai departe, el spune că aria cercului este egală cu jumătatea diametrului înmulțită cu semicircumfe-

[1] Folosind probabil asemănarea triunghiurilor — *N.A.*

* Se observă că această problemă există la Magavira și Bhaskara al II-lea — *N.A.*

rința, lămurind aceasta printr-o observație că aria oricărui poligon regulat este egală cu produsul dintre semiperimetrul și semidiametrul cercului înscris. Pentru aria S a cercului el prezintă și o expresie în funcție de diametru:

$$S = d^2 - \frac{1}{7} d^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} d^2;$$

al-Horezmi arată că ea este conformă cu prima regulă, adică vorbind în limbajul nostru, $\pi = 3\frac{1}{7}$. O asemenea expresie pentru S există și la Heron, numai că în locul expresiei caracteristice pentru aritmetica arabă $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7}$ se află valoarea $\frac{1}{14}$.

Al-Horezmi mai prezintă și o regulă pentru calculul ariei σ a segmentului de cerc, fiind date arcul s, coarda r și înălțimea h a segmentului. La început se determină diametrul

$$d = \frac{a^2}{4h} + h.$$

Atunci pentru un segment mai mic decît semicercul, avem:

$$\sigma = \frac{d}{2} \cdot \frac{s}{2} - \left(\frac{d}{2} - h\right) \frac{a}{2},$$

iar pentru unul mai mare decît semicercul:

$$\sigma = \frac{d}{2} \cdot \frac{s}{2} + \left(h - \frac{d}{2}\right) \frac{a}{2}.$$

Termenii folosiți de al-Horezmi sînt probabil de proveniență indiană. Asemănător cu indienii, el numește arcul *kaus* — arc (de tras cu săgeți), iar înălțimea segmentului — *sahm*, adică săgeată.

Regulile de calculul volumelor se dau pentru prima dreaptă, cilindru, piramidă, con și trunchi de piramidă, fiind date baza pătrată și înălțimea. Volumul ultimului corp se consideră ca diferență între volumele a două piramide întregi și la început se găsesc înălțimile lor. Despre sferă nu se vorbește.

În capitolul de geometrie al algebrei lui al-Horezmi își găsește oglindire contactul lui cu lucrările înrudite cu operele lui Heron (sau poate chiar cu aceste opere), precum și cu geometria indiană.

Mai există un tratat vechi ebraic *Învățătura despre măsurători (Mișnat ha-middot)*, apropiat ca conținut de geometria lui al-

Horezmi, apărut între mijlocul secolului al II-lea și al IX-lea e.n., dar mai apropiat probabil de prima limită. În unele privințe *Mişnat ha-middot* este mai strîns legat de opera lui Heron. Astfel, pentru π se dă numai valoarea $3\frac{1}{7}$; calculul ariei triunghiului în funcție de laturile date se efectuează prin formula lui Heron; se prezintă aproximarea lui Heron pentru aria segmentului de cerc (vezi p. 75). Există presupunerea că al-Horezmi ar fi cunoscut lucrarea *Metrica* într-o traducere siriană sau persană [115]. Nu este exclus ca al-Horezmi să fi cunoscut și limba ebraică. Nu de mult s-a descoperit și publicat tratatul lui al-Horezmi *Determinarea calendarului ebraic (Istihradj tarih al-iahud)* care conține unele citate din Biblie și demonstrează că autorul are cunoștințe despre religia ebraică [116].

Se pare însă că al-Horezmi și necunoscutul autor evreu ar fi avut la dispoziție surse comune sau similare.

Cu tot volumul redus, capitolul de geometrie din algebra lui al-Horezmi conține un material foarte important pentru practicieni, expus accesibil și suficient de corect. Topometrii din acele vremuri dispun de cunoștințe extrem de reduse și deseori folosesc reguli foarte inexacte. Abu-l-Vafa în capitolul de geometrie al cărții pentru grămătici, spune că topometrii din acele vremuri iau aria triunghiului, a poligonului și a cercului egală cu pătratul sfertului de perimetru (pentru cerc, aceasta dă $\pi \approx 4$), iar aria oricărui patrulater o calculează ca un produs al semisumei laturilor opuse. Geometria lui al-Horezmi, asemenea cu aritmetica și algebra lui, are o mare influență asupra manualelor apărute mai tîrziu.

Al-Horezmi a mai scris o lucrare de astronomie întocmită pe baza unor surse antice persane, indiene și grecești, conținînd primele tabele arabe de sinusuri, precum și tabele de tangente [117]. Nu este clar totuși, dacă tabelul tangentelor îi aparține lui al-Horezmi, a cărui operă a ajuns pînă la noi în prelucrarea astronomului din Cordoba, Abu al-Kasim Maslama ibn Ahmed al-Madjriti, născut la Madrid (decedat în jurul anului 1007) sau, mai exact, în traducerea latină a acestei prelucrări, făcută de Adelard din Bath în secolul al XII-lea.

Tratatele de algebră ale lui Abu Kamil și al-Karadji. Curînd după al-Horezmi progresează mult în domeniul algebrei și a aplicațiilor ei Abu Kamil Șudja ibn Aslam ibn Muhammed al-Hasib al-Misri, născut în Egipt (ultimele două cuvinte

înseamnă: calculator egiptean), care a trăit în jurul anilor 850—930. Istoricul de vastă cultură Abu Zaid Abdarrahman ibn Muhammed ibn Haldun (1332—1406), tunisian de origine, spune că Abu Kamil este primul învățat care a scris în algebră după al-Horezmi. S-au păstrat cîteva opere de matematică ale lui Abu Kamil. Ne vom ocupa în continuare de tratatul lui de algebră, care ne este cunoscut după două traduceri, una în limba latină, iar cealaltă în vechea ebraică — ultima fiind întocmită în jurul anului 1460 de Morduhai Finzi din Mantua, poate după o traducere spaniolă [118, 119]. În traducerea lui Finzi tratatul poartă titlul *Calculul ariilor* și pare a fi legat de o altă lucrare a lui Abu Kamil despre care vom vorbi mai tîrziu; titlul exact al tratatului fusese probabil *Cartea despre algebră și al-mukabala (Kitab al-djabr va-l-mukabala)*. Această carte fusese foarte cunoscută timp îndelungat și comentată cel puțin de trei ori — comentariile nu s-au descoperit încă.

Algebra lui Abu Kamil, ca și cea a lui al-Horezmi, se limitează la ecuațiile de gradul al doilea. Matematicianul egiptean scoate din tratatul său capitolul de geometrie și culegerea de probleme referitoare la moșteniri, iar în rest structura operei este foarte apropiată de algebra precursorului său din Bagdad: la început el prezintă rezolvarea tipurilor canonice, apoi urmează bazele calculului algebric și în sfîrșit exemple și probleme. La ambii regula de rezolvare a ecuațiilor de gradul al doilea se fundamentează geometric, deși în mod diferit; la ambii expunerea este în cuvinte. Între altele, în traducerea lui Finzi se folosesc uneori cifrele indo-arabe, iar uneori în locul lor primele nouă litere din alfabetul ebraic și un semn similar cu zero al nostru. Totodată găsim la Abu Kamil multe lucruri noi atît în teorie, cît și în exemple și aplicații.

Chiar de la începutul cărții, referindu-se la al-Horezmi, Abu-Kamil separă trei feluri de mărimi — numerele simple, rădăcinile și pătratele, adăugînd în alte locuri și puterile superioare ale necunoscutei — cubul (*ka'b*), pătrato-pătratul (*mal-mal*), pătrato-pătrato — obiect (*mal mal șai*), cubo-cubul și lăsînd deoparte puterea șapte, pătrato,—pătrato-pătrato-pătratul. După cum se vede, Abu Kamil aplică sistemul aditiv de formare a indicilor puterilor, asemănător cu Diofant, cu acea deosebire doar, că la Diofant puterea a cincea se numește pătrato-cub. Abu Kamil merge mai departe decît al-Horezmi și în folosirea cîtorva și nu a unei singure necunoscute, avînd denumiri speciale pentru

ele: pentru prima necunoscută — rădăcină sau obiect (*șai*), pentru a doua — *dinar*, pentru a treia — *fals* (monedă măruntă), pentru a patra — *hatam* (sigiliu, sfîrșit). Ele se folosesc în unele probleme la înlocuirea necunoscutelor.

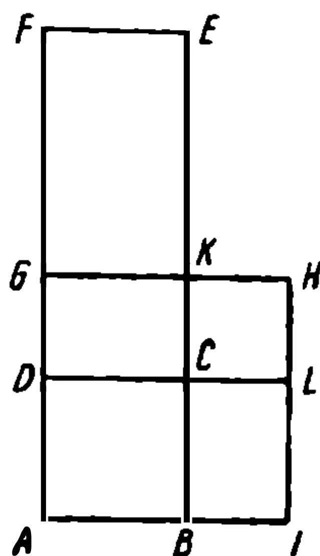


Fig. 51

În capitolul care cuprinde ecuații de gradul al doilea, regulile se ilustrează pe exemple numerice aparținînd lui al-Horezmi; de altfel Abu Kamil atrage în mod special atenția că aceste exemple au fost luate la întîmplare. Dar în demonstrarea regulilor, Abu Kamil se abate de la opera lui al-Horezmi, bazîndu-se direct pe propozițiile din cartea a II-a a *Elementelor*, echivalente cu separarea în binomul de gradul al doilea a unui pătrat complet al diferenței sau al sumei. După cum se știe, aceste propoziții, și anume cele cu numărul 5 și 6, împreună cu numerele 28 și 29 din cartea a VI-a a *Elementelor* au servit în matematica greacă ca echivalent geometric al rezolvării ecuațiilor de gradul al doilea prin radicali.

Să analizăm soluția dată de Abu Kamil pentru ecuația:

$$x^2 + q = px$$

(ca și al-Horezmi, el presupune coeficientul pătratului necunoscutei egal cu 1). Abu Kamil prezintă justificarea regulilor pentru ambele rădăcini pozitive, — la Euclid construcțiile corespund doar rădăcinii:

$$x = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Este nou și studiul cazului unei singure rădăcini (duble, în terminologia noastră).

Presupunînd $\left(\frac{p}{2}\right)^2 > q$, Abu Kamil analizează mai întîi cazul în care pătratul căutat este mai mic decît numărul dat, adică $x^2 < q$ de unde înseamnă că $x^2 < \left(\frac{p}{2}\right)^2$. Reprezentînd geometric pătratul căutat $x^2 = ABCD$, el îi adaugă dreptunghiul $DCEF = q$, unde $DF > DA$ (fig. 51). Atunci dreptunghiul $ABEF = px$, $AF = p$ și dacă G este mijlocul lui AF, atunci segmentul AF este împărțit prin punctul G în părți egale, iar prin punctul D în părți neegale, astfel încît (Abu Kamil se referă aici direct la

cartea a II-a din *Elementele* lui Euclid, avînd în vedere propoziția 5):

$$DF \cdot DA + GD^2 = AG^2.$$

Deoarece $DF \cdot DA = q$, $AG = \frac{p}{2}$ și conform ipotezei $GD = \frac{p}{2} - x$, se obține:

$$x = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Abu Kamil demonstrează în plus, urmîndu-l pe Euclid, egalitatea dintre gnomonul *CKGAILC* și dreptunghiul *DCEF*.

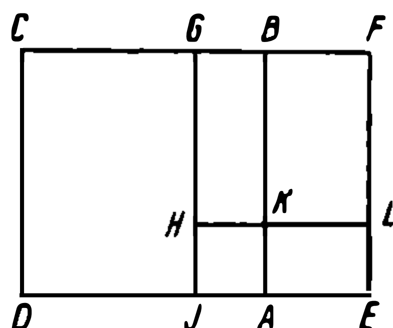


Fig. 52

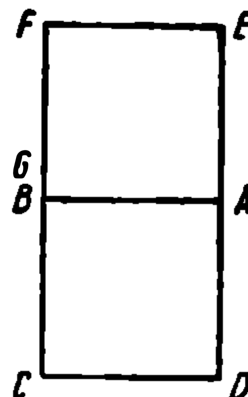


Fig. 53

Presupunînd mai departe $x^2 > \left(\frac{p}{2}\right)^2 > q$, Abu Kamil (vezi fig. 52, unde $ABCD = x^2$, dreptunghiul $ABFE = q$, dreptunghiul $CDEF = px$; G este mijlocul lui $CF = p$) folosește egalitatea:

$$BF \cdot BC + BG^2 = GC^2.$$

Deoarece $BF \cdot BC = q$, iar $BG = x - \frac{p}{2}$, rezultă:

$$x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

În sfîrșit, luînd $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = q$ și adăugînd lui $ABCD = x^2$, dreptunghiul $ABFE = q$ (fig. 53), pe baza acelorași teoreme ale lui Euclid, Abu Kamil demonstrează, prin reducere la absurd, că punctul G, adică mijlocul lui CF, nu se poate afla nici mai sus, nici mai jos de punctul B, așa încît ele coincid și deci:

$$x = \frac{p}{2}.$$

Am arătat că în algebra arabă timpurie, pătratul rădăcinii ecuației are aceleași drepturi ca și însăși rădăcina necunoscută căutată. Acest lucru se manifestă deosebit de evident la Abu Kamil care dă reguli separate pentru calculul direct al lui x^2 prin radicali. În notațiile noastre, aceste reguli pentru formele normale 4—6 sînt următoarele:

$$x^2 = \frac{p^2}{2} + q - \sqrt{p^2q + \left(\frac{p^2}{2}\right)^2},$$

$$x^2 = \frac{p^2}{2} - q \pm \sqrt{\left(\frac{p^2}{2}\right)^2 - p^2q},$$

$$x^2 = \frac{p^2}{2} + q + \sqrt{p^2q + \left(\frac{p^2}{2}\right)^2}.$$

Fiecare regulă se justifică cu ajutorul algebrei geometrice cu deosebire însă că la Abu Kamil segmentele și ariile pot exprima fără deosebire atît numere, cît și prima și a doua putere a necunoscutei. O asemenea abatere de la cerința clasică a omogenității în deducțiile geometrice este remarcabilă, deși matematicienii țărilor din Orientul Apropiat și Mijlociu n-au mers mai departe pe calea creării unui calcul al segmentelor, după cum procedează mult mai tîrziu Descartes. De pildă, în cazul ecuației:

$$x^2 + px = q,$$

unde $p = 10$, $q = 39$, Abu Kamil îl reprezintă pe x^2 prin segmentul AB, pe care îl continuă apoi pe o lungime $BC = 10\,x$, astfel încît, suma $AB + BC = AC$ exprimă numărul 39 (fig. 54). Despre pătratul $CBDE$ el spune că este de 100 de ori mai mare decît segmentul AB înmulțit cu una din unitățile lui, fiindcă segmentul BC este egal cu 10 rădăcini din segmentul AB etc. În notație literală $BC = px$ $CBDE = p^2x^2$, mai departe $FA = GB$ se ia egal cu p^2. Raționamentele următoare, și pe care le transpunem imediat în limbajul algebric, sînt:

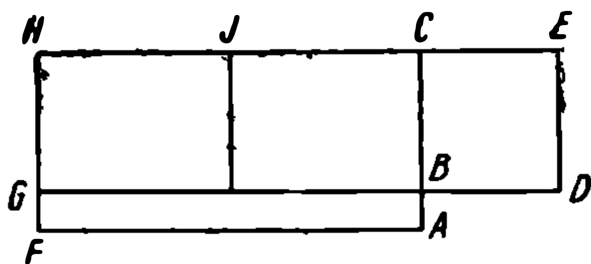


Fig. 54

$$\text{drpt. } ACHF = AF \cdot AC = p^2q$$

$$\text{drpt. } ABGF = p^2x^2 = \text{pătrat } CBDE,$$

înseamnă că:

$$\text{drpt. } GHED = EH \cdot CE = p^2q,$$

adică:

$$p^2x^2 + p^2 \cdot px = (p^2 + px) \cdot px = p^2q.$$

Dacă J este mijlocul lui CH, atunci după propoziția 6 din cartea a VI-a din *Elemente*:

$$EH \cdot CE + JC^2 = JE^2,$$

adică:

$$p^2q + \left(\frac{p^2}{2}\right)^2 = \left(px + \frac{p^2}{2}\right)^2,$$

de unde:

$$JE = BC + CJ = px + \frac{p^2}{2} = \sqrt{p^2q + \left(\frac{p^2}{2}\right)^2}.$$

În sfîrșit, deoarece $AC + CJ = q + \frac{p^2}{2}$, atunci AB sau

$$x^2 = \frac{p^2}{2} + q - \sqrt{p^2q + \left(\frac{p^2}{2}\right)^2},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Asemănător lui al-Horezmi, dar într-un volum cu mult mai mare, înainte de a da exemple și probleme, Abu-Kamil prezintă o serie de reguli pentru transformările algebrice. Odată cu înmulțirea monoamelor și a binoamelor algebrice, cu înmulțirea și împărțirea rădăcinilor pătrate, Abu Kamil introduce numeroase alte elemente de calcul algebric; unele sînt împrăștiate mai departe printre probleme. El consideră necesar să formuleze chiar reguli atît de simple ca de pildă:

$$\left(\frac{a}{b}\right) \cdot b = a, \quad \frac{a}{b} = \frac{a^2}{ab}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$$

(ultima există și la al-Horezmi) și în mod special prezintă regula:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab}.$$

El analizează în amănunt cazurile în care suma sau diferența a două rădăcini pătrate din numere raționale $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ este ratio-

nală sau este o rădăcină pătrată dintr-un număr rațional, ceea ce se întîmplă dacă este rațional $\sqrt{ab}$ sau, ceea ce este același lucru, $\sqrt{\frac{a}{b}}$.

În acest caz, Abu Kamil aplică regulile:

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a + b \pm 2\sqrt{ab}};$$

ca exemple numerice servesc:

$$\sqrt{18} \pm \sqrt{8} = \sqrt{18 + 8 \pm 2\sqrt{144}}, \text{ adică } \sqrt{50} \text{ respectiv } \sqrt{2}$$

și

$$\sqrt{10} \pm \sqrt{2} = \sqrt{10 + 2 \pm 2\sqrt{20}}.$$

În expunerea calculului algebric observăm la Abu Kamil două laturi ale procesului de dezvoltare a algebrei: creșterea nivelului teoretic cu toată folosirea procedeelor geometrice de demonstrație, și tendința spre aritmetizare. Abu Kamil atrage în mod frecvent atenția cititorului asupra semnificației generale a identităților algebrice, pe care el le explică mai întîi prin exemple numerice, dar tot acolo le formulează și în cuvinte, într-o formă cu totul generală. Într-o serie de cazuri el justifică aceste identități cu ajutorul teoriei rapoartelor și, în particular, prin teorema egalității produselor dintre mezii și extremii unei proporții. Aici se produce o abatere interesantă de la tradițiile clasice. Abu Kamil nu face o diferențiere între teoria generală a rapoartelor lui Eudoxus și teoria rapoartelor mărimilor comensurabile, ci vorbește despre proporții fără să precizeze dacă termenii lor sînt sau nu comensurabili. Este perfect evident, și acest lucru se arată direct, că termenii rapoartelor sînt numere ce pot fi atît raționale cît și iraționale. Vom reveni în cele ce urmează asupra acestei împrejurări importante. Acum vom observa doar că, în exemplele lui Abu Kamil pentru teoria ecuațiilor, iraționalele pătratice apar în permanență ca niște numere, ca obiecte de natură pur aritmetică. Ele figurează și în calitate de rădăcini ale ecuațiilor și în calitate de coeficienți; ultimele n-au existat de loc la al-Horezmi, iar primele se întîlneau extrem de rar.

Culegerea de exemple este extrem de bogată în opera lui Abu Kamil. Două grupe de probleme se aseamănă cu cele din algebra lui al-Horezmi. Acestea cuprind o serie de probleme privind împărțirea numărului 10 în două părți, conform unor condiții

suplimentare, și determinarea numărului x de oameni după condiția $\frac{a}{x} = \frac{a}{x + b} + c$. Dar și în aceste cazuri problemele se complică destul de rapid și impun cerințe mari față de tehnica calculelor cu iraționalele pătratice. Alte probleme sînt noi în comparație cu al-Horezmi.

Vom examina cîteva exemple care stau mărturie despre folosirea liberă și largă a iraționalelor pătratice.

Se cere să se împartă 10 în două părți x, $10 - x$ după condiția:

$$\frac{x}{10 - x} + \frac{10 - x}{x} = \sqrt{5}.$$

Ecuația corespunzătoare de gradul al doilea este:

$$(2 + \sqrt{5})\, x^2 + 100 = (20 + \sqrt{500})x$$

și după înmulțire cu $\sqrt{5} - 2$ se aduce la ecuația:

$$x^2 + \sqrt{50\,000} - 200 = 10x$$

cu rădăcina:

$$x = 5 - \sqrt{225 - \sqrt{50\,000}}.$$

Autorul nu se limitează la aceasta și găsește o altă expresie mai simplă pentru rădăcină, luînd ca nouă necunoscută, ca obiect $\frac{10 - x}{x}$. Dacă $\frac{10 - x}{x} = y$, atunci:

$$y^2 + 1 = \sqrt{5}y$$

și

$$y = \sqrt{1\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}.$$

Direct din ecuația liniară

$$\frac{10 - x}{x} = \sqrt{1\frac{1}{4}} - \frac{1}{2},$$

necunoscuta x se obține cu numitor irațional. De aceea, Abu Kamil ridică la pătrat ambele părți ale ecuației

$$10 - \frac{x}{2} = \sqrt{1\frac{1}{4}x^2}$$

și găsește $x = \sqrt{125} - 5$ din ecuația de gradul al doilea

$$x^2 + 10x = 100.$$

Iraționale și mai complicate apar într-o altă problemă care se exprimă direct prin ecuația:

$$\left(\sqrt{\frac{x}{2}} + 3\right) \left(\sqrt{\frac{x}{3}} + 2\right) = 20.$$

Mersul inițial al rezolvării pare să arate că pe Abu Kamil îl neliniștește prea puțin chestiunea celei mai simple rezolvări. În loc să prezinte ecuația sub forma:

$$x + (2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})\sqrt{x} = 14\sqrt{6}$$

și aplicînd formula dedusă de el însuși pentru pătratul rădăcinii, să obțină imediat:

$$x = 15 + 20\sqrt{6} - \sqrt{1449 + 600\sqrt{6}},$$

Abu Kamil efectuează la început transformările:

$$6 + \sqrt{\frac{x^2}{6}} + \sqrt{3x} + \sqrt{2x} = 20,$$

$$\left(14 - \sqrt{\frac{x^2}{6}}\right)^2 = 196 + \frac{x^2}{6} - \sqrt{130\frac{2}{3}x^2} = 5x + \sqrt{24x^2},$$

$$5x + \sqrt{24x^2} + \sqrt{130\frac{2}{3}x^2} = 196 + \frac{x^2}{6},$$

$$x^2 + 1176 = 30x + \sqrt{864x^2} + \sqrt{4\,704x^2}$$

și de aici găsește o expresie foarte greoaie:

$$x = 15 + \sqrt{1\,176} + \sqrt{216} -$$
$$- \sqrt{441 + \sqrt{1\,058\,400} + \sqrt{1\,016\,064} + \sqrt{194\,400}}.$$

Dar imediat după aceasta, Abu Kamil găsește și o expresie mai simplă pentru rădăcină, pe care am dat-o și noi. El observă că în penultima ecuație avem:

$$\sqrt{24} + \sqrt{130\frac{2}{3}} = \sqrt{154\frac{2}{3} + 2\sqrt{24.130\frac{2}{3}}} = \sqrt{266\frac{2}{3}},$$

astfel încît

$$x^2 + 1\,176 = 30x + \sqrt{9\,600\,x^2}.$$

De aci Abu Kamil obține valoarea lui x de la început, cu deosebirea că în loc de $20\sqrt{6}$ și $600\sqrt{6}$, la el figurează $\sqrt{2\,400}$ și $\sqrt{2\,160\,000}$.

Lăsînd deoparte unele exemple curioase în care se aplică descompunerea fracțiilor în sume de fracții fundamentale, să ne referim la o problemă, unde procedee propriu-zis algebrice se combină cu regula falsei poziții. Se cere să se împartă 10 în trei părți după condițiile:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 10, \\ xz &= y^2, \\ x^2 + y^2 &= z^2 \end{aligned}\right\} (x < y < z).$$

La Abu Kamil se vorbește despre partea mai mică, cea mijlocie și cea mare[1]. La început se ia $x_1 = 1$. Atunci din a doua și a treia condiție pentru y_1 se obține o ecuație bipătrată:

$$1 + y_1^2 = y_1^4$$

și

$$z_1 = y_1^2 = \frac{1}{2} + \sqrt{1\frac{1}{4}}, \quad y_1 = \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{1\frac{1}{4}}}.$$

De aceea,

$$x_1 + y_1 + z_1 = 1\frac{1}{2} + \sqrt{1\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{1\frac{1}{4}}}$$

și

$$x : 1 = 10 : \left(1\frac{1}{2} + \sqrt{1\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{1\frac{1}{4}}}\right).$$

Pentru a-l pune pe x sub o formă mai comodă, Abu Kamil efectuează — exprimînd totul numai în cuvinte — transformările care readuc această din urmă ecuație liniară la una de gradul al doilea:

$$100 + 3x^2 + \sqrt{5x^4} = 30x + \sqrt{500x^2},$$

și înmulțind cu $\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}} = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}$, din forma normală

$$x^2 + 75 - \sqrt{3\,125} = 10x$$

[1] Aici și în cazuri similare, pentru a exprima ecuațiile, Abu Kamil nu folosește noile denumiri propuse de el pentru mai multe necunoscute (așa după cum procedează în lucrarea de teoria numerelor). Aceste denumiri el le folosește doar uneori în algebră la înlocuirea variabilelor. — *N.A.*

obține

$$x = 5 - \sqrt{\sqrt{3\,125} - 50}.$$

Calculîndu-l pe z, în mod absolut identic, Abu Kamil găsește $z = 10 - x - y$. În completare, el mai calculează și pe y, plecînd de la falsa poziție $y_1 = 2$.

Abu Kamil rezolvă în cazul de față o ecuație bipătrată. În alte probleme mai întîlnim de asemenea ecuații de gradul al doilea în raport cu o putere oarecare a necunoscutei, ca, de pildă, în problema care se poate scrie prin ecuațiile:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= z^2, \\ xy &= y^2, \\ xy &= 10 \end{aligned}\right\} (x < y < z)$$

și pe care autorul o aduce la ecuația:

$$x^8 - 100x^4 = 10\,000$$

cu soluția:

$$x = \sqrt[4]{\sqrt{12\,500} - 50}.$$

Ceva mai complicate sînt problemele care conduc la rezolvarea consecutivă a două ecuații de gradul al doilea de genul:

$$4\sqrt{x - 3\sqrt{x}} = x - 3\sqrt{x} + 4;$$

aici Abu Kamil ia $x - 3\sqrt{x}$ egal cu pătratul necunoscutei auxiliare etc.

În tratatul lui Abu Kamil nu găsim aplicații geometrice. El aplică metodele geometrice într-o lucrare specială *Cartea despre măsurători* [120] și această operă, ajunsă pînă la noi (incompletă) în traducere, latină și veche ebraică, este consacrată pentagoanelor și decagoanelor regulate. În ea nu este vorba despre construirea lor și nici despre clasificarea tipurilor respective ale iraționalelor ca în *Elemente*, ci despre exprimarea numerică a elementelor lor, unele prin altele, și prin diametrele cercurilor circumscrise și înscrise. Astfel, latura unui pentagon înscris într-un cerc de diametru 10 se exprimă prin rădăcina ecuației bipătrate:

$$\frac{x^2}{5} = 5 + \frac{x^4}{625},$$

astfel încît:

$$x = \sqrt{62\frac{1}{2} - \sqrt{784\frac{1}{4}}}.$$

Abu Kamil calculează de asemenea și valorile laturii decagonului înscris, precum și ale figurilor circumscrise, apoi exprimă diametrul prin intermediul laturilor și în cele din urmă găsește și relațiile între arii și laturi. Să remarcăm în mod deosebit o problemă în care el încalcă prescripția clasică a omogenității: se cere să se găsească înălțimea unui triunghi echilateral, pentru care suma ariei și a înălțimii este egală cu 10. Totul se reduce la ecuația:

$$x^2 + \sqrt{3x^2} = \sqrt{300},$$

cu soluția:

$$x = \sqrt{\frac{3}{4} + \sqrt{300}} - \sqrt{\frac{3}{4}}.$$

Aceste două lucrări ale lui Abu Kamil au avut o influență puternică asupra dezvoltării ulterioare a algebrei.

Cu lucrările lui al-Horezmi, Abu-l-Vafa și Abu Kamil se înrudesc îndeaproape două cărți ale învățatului din Bagdad, Abu Bakr Muhammed ibn al-Hasan al-Karadji (decedat între anii 1019 și 1029), născut în orașul Karadji, așezat aproximativ la jumătatea drumului între Teheran și Kazvin. Al-Karadji este numit deseori al-Karhi: dacă se omite punctul de deasupra literei „dj", ea se pronunță ca „h".

Am amintit în capitolele precedente lucrarea *Carte suficientă despre știința aritmeticii (Kitab al-kafi fi-l-hisab)* a lui al-Karadji [121]. Această operă, similară cu manualul de aritmetică practică a lui Abu-l-Vafa, este destinată, după cum scrie însuși autorul, pentru grămătici și calculatori. Ea este alcătuită din 70 de capitole mici. Primele 43 sînt de aritmetică, capitolele 44—53 — de geometrie, unde al-Karadji îl urmează în multe privințe pe Abu-l-Vafa. Capitolele 54—70 sînt de algebră.

În partea de aritmetică, la fel ca și Abu-l-Vafa, al-Karadji nu se folosește de cifre și expunînd operațiile el nu separă dublarea și înjumătățirea. Un loc important îl ocupă descompunerea fracțiilor ordinare în sume de fracții fundamentale; el explică cum se aduc fracțiile ordinare la cel mai mic numitor comun. O inovație în literatura arabă este, după cum se pare, verificarea

nu numai prin 9, ci și prin 19. Regulile de trei, cunoscute la Bagdad cel puțin din timpul lui al-Horezmi, se bazează pe teoria rapoartelor descrisă destul de amănunțit pe acea vreme, la Gazna, de al-Biruni.

Despre capitolele de geometrie din *Carte suficientă* vom vorbi mai departe. Să remarcăm totuși două probleme de aplicare a teoremei lui Pitagora întîlnite mai înainte în China și în India. Într-una se cere să se determine lungimea unei trestii ce crește în mijlocul unui lac, ieșind din apă pe o înălțime de 5 coți, dacă o rafală de vînt îndoaie vîrful trestiei la 10 coți de la punctul de ieșire din apă. Al-Karadji aplică direct regula pentru calculul diametrului unui cerc, fiind date arcul și coarda unui segment oarecare, regulă pe care au mai întîlnit-o la al-Horezmi (p. 227). Condiția unei alte probleme este: pe cele două maluri ale unui rîu cu o lățime de 50 coți cresc, față în față, doi palmieri, avînd înălțimea de 20, respectiv 30 coți. Pe vîrful fiecărui palmier stă cîte o pasăre și amîndouă văd un pește pe suprafața apei. Ele se avîntă spre pește și ajung simultan la el, pe o dreaptă ce unește bazele celor doi palmieri. Se cere să se determine locul de întîlnire și lungimea drumului parcurs de fiecare pasăre. Problema se reduce la o ecuație de gradul întîi.

Conținutul principal al capitolelor de algebră din *Carte suficientă* este rezolvarea a 6 tipuri normale de ecuații. Demonstrații nu se fac. Sub raport metodic, expunerea lui al-Karadji se distinge prin merite deosebite. Elementele de calcul algebric la al-Horezmi și Abu Kamil intrau în text imediat după rezolvarea tipurilor normale, iar Abu Kamil le mai completează pe măsura necesității. Al-Karadji așază întregul material într-o introducere la rezolvarea ecuațiilor și a problemelor. El expune în mod sistematic operațiile fundamentale asupra monoamelor și a polinoamelor, precum și a iraționalelor, prezintă cele mai importante identități și suma progresiei aritmetice și numai în penultimul capitol comunică regulile de rezolvare a celor 6 tipuri de ecuații de gradul al doilea folosind exemplele lui al-Horezmi. Capitolul 70 este o culegere de probleme. Ele toate servesc ca un fel de introducere la vastul tratat de algebră al lui al-Karadji, redactat în jurul anului 1010 și purtînd titlul *Al-Fahri*, deoarece fusese închinat vizirului din Bagdad, Fahr-al-Mulk [121 a].

Al-Fahri este alcătuit dintr-o prefață și două părți; prima parte, conținînd materialul teoretic și exemplele, este divizată în 15 capitole. Al-Karadji include în opera sa tot ce fusese important în algebra lui Abu Kamil; în afară de aceasta, într-o serie de pro-

bleme el adaugă elemente noi atît teoretice cît și practice, folosind îndeosebi *Aritmetica* lui Diofant.

În prefața la *Al-Fahri*, el formulează scopul științei calculului, ca fiind găsirea unor mărimi necunoscute cu ajutorul altora cunoscute; drept cel mai bun mijloc pentru aceasta servesc regulile algebrice generale și viguroase. Mai departe se lămurește formarea diferitelor puteri ale necunoscutei, unde autorul îl urmează pe Diofant, numind puterea a cincea, pătrato-cub. Ajungînd pînă la cubo-cubo-cub, al-Karadji arată că o serie de puteri se pot continua fără sfîrșit, și că puterile alcătuiesc un lanț de proporții, care se poate scrie sub forma:

$$1 : x = x : x^2 = x^2 : x^3 = x^3 : x^4 = \dots$$

La fel ca la Diofant, la seria puterilor se adaugă seria „fracțiunilor", adică a puterilor inverse ale necunoscutei, legate prin proporțiile:

$$\frac{1}{x} : \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} : \frac{1}{x^3} = \frac{1}{x^3} : \frac{1}{x^4} = \dots$$

Fracțiunea dintr-un număr se definește ca acea cantitate care, înmulțită cu un anumit număr, dă unitatea.

Aparatul diferitelor reguli „trebuitoare în calculele algebrice" și de propoziții „servind pentru rezolvarea dificultăților" este mult mai dezvoltat decît la Abu Kamil. Afară de descompunerile pătratului sumei și diferenței, afară de cubul sumei, unele identități de genul

$$\frac{1}{2}\left[\frac{a^2 - b^2}{a - b} + (a - b)\right] = a, \quad \frac{1}{2}\left[\frac{a^2 - b^2}{a - b} - (a - b)\right] = b,$$

diferite expresii avînd forma unui pătrat complet etc., al-Karadji sumează și unele serii aritmetice. Afară de progresiile aritmetice, mai găsim și regulile:

$$\sum_{1}^{k=n} k^2 = \left(\sum_{1}^{k=n} k\right)\left(\frac{2}{3}k + \frac{1}{3}\right)$$

$$\sum_{1}^{k=n} k^3 = \left(\sum_{1}^{k=n} k\right)^2.$$

După spusele lui al-Karadji, demonstrația pentru suma pătratelor nu i-a reușit, dar pentru suma cuburilor el prezintă o demonstrație geometrică-algebrică simplă și elegantă. Fie că latura

pătratului $ABCD$ (fig. 55) este $1 + 2 + \ldots + n$ (la al-Karadji $n = 10$). Separăm în pătrat gnomonul $BB'C'D'DCB$, avînd $BB' = n$. Aria gnomonului este egală cu:

$$2n\,(1 + 2 + \ldots + n) - n^2 = 2n\frac{n\,(n+1)}{2} - n^2 = n^3.$$

În pătratul $AB'C'D'$ separăm gnomonul $B'B''C''D''D'C'B'$, avînd $BB'' = n - 1$. Aria gnomonului este egală cu $(n - 1)^3$. Continuînd acest proces, vom ajunge pînă la un pătrat cu latura egală cu 1, iar aria pătratului inițial va fi alcătuită din ariile tuturor gnomoanelor și întrucît, $1^2 = 1^3$, avem:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2.$$

Fig. 55

Afară de aceasta, al-Karadji mai dă și sumele altor cîteva serii, legate direct de precedentele; de pildă:

$$\sum_{1}^{k=n-1} k\,(k+1) = \left(\sum_{1}^{k=n} k\right)\left(\frac{2}{3}n - \frac{2}{3}\right),$$

$$\sum_{1}^{k=n-2} k\,(k+1)\,(k+2) = \sum_{1}^{k=n-1} k^3 - \sum_{1}^{k=n-1} k = \left(\sum_{1}^{k=n-1} k\right)^2 - \sum_{1}^{k=n-1} k,$$

ultima sumare este legată de identitatea:

$$(k-1)\,k\,(k+1) = k^3 - k.$$

În teoria ecuațiilor de gradul al doilea, al-Karadji se înrudește îndeaproape cu Abu Kamil și prezintă, de pildă, aceleași deducții pentru regulile de calcul ale lui x și x^2. Dar și în această privință, opera *Al-Fahri* are elemente noi. Astfel, odată cu deducerea geometrică a formulei rădăcinii (vezi p. 230) se propune o completare pur aritmetică pînă la pătratul complet, fără nici un fel de referiri la propozițiile corespunzătoare din cartea a II-a a *Elementelor*. Întrucît în exemplele luate de la Diofant coeficientul termenului superior este adesea diferit de unitate, al-Karadji prezintă reguli corespunzătoare, care nu implică reducerea prealabilă la formele normale ale lui al-Horezmi; aceste reguli au demonstrații geometrice. Merită o atenție deosebită faptul că

al-Karadji este cel care începe să analizeze în mod sistematic ecuațiile trinome, de gradul al doilea, în raport cu o putere oarecare a necunoscutei, precum și ecuații care se reduc la ele prin împărțire la o putere a necunoscutei, adică ecuații de forma:

$$ax^{2n} + bx^n = c, \quad ax^{2n} + c = bx^n, \quad bx^n + c = ax^{2n}$$

și

$$ax^{2n+m} = bx^{n+m} + cx^n.$$

El prezintă regulile pentru calculul lui x^n și dă exemple de ecuații de gradul patru, șase și, în ultimul caz, de gradul șapte. Bineînțeles el nu ia în considerare soluția egală cu zero.

La sfîrșitul primei părți, al-Karadji prezintă unele transformări care permit să scăpăm numitorul de iraționale pătratice. De pildă, se caută un număr care înmulțit cu $(3 + \sqrt{5})$ să dea 1; problema se reduce rapid la rezolvarea unei ecuații de gradul al doilea (compară cu p. 237).

Următoarele cinci capitole din partea a doua a operei *Al-Fahri* constituie o culegere vastă de probleme de algebră și teoria numerelor, cuprinzînd peste 250 de probleme. Ne vom referi curînd la problemele teoretico-numerice din această culegere. Deocamdată să mai facem o observație.

Plecînd de la faptul că al-Karadji n-a folosit cifre în nici una din cele două cărți ale sale, precum și de la faptul că el a preluat multe din *Aritmetica* lui Diofant, unii istorici ai științei au tras concluzia că al-Karadji și Abu-l-Vafa ar fi avut o atitudine în întregime dușmănoasă față de știința indiană și că în acele vremuri ar fi existat chiar o luptă între două școli — cea proindiană și cea progrecească — din cauza unor contradicții dintre anumite secte religioase [21, I, p. 763—765; 12, p. 200]. E adevărat că nu se neagă o oarecare influență a științei indiene și asupra adepților matematicii elene. E foarte improbabil ca această ipoteză să aibă o bază solidă. La Abu-l-Vafa și al-Karadji se pot găsi nenumărate elemente atît de proveniență indiană cît și greacă, iar într-o cantitate tot atît de mare și elemente tradiționale vechi sau devenite în acel timp un patrimoniu tradițional al științei țărilor Islamului. Ar fi dificil de apreciat în mod obiectiv proporția tuturor acestor elemente. Principalul constă în faptul că nu există temeiuri să se constate existența și lupta între „școli" întregi științifice privind expunerea numerației. Să amintim că însuși al-Horezmi, convins propagandist al numerației indiene, o folosise în foarte mică măsură în algebra sa. Iar dacă prezen-

tarea numerelor prin cuvinte se păstrează timp de secole în multe manuale, aceasta își găsește o justificare suficientă în obiceiurile tradiționale și cerințele oamenilor pentru care se scriu asemenea manuale și care se modifică foarte lent în evul mediu. Desigur, în creația unor învățați se oglindesc gusturile lor personale, influența operelor corespunzătoare din literatura greacă și indiană și posibilitățile de a le studia etc. Dar aceasta e o cu totul altă chestiune.

Probleme de teoria numerelor. Abu Kamil a scris o operă specială privind rezolvarea în numere întregi a sistemelor de ecuații liniare nedeterminate. Aceasta este *Cartea rarităților din aritmetică* (*Kitab taraif fi-l hisab*), cunoscută după o copie arabă dintre anii 1211 și 1218, executată de Mas'ud al-Djulfari, originar din așezarea Djulfar, din apropierea orașului Merv. Ca și algebra lui Abu Kamil, această operă se tradusese în limba veche ebraică, spaniolă și, probabil, în latină [122].

Într-o prefață scurtă, Abu Kamil spune că soluțiile întregi ale problemelor sînt uneori unice, uneori există mai multe soluții, iar unele probleme nu au soluții în numere întregi. Apoi el dă exemple pentru toate cele trei cazuri, complicîndu-le treptat și expunînd amănunțit mersul rezolvării lor.

Toate problemele se formulează în mod asemănător cu problemele despre păsări. Metoda de rezolvare este diferită de cea indiană. Abu Kamil rezolvă în primul rînd sistemul:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 100, \\ 5x + \frac{y}{20} + z &= 100. \end{aligned}\right\}$$

El elimină pe z și-l exprimă pe y prin x:

$$100 - x - y = 100 - 5x - \frac{y}{20},$$

$$y = 4x + \frac{4}{19}x,$$

iar de aici deduce că $x = 19$, $y = 80$, $z = 1$. Mai departe el găsește în mod analog șase soluții pentru sistemul:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 100, \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} + 2z &= 100, \end{aligned}\right\}$$

iar apoi 98 și respectiv 304 soluții a două sisteme de ecuații, fiecare fiind alcătuit din ecuații cu cîte patru necunoscute.

În problema 5,

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 100, \\ 3x + \frac{y}{20} + \frac{z}{3} &= 100, \end{aligned}\right\}$$

și se obține că:

$$x = 25 + \frac{17}{160} y.$$

Deoarece se ia cea mai mică valoare întreagă cînd $y = 160$, adică mai mare decît 100 — numărul total al păsărilor — Abu Kamil conchide că problema n-are soluții.

Incununarea operei o constituie problema 6:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z + u + v &= 100, \\ 2x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} + \frac{u}{4} + v &= 100. \end{aligned}\right\}$$

Aici

$$x = \frac{y}{2} + \frac{2}{3} z + \frac{3}{4} u,$$

și

$$x + y + z + u = \frac{3}{2} y + \frac{5}{3} z + \frac{7}{4} u < 100.$$

Abu Kamil alcătuiește două serii de soluții întregi. Mai întîi pentru y se iau valorile 1, 3, 5 etc., pentru $z = 3, 6, 9$ etc., pentru $u = 2, 6, 10$ etc., și analizează combinațiile care satisfac condițiile $y \leqslant 59$, $z \leqslant 54$, $u \leqslant 50$. De aici se obțin 1 443 de soluții. Mai departe se iau pentru y valorile 2, 4, 6 etc., pentru $z = 3, 6, 9$ etc., pentru $u = 4, 8, 12$ etc.; acum $y \leqslant 58$, $z \leqslant 51$, $u \leqslant 52$. Acestea mai dau 1 233 de soluții, astfel că în total sînt 2 676 de soluții!

Cea mai mare parte din problemele de teoria numerelor din lucrarea *Al-Fahri* sînt împrumutate de al-Karadji din *Aritmetica* lui Diofant, iar altele sînt probleme orientale tradiționale. Indi-

căm în mod deosebit o problemă care implică rezolvarea unui sistem liniar nedeterminat cu cinci necunoscute:

$$x + \frac{1}{3}(y + z + u) = s,$$

$$y + \frac{1}{4}(z + u + x) = s,$$

$$z + \frac{1}{5}(u + x + y) = s$$

$$u + \frac{1}{6}(z + y + z) = s.$$

Acest sistem se întîlnește la Diofant, iar mai tîrziu apare la Leonardo Pisano (cu unii coeficienți modificați). De rezolvarea unor astfel de probleme ne vom ocupa în cap. IV.

E posibil ca al-Karadji să fi considerat cel dintîi problema privind determinarea unui număr al cărui pătrat mărit sau micșorat cu un număr dat să fie un pătrat. Autorul rezolvă două exemple:

$$x^2 + 5 = y^2 \text{ și } x^2 - 10 = y^2.$$

În primul caz el ia $y = x + 1$, iar în al doilea $y = x - 1$, de unde rezultă $x = 2$ și respectiv $x = \frac{11}{2}$. Ambele probleme reprezintă tipuri particulare ale ecuației nedeterminate:

$$y^2 = ax^2 + bx + c,$$

analizată încă de Diofant și de însuși al-Karadji la sfîrșitul primei părți din *Al-Fahri*. Pentru un a pătrat, al-Karadji ia $y = \sqrt{a}x + d$, unde d este un număr oarecare dat, iar pentru un c pătrat ia $y = mx + \sqrt{c}$, cu m oarecare.

El aplică de asemenea substituțiile lui Diofant la cîteva tipuri noi de ecuații, de felul sistemului:

$$y^2 = x^3 + ax^2, \quad z^2 = x^3 + bx^2.$$

Dacă luăm

$$y = mx, \quad z = nx,$$

atunci:

$$x = m^2 - a = n^2 - b$$

și totul se reduce la determinarea a două pătrate m^2 și n^2 cu diferența $b-a$, dată, adică la problema precedentă.

Într-o formă mai complicată, aceeași problemă se întîlnește la Abu Djafar Muhammed ibn al-Husein (prima jumătate a secolului al XI-lea, [123]) în lucrarea despre construirea triunghiurilor dreptunghice cu laturi raționale. Problema se pune și se rezolvă geometric: este vorba despre construirea unor pătrate raționale, care, fiind micșorate sau mărite cu o aceeași mărime dată, se transformă în pătrate raționale. Construcția lui al-Husein se poate exprima în felul următor: dacă numerele raționale x, y, z sînt legate prin egalitatea

$$z^2 = x^2 + y^2,$$

atunci:

$$z^2 \pm 2xy = (x \pm y)^2.$$

Acest lucru îl știuse încă Diofant. Luînd drept x, y și z, respectiv $a^2 - b^2$, $2ab$, $a^2 + b^2$ — aceste triplete de numere întregi pitagoreice îi erau cunoscute și lui ibn al-Husein — , obținem identitățile:

$$(a^2 + b^2)^2 \pm 4ab\,(a^2 - b^2) = (a^2 - b^2 \pm 2ab)^2,$$

care, prin alegerea lui a și b, permit să se alcătuiască soluții întregi și raționale pentru sisteme de tipul:

$$\left.\begin{aligned} u^2 + k &= v^2, \\ u^2 - k &= w^2. \end{aligned}\right\}$$

Ulterior, Leonardo Pisano propune o metodă generală, ingenioasă, pentru rezolvarea unor asemenea sisteme.

Să mai amintim și problema lui ibn al-Haisam despre căutarea unui număr divizibil cu 7 și care prin împărțire cu 2, 3, 4, 5 și 6 să dea restul 1. Și această problemă apare din nou la Leonardo Pisano. Probleme similare le găsim și mai devreme la Magavira.

Studiile teoretico-numerice ale matematicienilor din țările Islamului nu sînt prea originale și nu vom intra în analiza unor lucrări privind pătratele magice, sistemele liniare nedeterminate (de genul problemei „despre păsări“ indicată mai sus) etc. Vom remarca doar două studii.

Unul este o încercare de a demonstra imposibilitatea rezolvării în numere întregi a ecuației

$$x^3 + y^3 = z^3,$$

aşadar, a primului caz particular al vestitei teoreme a lui Fermat. După informaţiile lui ibn al-Husein, acest lucru a fost demonstrat de astronomul şi matematicianul Abu Muhammed Hamid ibn al-Hidr al-Hodjandi (decedat în jurul anului 1000) din Hodjent (astăzi Leninabad). Demonstraţia lui al-Hodjandi nu ni s-a păstrat, dar ibn al-Husein arată că ea fusese insuficientă.

Abu-l-Hasan Tabit ibn Korra ibn Marvan as-Sabi al-Harrani (în jurul anilor 830—901), sabeean astrolatru de origine, născut în oraşul mesopotamian **Harran**, centrul religios al sabeenilor[1] şi care lucrase la Bagdad, face o altă descoperire ce merită a fi amintită. Tabit ibn Korra arată că în cazul unor numere prime $p = 3 \cdot 2^n - 1$, $q = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$, numerele $M = 2^n \cdot p \cdot q$ şi $N = 2^n \cdot r$ sînt numere „prietene", adică fiecare dintre ele este egal cu suma divizorilor celuilalt, ca de pildă 220 şi 284. Acest fel de numere apare în literatura neopitagoreică, dar procedeul pentru formarea lor fusese necunoscut înainte. Perechea 220 şi 284 corespunzătoare lui $n = 2$ serveşte mult timp ca exemplu unic de numere prietene; perechi noi (17 296 şi 18 416 pentru $n = 4$, 9 363 584 şi 9 437 056 pentru $n = 7$) găsesc P. Fermat şi R. Descartes. L. Euler, care consacră o lucrare specială (1749) numerelor „prietene", şi dă un tabel cu 61 de perechi de asemenea numere. Legea generală de formare a numerelor „prietene" n-a fost găsită nici pînă-n prezent.

Să ne referim acum la istoricul ulterior al diferitelor discipline şi probleme ale matematicii.

Dezvoltarea sistemului poziţional; fracţiile zecimale. Sistemul poziţional de numeraţie se răspîndeşte mai departe în primul rînd în calculul sexagesimal folosit de astronomi. Acesta este un sistem sexagesimal poziţional complet de numere întregi şi fracţii, mai perfecţionat decît cele create în antichitate. Probabil că încă Abu-l-Vafa îl cunoscuse, dar prima lui descriere o găsim în opera *Despre bazele calculului indienilor (Fi usul hisab al-Hind)*, întocmită de Kuşiar ibn Labban al-Djili (în jurul anilor 971—1024), născut la Ghilian (în limba arabă — Djilian), situat la sud de Marea Caspică [125].

În acest sistem, fiecare din numerele de la 1 la 59 (fig. 56) se reprezintă cu ajutorul unui semn individual — notaţia alfabetică a numărului respectiv. Fiindcă numerele de la 1 la 59 se

[1] Triburi din sud-vestul Arabiei care au alcătuit un stat (pe teritoriul actualului Yemen) cu capitala la Marib între secolele IX şi I î.e.n. — *N.T.*

înseamnă prin una sau două litere, a căror sumă a valorilor numerice este egală cu numărul dat, aceste cifre se cheamă *djumal*, după pluralul cuvîntului *djumla*, adică sumă. Literele-zeci se scriu în dreapta literelor-unități. Pentru zero se folosește

ا	ب	ج	د	ه	و	ز	ح	ط	ى
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
يا	يب	يج	يد	يه	يو	يز	يح	يط	ك
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
كا	كب	كج	كد	كه	كو	كز	كح	كط	ل
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
لا	لب	لج	لد	له	لو	لز	لح	لط	م
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
ما	مب	مج	مد	مه	مو	مز	مح	مط	ن
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
نا	نب	نج	ند	نه	نو	نز	نح	نط	
51	52	53	54	55	56	57	58	59	

Fig. 56. Cifrele djumal.

un semn special Ƅ, provenit poate din semnul lui zero al învățaților din Alexandria, care îl scriau în fracții sexagesimale sub forma literei $\bar{o}$ cu o liniuță deasupra (de la cuvîntul οὐδὲν — *udein* — „nimic"); orice confuzie cu valoarea numerică a lui $\bar{o}$, adică cu 70, se exclude, fiindcă în scrierea unei fracții sexagesimale, numărul 70 nu se întîlnește niciodată.

Celelalte numere întregi și chiar fracțiile se scriu sub forma:

$$a_n 60^n + a_{n-1} 60^{n-1} + \ldots + a_0 + a_{-1} 60^{-1} + \ldots + a_{-m} 60^{-m},$$

unde toți a_k pot avea valori de la 0 pînă la 59. Rangurile fracționare poartă după modelul grecesc nume de minute, secunde, terții etc., rangul unităților — grade, iar rangurile sexagesimale superioare — „o dată ridicate", „de două ori ridicate" etc. Calculul și operațiile în sistemul pozițional sexagesimal le descrie al-Kași în *Cheia aritmeticii* [126, 125], mai amănunțit decît Kașiar ibn Labban.

Djemșid ibn Mas ud al-Kași sau al-Kașani, după poreclă Ghiaseddin, adică „ajutorul credinței", este originar din orașul iranian Kașan, situat între Teheran și Ispahan. El s-a născut în al treilea sau la începutul ultimului sfert al secolului al XIV-lea. La invitația lui Ulug-bek, se mută, în jurul anului 1420, la Samarkand unde conduce o serie de lucrări astronomice și moare în anul 1429 sau ceva mai tîrziu. Lui îi aparțin multe opere de astronomie și trei tratate remarcabile de matematică, dintre care *Cheia aritmeticii (Miftah al-hisab)* o termină la 2 martie 1427 [126 a]. Asupra celorlalte două tratate vom mai reveni.

Cheia aritmeticii este un manual magistral de matematică elementară, în care autorul ține seama de interesele unui cerc foarte vast de cititori. După bogăția materialului, claritatea și eleganța expunerii lui, cartea este unică în felul ei în întreaga literatură medievală. Bineînțeles că majoritatea cunoștințelor nu sînt noi și aici se găsesc probleme întîlnite cu multe secole înainte. Titlul cărții, întîlnit și la alte opere mai vechi, arată că aritmetica este considerată drept o cheie pentru rezolvarea diferitelor probleme care se reduc la un calcul sau, după cum spune însuși autorul, aritmetica este știința găsirii necunoscutelor numerice cu ajutorul unor mărimi cunoscute corespunzătoare lor. În același fel definise știința calculului încă al-Karadji. Lucrarea este împărțită în cinci cărți: 1) despre aritmetica întregilor, 2) despre aritmetica fracțiilor, 3) despre calculele astronomilor, 4) despre măsurători și 5) despre găsirea necunoscutelor cu ajutorul algebrei, al regulii celor două false poziții ș.a. Datorită calităților ei superioare, *Cheia aritmeticii* a fost transcrisă timp de sute de ani; o ediție litografiată a acestei cărți s-a mai publicat la Teheran chiar în anul 1889.

Sistemul sexagesimal pozițional se expune în cea de-a treia carte a *Cheii* — despre calculele astronomilor. Pentru reprezentarea unui număr se scriu la rînd toate cifrele lui și fie că se indică toate rangurile lui, fie numai cel mai mic rang, ca de pildă, 133 264 537 secunde înseamnă $1 \cdot 60^2 + 33 \cdot 60 + 26 + 45 \cdot 60^{-1} + 37 \cdot 60^{-2}$ și se citește: 1 de două ori ridicat 33 ridicat 26 grade 45 minute 37 secunde. Înmulțirea și împărțirea se bazează pe aplicarea a două tabele. Prima este tabla înmulțirii pînă la $59 \cdot 59$ și ea trebuie să fie la îndemîna calculatorului, fiindcă nu-i ușor de memorat cele $59 \cdot 30 = 1\,770$ de produse care intră în componența ei. Cea de-a doua tabelă servește pentru determinarea rangului produsului sau cîtului, a două ranguri sexagesimale. Al-Kași formulează regulile respective în formă

generală pentru orice indici întregi, pe care-i numește „numere ale rangurilor". Pentru aceasta, el presupune $a^0 = 1$, adică face să corespundă gradelor (unitățile sistemului sexagesimal) rangul zero, iar de numerele negative se dispensează, făcînd distincție între partea pe care sînt așezate rangurile întregilor și ale fracțiilor față de grade sau, după cum mai spune el, face distincție între „lanțurile crescătoare" și „descrescătoare".

Regulile noastre

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad \text{și} \quad a^m : a^n = a^{m-n},$$

al-Kași le formulează astfel:

„Suma numerelor a două ranguri de factori simpli ai unei înmulțiri, dacă ele se află de aceeași parte a unităților, sau diferența între ele, dacă ele sînt de părți diferite, este numărul rangului produsului din partea sumei sau din partea superiorității, iar diferența numerelor a două ranguri între doi termeni simpli ai unei împărțiri, dacă ele se află de aceeași parte a unităților, și suma lor, dacă ei sînt de părți diferite, este numărul rangului cîtului rezultat prin împărțire în lanț crescător, dacă rangul deîmpărțitului se află deasupra rangului împărțitorului, și în lanț descrescător, dacă nu este așa" [126, p. 93].

La fel ca și precursorii săi, al-Kași știe să aducă la același indice un produs de radicali și formulează în cuvinte rezultate de genul acestuia:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[mn]{a^m}\ \sqrt[mn]{b^n} = \sqrt[mn]{a^m b^n}.$$

În acea vreme și în Europa se elaborează operațiile asupra exponenților. La sfîrșitul secolului al XIV-lea, N. Oresme introduce exponenții fracționari în termenii teoriei antice a rapoartelor, N. Chuquet introduce în anul 1484 exponenții negativi și nul iar M. Stiefel, care introdusese însuși termenul „exponent" *(exponens)*, poate spune pe scurt în 1544: la înmulțire exponenții se adună, la împărțire — se scad.

Al-Kași efectuează înmulțirea și împărțirea numerelor sexagesimale întregi și fracționare, absolut la fel ca și în sistemul nostru zecimal. Vechii matematicieni arabi, asemenea lui al-Horezmi, transformau mai întîi fracțiile sexagesimale în numere zecimale întregi ale unităților rangurilor inferioare, efectuau operațiile în sistem zecimal, iar apoi reveneau la sistemul sexagesimal. Pentru a verifica rezultatul, al-Kași aplică împărțirea prin 59=60 — 1, care joacă aici același rol ca și verificarea prin 9 (adică 9 = 10 — 1) în sistemul zecimal.

În expunerea aritmeticii sexagesimale poziționale, al-Kași îi urmează în esență pe mulți dintre precursorii săi. El face un pas important, extinzînd numerația zecimală a întregilor asupra fracțiilor.

În cap. I din cea de-a doua carte a *Cheii*, consacrat fracțiilor, al-Kași amintește că a introdus, prin analogie cu fracțiile sexagesimale, fracții alcătuite din puterile consecutive ale unei zecimi și numește aceste puteri zecimale, secunde zecimale, terții zecimale etc., iar înseși fracțiile le numește fracții zecimale[1]. Scopul lui este să creeze un sistem de fracții, în care la fel ca și în sistemul sexagesimal, toate operațiile să se efectueze la fel ca și cu numerele întregi, dar fundat pe baza zecimală general folosită și de aceea accesibil și pentru aceia care nu cunosc „calculele astronomilor". În cartea a IV-a despre măsurarea figurilor, el transformă multe rezultate în fracții zecimale. Operațiile cu fracțiile zecimale sînt descrise în cartea a III-a. De fapt, ar fi fost suficient ca al-Kași să fi făcut doar observația că aceste operații se efectuează după regulile cunoscute ale „calculului astronomilor", dar el mai formulează o dată, în mod special, regula pentru exponenți la înmulțire și la împărțire; tocmai aceasta e regula pe care am prezentat-o ceva mai sus. El acordă o mare atenție transformării fracțiilor sexagesimale în cele zecimale și invers; în ajutorul calculatorului, el prezintă tabele compacte pentru exprimarea numerelor zecimale de forma $a_k \cdot 10^n$, unde $10^{-10} \leqslant 10^n \leqslant 10^{10}$, $a_k = 1, \ldots, 9$, prin numere sexagesimale.

Cînd un număr sexagesimal nu se poate exprima printr-o fracție zecimală finită (fracția zecimală se exprimă exact printr-una sexagesimală), al-Kași rotunjește aproximarea la fel cum se face astăzi, — așa cum, de exemplu, procedase încă Abu-l-Vafa. Găsind, de pildă, că $8'29''44'''$ (partea fracționară a numărului π) este egală cu 0,141 592, iar la rest mai rămîn $35'33''20'''$, adică mai mult de jumătate din unitatea ultimului rang zecimal, el rotunjește fracția zecimală, mărind ultima cifră cu 1. Mersul propriu-zis al calculelor este următorul. Dacă

$$\frac{8}{60} + \frac{29}{60^2} + \frac{44}{60^3} = \frac{x}{10} + \frac{y}{10^2} + \frac{z}{10^3} + \cdots,$$

atunci înmulțind cu 10 avem:

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{57}{60^2} + \frac{20}{60^3} = x + \frac{y}{10} + \frac{z}{10^2}$$

---

[1] Fracțiile zecimale se folosesc și într-o operă mai veche a lui al-Kași privind măsurarea cercului, cu care ne vom mai întîlni. — *N.A.*

Fig. 57. Transformarea fracției sexagesimale 8′29″44‴ într-una zecimală 0,141 592. Din *Cheia aritmeticii* a lui al-Kași (manuscrisul de la Leyda, 1554).

și prin urmare $x = 1$. La fel procedăm și cu egalitatea

$$\frac{24}{60} + \frac{57}{60^2} + \frac{20}{60^3} = \frac{y}{10} + \frac{z}{10^2} + \cdots$$

etc. În felul acesta apare un tabel în a căruia a doua coloană (în dreapta) se află cifrele fracției zecimale, iar în prima (dedesubtul liniilor) — fracțiile sexagesimale care se transformă (fig. 57).

Să observăm că al-Kași nu remarcă periodicitatea evidentă a fracției 0,141 (592) obținută de el.

Pentru a reprezenta fracțiile zecimale care se scriu în aceeași linie cu partea întreagă a numărului, al-Kași aplică diferite procedee: separă printr-o linioară partea întreagă, sau o scrie cu o altă culoare, sau scrie deasupra cifrelor denumirea rangurilor; cel mai adesea el numește doar rangul inferior, a cărui cunoaștere determină și pe celelalte.

Unități	Minute	Secunde	Terții
1	24	57	20
4	9	33	20
1	35	33	20
5	55	33	20
9	15	33	20
2	35	33	20

Încercări de a se introduce fracțiile zecimale se făcuseră și mai devreme. După cum știm, le-am întîlnit încă în China. E posibil ca și al-Kași să fi avut oarecare informații despre aceasta. El însă consideră că introducerea fracțiilor zecimale este un merit personal al său. În orice caz, evidențierea și aplicarea regulată a fracțiilor zecimale, precum și descrierea operațiilor cu ele constituie o realizare a lui al-Kași. Schița succintă a sistemului de „prime", „secunde", „terții" etc., zecimale, pe care o întîlnim în manuscrisul matematicianului evreu Immanuil Bonfis, care a trăit în secolul al XIV-lea la Tarascon, este cu totul neînsemnată în comparație cu teoria fracțiilor zecimale (vezi p. 391) lui al-Kași.

Extragerea rădăcinilor și binomul lui Newton. După al-Horezmi, matematicienii arabi introduc o serie de simplificări în ordinea primelor patru operații aritmetice și împrumută de la indieni sau propun ei înșiși procedee noi de dispunere a calculelor. Nu ne vom opri asupra acestor chestiuni. O importanță mult mai mare o are perfecționarea procedeelor de extragere a rădăcinilor [127].

An-Nasavi descrie pentru prima oară extragerea rădăcinii cubice după un procedeu ce coincide cu cel antic chinez, adică după procedeul Ruffini-Horner. Abu-l-Vafa scrie o operă despre extra-

gerea rădăcinilor de gradul al treilea, al patrulea și al șaptelea[1], iar al-Biruni — despre extragerea rădăcinilor de gradul al treilea și mai mare. Aceste opere au rămas nedescoperite. S-a pierdut și tratatul lui Khayyam *Dificultățile aritmeticii (Mușkilat al-hisab)*, cuprinzînd procedeul pentru determinarea rădăcinilor de orice indice natural din numere întregi. În algebra sa, Khayyam spune că a dat demonstrația numerică a procedeului indian de extragere a rădăcinii pătrate și cubice, bazat pe formula pătratului și, respectiv, a cubului unui binom și a extins acest procedeu asupra oricăror exponenți întregi. S-ar părea că Ommar Khayyam cunoștea „binomul lui Newton" pentru exponenți întregi [132, pp. 22 și 119].

Unica descriere cunoscută din literatura arabă, privind procedeul de extragere a rădăcinilor din numere întregi, o conține *Cheia aritmeticii* lui al-Kași. În capitolul *Despre determinarea bazei puterii* din prima carte a acestei opere, el expune în amănunțime regula și o ilustrează detaliat pe exemplul $\sqrt[5]{44240899506197}$, reducînd toate calculele la un tabel foarte comod. Mai departe el dă exemple de extragerea rădăcinii din numere sexagesimale, fără a le transforma în numere zecimale; iar printre aceste exemple există următorul $\sqrt[6]{34^{\mathrm{IX}}59^{\mathrm{VIII}}1^{\mathrm{VII}}7^{\mathrm{VI}}14^{\mathrm{V}}54^{\mathrm{IV}}24^{\mathrm{III}}3^{\mathrm{II}}47^{\mathrm{I}}37^{\circ}40'}$.

Metoda lui al-Kași pentru determinarea părții întregi a rădăcinii este metoda lui Ruffini-Horner și autorul nu pretinde de a o fi descoperit. E posibil ca al-Kași sau precursorii lui să fi aflat acest procedeu de la chinezi.

Cheia aritmeticii conține de asemenea unica expunere cunoscută din acele vremuri, privind regula de ridicare a unui binom la orice putere număr natural, dar nici pe aceasta autorul n-o socotește că ar fi o descoperire proprie. Totuși, al-Kași nu folosește această regulă pentru găsirea părții întregi a rădăcinii, ci pentru calculul aproximativ al părții fracționare a unei rădăcini dintr-un număr întreg.

Al-Kași numește coeficienții binominali elemente ale indicilor puterii, făcînd excepție numai pentru coeficienții primului și

[1] Această operă, se numește *Cartea despre determinarea muchiei cubului, a unui pătrato-patrat și a ceea ce este alcătuit din ele (Kitab istihradj zi lal-ka'b va mal al-mal va ma iutricab minhuma)*. În înțelegerea obiectului acestei cărți noi ne menținem la părerea lui P. Luckey [127].

F. Woepcke consideră că în afară de extragerea rădăcinilor de gradul 3 și 4, cartea mai conține și rezolvarea ecuației:

$$x^4 + ax^3 = b.$$

ultimului termen al descompunerii care sînt egali cu 1. Pătratul are un singur coeficient al exponentului, cubul-două, iar pentru fiecare indice următor, numărul lor se mărește cu o unitate. Al-Kași prezintă o regulă aditivă pentru calculul consecutiv al coeficienților, corespunzător formulei noastre $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$ și dă tabelul lor (fig. 58) pînă la puterea a 9-a inclusiv:

9							
36	8						
84	28	7					
126	56	21	6				
126	70	35	15	5			
84	56	35	20	10	4		
36	28	21	15	10	6	3	
9	8	7	6	5	4	3	2.

Al-Kași formulează regula binomului pentru puterea a 5-a, dar întrucît se cunoaște procedeul de continuare a „triunghiului lui Pascal", aceasta are un caracter general. Forma regulii diferă puțin de cea cu care sîntem obișnuiți; al-Kași scrie diferența

$$(a + b)^n - a^n = C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + b^n.$$

El dă separat regula pentru diferența

$$(a + 1)^n - a^n = C_n^1 a^{n-1} + C_n^2 a^{n-2} + \ldots + 1;$$

el o face astfel, deoarece $(a + 1)^n - a^n$ este numitorul părții zecimale a rădăcinii. Rădăcina $\sqrt[n]{a^n + r}$, unde a este întreg, iar $r < (a + 1)^n - a^n$, al-Kași o exprimă aproximativ sub forma:

$$\sqrt[n]{a^n + r} \approx a + \frac{r}{(a+1)^n - a^n}.$$

Pentru rădăcina pătrată se obține în particular aproximația:

$$\sqrt[2]{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a + 1}.$$

Al-Kași nu prezintă deducerea formulei sale. Poate că el obținea corecția pentru partea întreagă prin interpolare liniară. Fie $y = \sqrt[n]{x}$; dacă $x_1 = a^n$, atunci $y_1 = a$, iar dacă $x_2 = (a + 1)^n$, atunci $y_2 = a + 1$. În acest caz, pentru $x = a^n + r$ avem:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \approx \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \text{ adică, } y = \sqrt[n]{a^n + r} \approx a + \frac{r}{(a+1)^n - a^n}.$$

Fig. 58. Tabelul coeficienţilor binomiali. Din *Cheia aritmeticii* a lui al-Kaşi (manuscrisul de la Leyda, din 1554).

E posibil că el să fi găsit corecția și cu ajutorul formulei binomului. Dacă

$$\sqrt[n]{a^n + r} = a + \rho \quad (\rho < 1),$$

atunci:

$$a^n + r = a^n + C_n^1 a^{n-1}\rho + C_n^2 a^{n-2}\rho^2 + \ldots + \rho^n$$

și

$$\rho = \frac{r}{C_n^1 a^{n-1} + C_n^2 a^{n-2}\rho + \ldots + \rho^{n-1}} \approx \frac{r}{C_n^1 a^{n-1} + C_n^2 a^{n-2} + \ldots + 1} =$$

$$= \frac{r}{(a+1)^n - a^n}$$

Să observăm că pentru a găsi această corecție fracționară nu e nevoie s-o calculăm în mod special: numărătorul și toți termenii numitorului se obțin în cursul calculului părții întregi a rădăcinii. În exemplul lui al-Kași (fig. 59) avem:

$$\sqrt[5]{44\,240\,899\,506\,197} \approx 536\frac{21}{414\,237\,740\,281}.$$

Cazuri particulare ale formulei generale pentru extragerea aproximativă a rădăcinii se cunosc în țările Islamului cu mult înaintea lui al-Kași. An-Nasavi aplică, de pildă, regulile:

$$\sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a+1}, \quad \sqrt[3]{a^3 + r} = a + \frac{r}{3a^2 + 3a + 1}.$$

După cum s-a mai spus (vezi p. 155), uneori aproximarea se îmbunătățește cu ajutorul unui proces de iterație, folosit încă de babilonieni. Așa de pildă, învățatul arab de la sfîrșitul secolului al XII-lea, Abu Zakaria (sau Abu Bakr) Muhammed ibn Abdalla al-Hasar, folosește aproximarea:

$$\sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a} - \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{r}{2a}\right)^3}{\left(a + \frac{r}{2a}\right)}.$$

În Europa, extragerea rădăcinilor bazate pe descompunerea binomului, pentru indici pînă la puterea a 8-a, e descrisă de P. Apianus în anul 1527. În anul 1544, M. Stiefel o prezintă sub o formă mai generală, dînd un tabel de coeficienți binomiali pînă la puterea a 17-a.

Fig. 59. Extragerea rădăcinii de gradul al cincilea din numărul 44 240 899 506 197. Din *Cheia aritmeticii* a lui al-Kaşi (manuscrisul de la Leyda, 1554).

Pentru un calcul mai exact al unei rădăcini iraționale, al-Kași recomandă să se mai înmulțească numărul de sub radical cu puterea respectivă a lui zece:

$$\sqrt[n]{N} = \frac{\sqrt[n]{10^{2k}N}}{10^k}.$$

La extragerea rădăcinii dintr-o fracție, dacă numitorul este irațional, se folosește regula:

$$\sqrt[n]{\frac{M}{N}} = \frac{\sqrt[n]{N^{n-1}M}}{N}.$$

Atenția permanentă a lui al-Kași de a obține aproximări cît mai exacte o caracterizează exemplele în care se extrag rădăcinile din numere mixte. Rădăcina pătrată din $7\frac{1}{6}$ se calculează mai întîi ca

$$\sqrt{4 + 3\frac{1}{6}} \approx 2\frac{19}{30}.$$

Rezultatul va fi mai bun dacă numărul se va prezenta de la început sub forma unei fracții:

$$\sqrt{\frac{43}{6}} = \frac{\sqrt{258}}{6} = \frac{\sqrt{256 + 2}}{6} \approx 2\frac{67}{99}.$$

Într-adevăr, eroarea din prima aproximare este de 0,04, iar în cea de-a doua, circa 0,004.

Autorul calculează cu o mare exactitate muchiile poliedrelor regulate. Numerele $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ el le dă pînă la cvinte, adică pînă la 60^{-5}, ceea ce corespunde la $1{,}5 \cdot 10^{-9}$. Mai găsim aici și aproximările:

$$\frac{1}{2\sqrt{5}} \sqrt{10(5 - \sqrt{5})} \approx 1°10'32''3'''13''''55'''''$$

și

$$\frac{1}{6}(\sqrt{15} - \sqrt{3}) \approx 0°21'24''33'''34''''17'''''.$$

Numerele iraționale și teoria rapoartelor. În ceea ce privește tehnica și exactitatea calculului, al-Kași și-a întrecut toți precursorii, dar el nu a făcut altceva decît să continue o linie multi-

seculară de dezvoltare. Calculele trigonometrice și geometrice și îndeosebi întocmirea unor tabele astronomice din ce în ce mai exacte duceau pe matematicienii țărilor Islamului la operații cu numere iraționale. Aplicațiile geometrice ale algebrei și dezvoltarea ei rapidă au făcut de asemenea ca iraționalele și în primul rînd, rădăcinile pătrate din numere întregi nepătrate și din numere fracționare să devină tot mai mult un obiect obligatoriu de studiu. Dacă la al-Horezmi, iraționalele sînt rare și absolut elementare, în schimb Abu-Kamil operează frecvent și cu foarte multă iscusință cu iraționalele pătratice mai complicate; același lucru se referă și la al-Karadji.

În aceste condiții se produce desigur aritmetizarea teoriei antice a iraționalelor de gradul al doilea, și anume, a celei din cartea a X-a a *Elementelor* lui Euclid, din care unele teoreme se folosesc direct pentru transformarea și simplificarea radicalilor, ce intră în expresiile rădăcinilor ecuațiilor numerice de gradul al doilea.

În țările Islamului, *Elementele* servesc ca cel mai important manual de școală și ca punct de plecare al cercetărilor. Între sfîrșitul secolului al VIII-lea și mijlocul secolului al XV-lea se pot cita aproape cincizeci de matematicieni, preocupați de traducerea, transformarea și comentarea *Elementelor* lui Euclid.

Un rol esențial în stimularea atenției spre comentarea *Elementelor* îl joacă marele filozof al acestor vremuri, Abu Nasr Muhammed ibn Muhammed al-Farabi (870? — 950 sau 951). Originar din apropierea orașului Faraba, situat la vărsarea rîului Arîs în Sîr-Daria, al-Farabi provine din aristocrația militară turcă din Asia centrală; el lucrează la Bagdad și la Aleppo. Concepțiile lui al-Farabi alcătuiesc o îmbinare a cîtorva idei musulmane cu platonismul și, îndeosebi, cu aristotelismul pe care el îl propagă cu succes în Orient. Interesul acestui filozof față de *Elemente* se explică, prin locul pe care-l ocupă în această operă analiza noțiunilor fundamentale din geometrie și aritmetică, noțiuni care joacă un rol important în lucrările lui Aristotel. Lucrarea lui al-Farabi, *Comentarii la dificultățile din introducerile la cea de-a doua și a cincea carte a lui Euclid (Șarh al-mustaglak min musadara al-makala al-ula va-l-hamisa min Uklidas)* au ajuns pînă la noi într-o traducere în limba veche ebraică. Cu privire la definiția punctului, a liniei și a suprafeței, al-Farabi scrie:

„Studiul trebuie să înceapă de la un corp perceptibil, apoi să se treacă la analiza unui corp, abstract față de senzațiile legate de el, apoi la o suprafață, apoi la linie și în cele din urmă la

punct“ [128, p. 96]. Al-Farabi se apropie aici de Aristotel, care spune că noțiunile matematice se creează prin abstractizarea proprietăților obiectelor reale. De altfel, importanța matematică a comentariilor lui al-Farabi nu este mare: în cazul de față este mai important rolul stimulator, decît conținutul lor concret. Al-Farabi, la fel ca și alți filozofi, atrage atenția matematicienilor asupra lucrărilor lui Aristotel, fapt care capătă curînd o importanță deosebită și pentru cercetări matematice speciale, ca de pildă pentru creația lui Khayyam.

De un interes deosebit sînt pentru matematicieni problemele nodale din *Elemente*: teoria dreptelor paralele, teoria rapoartelor și teoria iraționalelor pătratice. Încă pe timpul lui al-Mamun, se redactează comentarii la cartea a V-a, aparținînd lui al-Abass ibn Said al-Djauhari și lui Abu-t-Tadjib Sanad ibn Ali, conducătorul Observatorului astronomic. Tabit ibn Korra, făcînd o traducere nouă a *Elementelor*, scrie lămuriri la ele, îndeosebi la cartea a V-a și un comentariu special la teoria paralelelor. Abu Abdalla Muhammed ibn Isa al Mahani, născut în orașul iranian Mahana (decedat în jurul anului 880) și care lucrează la Bagdad, scrie o serie de comentarii la cărțile I, a V-a, a X-a și a XIII-a. După al-Mahani, de interpretarea *Elementelor* se ocupă matematicianul și astronomul Abu-l-Abas al-Fadl ibn Hatim an-Nairizi din Bagdad, cunoscut și după numele lui latinizat Anaricius (decedat aprox. în 922), precum și Muhammed ibn Abd al-Baki al-Bagdadi (decedat aproximativ în 1100) și alții.

Teoria iraționalelor pătratice (și bipătrate) se construiește în cartea a X-a din *Elemente* prin reprezentarea lor prin imagini geometrice — segmente și dreptunghiuri. În această carte se clasifică și se deduc proprietățile mărimilor, care se pot considera ca rădăcini iraționale ale unor ecuații de gradul al doilea și bipătrate; această clasificare servește în cartea a XIII-a pentru determinarea și construirea muchiilor poliedrelor regulate. Între altele, în cartea a X-a se deduc transformări atît de importante cum sînt de pildă

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a + b \pm 2\sqrt{ab}}, \qquad (1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}{a - b}, \qquad (2)$$

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}. \qquad (3)$$

Comentatorii arabi descoperă conținutul aritmetic al acestor transformări și le ilustrează prin exemple numerice. În mod analog procedase și Bhaskara, dar la o scară mult mai redusă. Iată cîteva exemple ale lui al-Bagdadi [129]:

$$\sqrt{10} \pm \sqrt{8} = \sqrt{18 \pm \sqrt{320}},$$

$$\sqrt{6 \pm \sqrt{20}} = \sqrt{5} \pm 1,$$

$$\sqrt[4]{12} \pm \sqrt[4]{3} = \sqrt{\sqrt{27} \pm \sqrt{24}} = \sqrt{51 \pm \sqrt{2592}}$$

ultimul este ușor de obținut, punînd partea din stînga sub forma

$$\sqrt[4]{3}\,(\sqrt{2} \pm \sqrt{1}) = \sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{\sqrt{9} \pm \sqrt{8}},$$

$$\sqrt{\sqrt{8} \pm \sqrt{6}} = \sqrt[4]{4\tfrac{1}{2}} \pm \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}.$$

La al-Karadji întîlnim și transformările unor radicali simpli de gradul al treilea: $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{16}$, $\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{128}$.

În acest fel, în știința Orientului Apropiat și Mijlociu se șterge însăși deosebirea dintre mărimile geometrice incomensurabile și iraționalele numerice. Numerele iraționale devin întru totul obiect de studiu al aritmeticii și al algebrei. Un asemenea punct de vedere îl exprimă, de exemplu, al-Biruni, pe care-l influențaseră într-o oarecare măsură și operele indienilor. În cartea de trigonometrie a lucrării sale *Canonul lui Mas'ud*, al-Biruni spune: *Circumferința cercului împărțită prin diametrul lui alcătuiește un raport, care este raportul dintre numărul circumferinței și numărul diametrului, dar acest raport este irațional* [166, p. 303]. În timp ce mulți matematicieni, urmîndu-i pe vechii greci și alexandrini, denumeau produsul a două segmente — „arie dreptunghiulară“, construită pe aceste segmente, al-Biruni vorbește sistematic, în cazul de față, despre „produsul a două linii“ [126].

Matematicienii țărilor Islamului nu se limitează, așa cum o făcuseră indienii la folosirea în fapt a numerelor iraționale, ci le tratează ca pe un obiect de studiu teoretic. Pentru aceasta, ei întrebuințează teoria antică a rapoartelor, o supun analizei și criticii, iar apoi dezvoltă o teorie proprie și extind sfera noțiunii de număr pînă la mulțimea numerelor reale pozitive.

Analiza critică a teoriei rapoartelor lui Eudoxus-Euclid o face încă al-Mahani, urmat de alți mulți învățați remarcabili [130].

Nici unul dintre aceștia nu neagă justețea definiției clasice a egalității a două rapoarte, dar majoritatea matematicienilor presupun că această definiție nu dezvăluie esența proporției, iar noi am spune că nu exprimă funcția de măsurare pe care o are raportul. În timp ce în definiția a două mărimi comensurabile rolul principal îl joacă procesul de măsurare a unei mărimi prin alta — algoritmul lui Euclid — în definiția generală din cartea a V-a a *Elementelor* se compară nemijlocit niște termeni echidivizibili ai unei proporții [1]. Matematicienii țărilor Islamului tind să scoată pe primul plan procesul de măsurare chiar în definiția egalității rapoartelor și totodată să stabilească o legătură strînsă între rapoartele incomensurabile și cele comensurabile, care servesc pentru aproximarea celor dintîi. Definiția clasică a proporției se înlocuiește treptat printr-una nouă, renăscînd, în esență, așa-numita definiție antifairetică, preeudoxiană, care se bazează pe algoritmul lui Euclid și este echivalentă cu definiția egalității a două rapoarte prin egalitatea celor două descompuneri incomplete particulare corespunzătoare ale acestora în fracții continue [2]. O asemenea definiție se găsește la al-Mahani, dar ea nu apare la el ca definiție fundamentală, ci ca o însușire a proporției, definită după Euclid. După al-Mahani urmează un șir de autori, precum: an-Nairizi, ibn al-Haisam ș.a. Începînd cu Tabit ibn Korra se acordă o atenție specială teoriei rapoartelor compuse pe care se bazează capitole importante din geometrie, trigonometrie și aritmetică (regulile de trei). O expunere mai amplă a teoriei rapoartelor se găsește în lucrarea *Comentarii privind dificultățile din introducerile la cărțile lui Euclid (Risala fi șarh ma așkal min musadarat kitab Uklidas)*, scrisă de Ommar Khayyam în anul 1077 [131, 132].

Prima carte din *Comentarii* este consacrată teoriei dreptelor paralele și o vom analiza mai departe. Celelalte două cărți conțin teoria rapoartelor.

Ommar Khayyam consideră definiția proporționalității din cartea a V-a a *Elementelor* drept corectă, dar nu „veridică",

[1] Conform acestei definiții, perechile de mărimi A, B și C, D se găsesc în același raport, dacă — pentru oricare două numere naturale m și n — cînd este îndeplinită una din condițiile $nA \lesseqgtr mB$ se îndeplinește și condiția corespunzătoare $nC \lesseqgtr mD$ [33, a, I, p. 142].

[2] Despre teoria antifairetică a grecilor antici [vezi 133, I].

adică nu lămurește esența adevărată a chestiunii, fiindcă sensul adevărat al raportului consistă în procesul de măsurare a unei mărimi cu ajutorul alteia.

Pentru un raport numeric, Khayyam adoptă definiția lui Euclid vezi [33a, II, p. 10], dar în cazul mărimilor incomensurabile el definește proporția în alt mod (termenii anteriori ai rapoartelor se consideră mai mici decît cei posteriori), pe baza algoritmului lui Euclid: „să trecem la a doua toți multiplii celei dintîi, pentru ca restul să devină mai mic decît cea dintîi și să trecem la a patra toți multiplii celei de-a treia, pentru ca restul să devină mai mic decît cea de-a treia, și fie că divizibilitatea primcia prin a doua să fie egală cu divizibilitatea celei de-a treia prin a patra. Mai departe, să trecem la prima toți multiplii restului celei de-a doua, astfel încît restul să devină mai mic decît restul celei de-a doua și exact la fel să trecem la a treia toți multiplii restului celei de-a patra, astfel încît restul să devină mai mic decît restul celei de-a patra, și fie ca divizibilitatea celei de-a doua este egală cu divizibilitatea restului celei de-a patra. Să trecem la fel la restul celei de-a doua toți multiplii restului celei dintîi, iar la restul celei de-a patra toți multiplii restului celei de-a treia și fie că divizibilitățile lor sînt egale. Tot astfel să trecem pe rînd multiplii resturilor unele la altele, după cum am explicat, și fie că numărul resturilor primei și a celei de-a doua este egal cu numărul resturilor respective ale celei de-a treia și a patra și așa pînă la infinit. În acest caz raportul dintre prima și a doua este necesar egal cu raportul dintre a treia și a patra. Iată proporționalitatea adevărată în geometrie“ [132, pp. 88—89]. Cu alte cuvinte, fie că raportul $\frac{A}{B}$ se descompune într-o fracție continuă cu cîturile incomplete q_1, $q_2, \ldots,$ $q_n, \ldots$ iar $\frac{C}{D}$ — o fracție cu cîturile incomplete q'_1, q'_2, $\ldots, q'_n \ldots$ Prin definiție aceste rapoarte sînt egale dacă $q_n = q'_n$, pentru orice n.

Khayyam înlocuiește și definiția dată de Euclid ordonării rapoartelor [33 a, I, p. 143]. După Khayyam, $\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$ dacă sînt îndeplinite egalitățile $q'_k = q_k$, iar pentru $k < m$ avem $q_m < q'_m$ cu m impar și $q_m > q'_m$ pentru un m par. Este remarcabil că și ultima definiție, Khayyam o include la cazul în care o pereche oarecare de mărimi este comensurabilă (adică, de la o treaptă oarecare nu

există rest) — și prin aceasta dă un criteriu de comparație a unui număr irațional cu unul rațional[1].

Definiția egalității rapoartelor lui Khayyam nu se deosebește de cea dată de unii precursori ai săi. Probabil că definiția inegalității îi aparține lui Khayyam. Locul central îl ocupă la el stabilirea echivalenței între cele două teorii — a sa proprie și a lui Eudoxus — Euclid. Într-o serie de teoreme, Khayyam arată că rapoartele egale sau neegale în sensul lui Euclid sînt egale sau respectiv inegale în sensul lui și invers. Demonstrațiile se bazează pe teorema existenței celei de-a patra mărimi proporționale față de alte trei date A, B, C.

Această teoremă lipsește din cartea a V-a, a *Elementelor*, deși Euclid o folosește implicit la deducerea cîtorva propoziții. În propoziția 12 din cartea a VI-a, Euclid, folosind teoria paralelelor, demonstrează această teoremă pentru cazul particular al segmentelor, iar în cartea a XII-a o folosește din nou implicit pentru ariile curbe. Khayyam subliniază importanța propoziției și încearcă s-o deducă din principiul continuității. Această propoziție o întîlnim pentru întîia oară în literatura europeană sub forma unei axiome, în traducerea latină comentată a *Elementelor*, întocmită de G. Campano din Novara (mijlocul secolului al XIII-lea), bazată pe traducerea acestei opere din limba arabă în latină, realizată de Adelard din Bath, și pe alte texte arabe [11, p. 336].

După cum o arată el însuși, Khayyam preia principiul continuității de la Aristotel; și el constă în afirmația că mărimile se pot divide pînă la infinit, adică ele nu sînt alcătuite din cantități indivizibile. Demonstrația teoremei cu privire la cea de-a patra mărime proporțională față de alte trei date A, B, C este următoarea. Prin dublare se poate găsi o mărime N suficient de mare, încît $\frac{C}{N} < \frac{A}{B}$ și prin înjumătățire se poate găsi o mărime suficient de mică M, încît $\frac{C}{M} > \frac{A}{B}$. Deoarece mărimile sînt infinit divizibile, de aceea între M și N trebuie să existe o mărime intermediară D, astfel încît $\frac{C}{D}$ să fie egal cu $\frac{A}{B}$. Desigur, afirmația că o mărime continuă, trecînd de la o valoare mai mică $\frac{C}{N}$ la

[1] În formularea modernă a definiției lui Khayyam, putem lua în acest caz pe q_m sau q'_m egal cu $+\infty$ — *N.A.*

una mai mare $\frac{C}{M}$, ia în mod obligatoriu fiecare valoare intermediară nu se poate deduce ireproșabil din principiul continuității al lui Khayyam. În sensul definiției lui Khayyam, pe un segment (0,1) ar exista o mulțime continuă de puncte raționale; ceea ce el numește continuu, noi numim „dens peste tot". Dar marele merit al lui Khayyam este însăși ideea de a folosi însușirile mărimilor continue pentru fundamentarea teoremei despre cea de-a patra proporțională [1].

Demonstrînd echivalența ambelor teorii, Khayyam se poate folosi de proprietățile proporțiilor, demonstrate în cartea a V-a a *Elementelor*. Dar în teoria antică a rapoartelor exista o lacună esențială. În multe texte ale *Elementelor* (cartea a VI-a) există o definiție (a cincea) care glăsuiește că, „un raport se compune din rapoarte, cînd cantitățile acestor rapoarte, înmulțite între ele, formează ceva" [33 a, I, p. 174][2]. Indiscutabil că această definiție este o completare posterioară, deoarece nu se explică ce înseamnă „cantitatea raportului" și Euclid nu mai vorbește nicăieri despre înmulțirea unor asemenea cantități. Totuși, în *Elemente* se aplică compunerea rapoartelor, ca de pildă, în propoziția 23 din cartea a VI-a, care spune că ariile a două poligoane asemenea se află într-un raport compus al laturilor lor. Euclid mai formulează pe parcurs și propoziția că raportul $\frac{K}{M}$ se compune din rapoartele $\frac{K}{L}$ și $\frac{L}{M}$, iar pentru compunerea rapoartelor $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$ fără termen comun recurge la teorema celui de-al patrulea segment proporțional [11, pp. 402—406; 96 a, pp. 449—453].

Compunerea, sau, cum am zice noi, înmulțirea rapoartelor fusese necesară în calculele trigonometrice și în particular, în teorema lui Menelau cu privire la patrulaterul complet (vezi p. 321). De aceea, editorii de mai tîrziu ai *Elementelor* — poate chiar Teon din Alexandria (în jurul anului 370) — au introdus în cartea a VI-a o definiție străină *Elementelor*: „cantitatea"

---

[1] Grecii cunoșteau însușirea mărimilor continue de a lua toate valorile intermediare între două valori date, iar uneori o exprimau (ca de pildă, același Aristotel) și o foloseau. Dar ei n-au încercat s-o demonstreze și nici n-au formulat-o în lucrările de matematică [133, I—II] — *N.A.*

[2] În cartea a V-a se definesc rapoartele duble, triple și alte rapoarte multiple, formate din mărimi proporționale. Dacă $\frac{A}{B}=\frac{B}{C}$, atunci raportul $\frac{A}{C}$ este dublul (noi am spune pătratul) raportul $\frac{A}{B}$ etc. — *N.A.*

raportului, adică, propriu-zis, valoarea lui numerică, care în matematica greacă de mai tîrziu devine prototipul noțiunii de număr real.

Khayyam subliniază importanța teoriei compunerii rapoartelor în geometrie și astronomie și prezintă o fundamentare a acestei teorii. Cu ajutorul propozițiilor precedente, el demonstrează două însușiri ale rapoartelor compuse.

1. Pentru trei mărimi omogene A, B, C, raportul $\frac{A}{C}$ este compus din rapoartele $\frac{A}{B}$ și $\frac{B}{C}$.

2. Pentru patru mărimi omogene A, B, C, D, raportul $\frac{A}{D}$ este compus din rapoartele $\frac{A}{B}$, $\frac{B}{C}$ și $\frac{C}{D}$. Toate acestea se extind ușor, adaugă Khayyam, asupra unui număr mai mare de mărimi.

Raționamentele lui Khayyam pentru deducerea acestor propoziții prezintă un interes deosebit. Deducția în sine nu este ireproșabilă, dar în ea apare o nouă concepție asupra numărului.

Urmîndu-i pe cei antici, Khayyam înțelege prin număr, în sensul propriu-zis al cuvîntului, o reunire de unități indivizibile. Totodată, el pune însă problema legăturii dintre noțiunea de raport și cea de număr. După cuvintele lui Khayyam, aceasta este o problemă de filozofie și geometrii nu analizează dacă „raportul între niște mărimi poate fi în esență un număr sau dacă el este doar însoțit de un număr, sau dacă raportul nu este legat de un număr prin însăși natura lui, ci prin ceva exterior, sau dacă raportul este legat de număr prin natura lui și nu are nevoie de nimic exterior" [132, p. 102]. Lăsînd deoparte latura „filozofică" a chestiunii, Khayyam consideră că în matematică este necesar să se introducă o unitate divizibilă și o nouă categorie de numere, care să corespundă oricăror rapoarte între mărimi. În demonstrația primei proprietăți a rapoartelor compuse, el alege o unitate oarecare și presupune că raportul ei față de o mărime auxiliară G este egal cu raportul dintre A și B. El spune că această mărime G noi „nu o vom privi ca o linie, o suprafață, un corp sau timp, ci o vom considera ca o mărime abstractizată prin rațiune față de toate acestea și făcînd parte din numere, dar nu din numere absolute și adevărate, fiindcă raportul dintre A și B poate adesea să nu fie numeric, adică să nu se poată găsi două numere, al căror raport să fie egal cu acest raport" [132,

p. 105]. Aşa fac de pildă, explică Khayyam, calculatorii şi topometrii care vorbesc despre o jumătate sau o altă fracţiune de unitate pe care o presupun divizibilă, sau despre rădăcina din cinci, zece etc. Unitatea aleasă este de asemenea divizibilă şi „mărimea *G* fiind o mărime arbitrară este privită ca număr în sensul pe care l-am indicat" [132, p. 106].

Astfel, Khayyam opune concepţiei antice, îndeosebi aristotelice, propria sa concepţie despre număr. Orice rapoarte se exprimă acum prin numere, fie prin numere în sensul propriu-zis, fie prin „elemente improprii" domeniului numerelor — adică prin numere iraţionale. Compunerea rapoartelor se reduce acum la înmulţirea numerelor, iar rapoartele capătă în deplină măsură funcţia de măsurare a oricăror mărimi.

Concepţia expusă nu este unica în ştiinţa arabă. Contemporanul lui Khayyam, Abu Abdalla Muhammed ibn Iusuf al-Djaiani, care a trăit la Sevilla la sfîrşitul secolului al XI-lea, a susţinut teoria lui Euclid [130].

Dar concepţiile criticilor teoriei antice răspund mai mult la necesităţile matematicii calculatorii. Aproximativ peste o sută cincizeci de ani — verigile intermediare sînt încă aproape necunoscute (vezi p. 284) — ideile lui Khayyam capătă o dezvoltare în *Expunerea lui Euclid* şi în lucrarea de trigonometrie *Tratat despre patrulaterul complet*, ambele aparţinînd lui Nasireddin at-Tusi. În cursul său de trigonometrie, Nasireddin expune şi mai amănunţit teoria rapoartelor compuse, demonstrînd proprietatea de translaţie la înmulţire. După Nasireddin, fiecar raport are „cantitatea" lui.

În teoreme, compunerea rapoartelor se înlocuieşte prin înmulţirea cantităţilor lor. Nasireddin impune şi mai pregnant ideea că fiecare raport „poate fi numit număr măsurabil printr-o unitate, la fel după cum termenul precedent al unui raport este măsurat de termenul următor" [169, p. 22]. Ca un rezultat al acestui fapt toate rapoartele între liniile trigonometrice devin nişte numere ce se pot exprima aproximativ prin fracţii.

Chinezii şi indienii au introdus numerele negative, iar matematicienii ţărilor din Orientul Apropiat şi Mijlociu ajung la noţiunea de număr real, care cuprinde atît numerele raţionale cît şi pe cele iraţionale pozitive. Această realizare teoretică remarcabilă, obţinută pe baza practicii calculatorii, devine cunoscută în Europa în jurul anului 1600, prin editarea la Roma a uneia din variantele operei lui Nasireddin at-Tusi *Expunerea lui Euclid* (vezi p. 302).

În secolul al XVII-lea, Gregorius a Sancto-Vicentio elaborează teoria „numitorilor cantitativi ai rapoartelor“, corespunzători „cantităţilor rapoartelor“ precursorilor săi. A. Taquet, de pe poziţii apropiate de Khayyam, îl critică și îl „corijează“ pe Euclid. R. Descartes leagă teoria generală antică a rapoartelor cu aritmetica, și în fine I. Newton definește numărul nu ca o reunire de unităţi, ci ca un raport abstract între o mărime oarecare și o altă mărime de același gen, luată ca unitate.

Dezvoltarea noțiunii de număr în Europa se bazează desigur în primul rînd pe înflorirea vertiginoasă a matematicii calculatorii și merge pe căile sale proprii. Încă la sfîrșitul secolului al XVI-lea, S. Stevin se pronunţă cu hotărîre pentru recunoașterea ca atare a numerelor iraţionale; el se ridică împotriva obiceiului de a le numi iraţionale sau inexprimabile, fiindcă în realitate ele sînt numai incomensurabile. Ar fi interesant de lămurit dacă a existat vreo legătură directă între teoria rapoartelor din secolul al XVII-lea și ideile literaturii matematice arabe.

În extinderea noțiunii de număr pînă la cea de număr real, o importanță imensă o are includerea numerelor negative. Matematicienii ţărilor Orientului Apropiat și Mijlociu n-au preluat această formă a numerelor de la indieni și abia de curînd s-a descoperit un caz de folosire a numerelor negative [134] în cartea lui Abu-l-Vafa pentru grămătici. Abu-l-Vafa formulează regula înmulţirii reduse a două numere de cîte două cifre cu același număr de zeci

$$(10a + b)(10a + c) = [10a + b - \{10(a + 1) - (10a + c)\}] + \\ + [10(a + 1) - (10a + b)] \cdot [10(a + 1) - (10a + c)]$$

şi tot aici o extinde asupra înmulţirii numerelor de două cifre. În exemplul de mai sus, $a = 0$, $b = 3$, $c = 5$ și el spune: „...dacă vrem să-l înmulțim pe trei prin cinci, scădem prisosul lui zece faţă de unul din aceste numere din celălalt și se obţine datoria doi. Luăm fiecare unitate drept-zece, iar apoi înmulțim prisosul lui zece faţă de cinci, cu prisosul lui zece faţă de trei și obţinem treizeci și cinci. Cînd scădem din ele datoria, adică douăzeci, la rest vor rămîne cincisprezece și acesta este rezultatul înmulţirii lui trei prin cinci [134, p. 596] [1].

Aici, la fel ca și în alte cazuri cunoscute, numerele negative s-au introdus din tendința de a asigura aplicabilitatea generală a unei reguli oarecare de calcul, stabilită inițial pentru o clasă

[1] Prin cuvîntul datorie s-a tradus ad-litteram cuvîntul arab *dain* — *N.A.*

mai restrînsă de probleme. În literatura arabă nu se cunosc alte exemple de întrebuințare a numerelor negative. Legat de aceasta, trebuie să observăm că într-un manuscris latin reprezentînd o traducere sau o prelucrare a unui manual arab, apropiat de algebra lui al-Horezmi, se întîlnește notația mărimilor ce se scad printr-un punct așezat dedesubtul lor [21, I, pp. 803—804].

Atît această notație cît și scăderea unui număr mai mare din altul mai mic găsite la Abu-l-Vafa pot fi un rezultat al studiului literaturii indiene.

Probleme de geometrie și ecuații de gradul al treilea. Să trecem acum la algebră. În operele lui al-Horezmi, Abu Kamil și al-Karadji teoria ecuațiilor nu depășește studiul ecuațiilor liniare și de gradul al doilea, și cel mult, al ecuațiilor de gradul al doilea în raport cu o putere a mărimii necunoscute. Dar încă în secolul al IX-lea, matematicienii din Bagdad, iar după ei și alții, încep o serie de lucrări privind ecuațiile de gradul al treilea, care au condus la descoperiri remarcabile. Ca imbold pentru aceste lucrări servește studiul problemei lui Arhimede despre secționarea sferei printr-un plan, astfel încît volumele celor două segmente formate să se afle într-un raport dat (propoziția 4 din cartea a II-a *Despre sferă și cilindru*). Comentatorul lui Arhimede, bizantinul Eutokios (în jurul anului 500), prezintă o soluție geometrică (aparținînd probabil chiar lui Arhimede) a acestei probleme, soluție obținută cu ajutorul unei parabole și al unei hiperbole echilaterale deplasate. După cum arată același Eutokios, Dionisodor, probabil un contemporan a lui Apolloniu, rezolvă problema lui Arhimede cu ajutorul unei parabole deplasate, simetrică față de axa absciselor și o hiperbolă ale cărei asimptote sînt axele de coordonate. Diocles, care trăise în secolul al II-lea î.e.n. dă o construcție pentru problema lui Arhimede generalizată oarecum, privind împărțirea unui segment cu ajutorul unei elipse și al unei hiperbole; problema lui Diocles nu se mai exprimă printr-o ecuație cu trei termeni, ci printr-o ecuație completă de gradul al treilea [135, pp. 287—291].

Problemele despre duplicarea cubului și împărțirea sferei sînt singurele pe care grecii, în felul lor, le reduc la rezolvări de ecuații de gradul al treilea; Arhimede vorbește, de fapt, despre proporția $(a—x) : b = c^2 : x^2$, exprimînd-o în cuvinte. Ei n-au readus la o ecuație de gradul al treilea nici chiar problema trisecțiunii unghiului, pe care o rezolvau cu ajutorul unor curbe, diferite de secțiunile conice. Grecii creaseră o metodă geometrică pentru

construirea rădăcinilor ecuațiilor de gradul al treilea, dar n-o aplicaseră la un cerc mai larg de probleme și cu atît mai puțin, la elaborarea teoriei generale a unor asemenea ecuații. Acest lucru a fost realizat în țările Islamului.

Probabil că primul care se ocupă de problema lui Arhimede este al-Mahani; conform unei mărturii, el încercase s-o rezolve cu ajutorul algebrei, exprimînd-o prin „egalitatea cubului și a numărului cu pătratele". Totuși, al-Mahani nu reușește să construiască ecuația. Cercetări încununate de succes se fac ceva mai tîrziu și ele se extind rapid asupra unui cerc mare de probleme de matematică și chiar de fizică, care conduc la ecuații de gradul al treilea cu coeficienții generali sau numerici. Abu Djafar al-Hazin (decedat între anii 961 și 971) din Horasan, autorul comentariilor la cartea a X-a a *Elementelor* lui Euclid și al altor opere de matematică și astronomie, dă o rezolvare a problemei lui Arhimede cu ajutorul secțiunilor conice.

Aproape în aceeași perioadă de timp, Abu Ali al-Hasan ibn al-Haisam, născut la Basra în Irak și care lucrează la Cairo (născut în jurul anului 965, decedat în jurul anului 1039), rezolvă problema lui Arhimede cu ajutorul parabolei și al hiperbolei. Ibn al-Haisam, denumit în Europa occidentală Alhazen, fusese matematician, astronom, fizician și medic. Lucrarea lui, *Cartea opticii (Kitab al-manazir)*, conținînd descoperiri importante în fiziologia vederii și în teoria reflexiei și refracției, a fost tradusă în limba latină și a avut o mare influență asupra dezvoltării opticii în Europa medievală. În această operă, el analizează în particular determinarea locului de reflexie a unui punct luminos într-o oglindă cilindrică circulară după pozițiile date ale ochiului și ale punctului. Chestiunea se reduce la problema următoare: fiind date într-un plan un cerc și două puncte exterioare, să se determine un asemenea punct al circumferinței, încît dreptele ce-l unesc cu punctele date să formeze unghiuri egale cu raza ce trece prin el. Această problemă se poate exprima printr-o ecuație de gradul al patrulea; ibn al-Haisam o rezolvă cu ajutorul intersecției unei circumferințe și unei hiperbole. De „problema lui Alhazen" s-au ocupat, în secolul al XVII-lea, C. Huygens, I. Barrow și alții [136]. Ibn Haisam dă și osoluție mecanică elegantă a problemei lui Arhimede: nu ne vom opri asupra ei, pentru că ea nu se încadrează în orientarea generală.

Abu-s-Sahl Baidjan ibn Rustam al-Kuhi din Kuha în Tabaristan (la sud de Marea Caspică), care lucrează la Bagdad la sfîrșitul secolului al X-lea, pune și rezolvă o problemă nouă. Se

cere să se construiască un segment de sferă, egal ca volum cu un segment dat și ca suprafață — cu un alt segment dat. Dacă vom însemna prin x raza sferei căutate, y — înălțimea segmentului, iar prin a și b — volumul și suprafața dată, atunci din condițiile:

$$\frac{\pi}{3} y^2(3x - y) = a, \qquad 2\pi xy = b$$

și înlocuind $\frac{a}{b} = a'$, $\frac{b}{\pi} = b'$, se obțin ecuațiile:

$$y^3 + 3a'b' = \frac{3}{2} b'y \tag{1}$$

și:

$$x^3 + \frac{b'^2}{24a'} = \frac{b'}{4a'} x^2 \tag{2}$$

Al-Kuhi dă construcția rădăcinilor ambelor ecuații cu ajutorul parabolei

$$y^2 = \left(\frac{b'}{2a'} - 2x\right) 3a'$$

și al hiperbolei

$$xy = \frac{b'}{2},$$

și studiază în spirit riguros antic condițiile de posibilitate ale problemei. Al-Kuhi prezintă de asemenea și o analiză completă a problemelor lui Arhimede.

Mereu alte probleme noi se reduc la ecuații de gradul al treilea. Așa, de pildă, se exprimă sub forma unor rădăcini de ecuații de gradul al treilea, laturile cîtorva poligoane regulate, fapt care prezintă interes atît pentru măsurătorile geometrice, cît și pentru întocmirea tabelelor de coarde sau sinusuri. Al-Biruni reduce determinarea laturii nonagonului la o ecuație de gradul al treilea, cu ajutorul a două construcții extrem de ingenioase. Într-una din ele, alegînd într-un mod convenabil unitatea de măsură, ajunge la următoarea ecuație:

$$x^3 = 1 + 3x.$$

Cea de-a doua construcție a lui al-Biruni, dată de altfel și de contemporanul său Abu-l-Djud Muhamed ibn Leis, se poate prezenta succint în felul următor. Să admitem că într-o circumferință de rază egală cu unitatea, unghiul la centru AHB este de 20° (fig. 60). Coarda $AB = x$ este în acest caz latura unui poligon regulat înscris cu 18 laturi. Între laturile unghiului AH și HB să înscriem (se poate face aceasta) o linie frîntă $ACDG$, ale cărei părți componente sînt egale cu $AB = x$; pe AH coborîm perpendiculara GT, iar pe BH — perpendiculara AR.

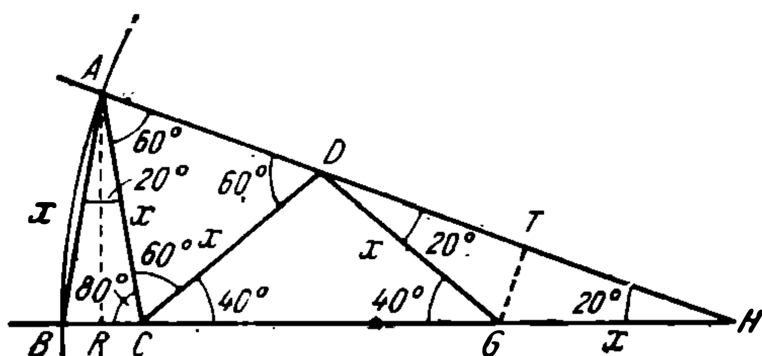


Fig. 60

Din asemănarea triunghiurilor BAC și AHB avem

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{AH}, \text{ adică } BC = x^2,$$

iar din asemănarea triunghiurilor ARH și GTH:

$$\frac{HR}{AH} = \frac{HT}{GH}, \text{ adică } \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) : 1 = \frac{1 - x}{2} : x.$$

sau

$$x^3 + 1 = 3x$$

După ce se calculează latura poligonului cu 18 laturi, cea a nonagonului se află extrăgînd rădăcina pătrată.

Tabit ibn Korra aduce la cunoștința învățaților arabi opera lui Arhimede despre septagonul regulat (textul grecesc nu se cunoaște nici pînă-n prezent), unde latura se construiește prin intermediul unui adaos, care se poate realiza cu ajutorul secțiunilor conice. O construcție similară o făcuse al-Kuhi; de altfel, în literatura arabă nu găsim reducerea acestei probleme la o ecuație [1]. Abu-l-Djud reușește să construiască ecuația:

$$x^3 + 13\frac{1}{2}x + 5 = 10x^2, \qquad (3)$$

[1] Alegînd într-un mod convenabil unitatea de măsură, ecuația respectivă are forma:

$$x^3 + 1 = x^2 + 2x \qquad \text{— N.A.}$$

pe care al-Kuhi nu reuşise s-o obţină. Ecuaţia (3) exprimă o problemă aritmetică de genul celor întîlnite la al-Horezmi şi Abu Kamil: se cere să se împartă numărul 10 în două părţi, astfel încît suma pătratelor lor şi cîtul rezultat din împărţirea părţii mari la cea mică să fie egale cu 72. Rădăcina întreagă a acestei ecuaţii este evident egală cu 2, dar cealaltă soluţie: $4 + \frac{1}{2}\sqrt{74}$ cu greu ar fi putut fi descoperită în acele vremuri, fiindcă atunci nu se cunoştea încă procedeul de micşorare a gradului unei ecuaţii, dacă o rădăcină e cunoscută. În sfîrşit, se obţine şi ecuaţia trisecţiunii unui unghi, despre care vom vorbi mai departe [137, p. 96 şi următoarele].

Abundenţa şi importanţa problemelor reduse la ecuaţii de gradul al treilea de diferite forme pun problema elaborării unei teorii mai generale pe de o parte, iar pe de altă parte impun crearea unor metode de rezolvare numerică. Se pare că Abu-l-Djud întreprinde una dintre primele încercări de a elabora o teorie generală a ecuaţiilor de gradul al treilea, folosind metode antice geometrice. Lucrarea lui Abu-l-Djud, despre care aminteşte Ommar Khayyam, nu s-a păstrat. În schimb, a ajuns pînă la noi tratatul de algebră al lui Khayyam, una dintre cele mai de seamă realizări ale ştiinţei arabe.

Teoria geometrică a lui Ommar Khayyam despre ecuaţiile de gradul al treilea. Abu-l-Fath Ommar ibn Ibrahim al-Khayyam s-a născut în anul 1048, în oraşul Nişapur din Horasan. Tulburările politice îl silesc să peregrineze timp îndelungat. El se salvează de nişte duşmani, pe care nu-i cunoaştem, fugind la Samarkand; lucrează şi la Merv, Ispahan, Rei şi în alte oraşe din Asia centrală şi Iran. În jurul anului 1074, Khayyam scrie cartea *Despre demonstraţiile problemelor de algebră şi almukabala (Risala fi-l barahin ala masail al-djabr va-l mukabala)* [132], iar în anul 1077 — comentariile *Elementelor* despre care am amintit. Am mai arătat că Ommar Khayyam a scris un tratat, nedescoperit încă, despre extragerea rădăcinilor pătrate.

În 1074, Khayyam este invitat la curtea sultanului seldgeucid Djalaleddin Malikşah, unde e protejat atît de sultan, cît şi de vizirul cu vederi înaintate, Nizam al-Mulk, şi este pus să conducă Observatorul din Ispahan. Aici se întocmesc tabele astronomice mai exacte şi se pregăteşte reforma calendarului, care n-a-junse să fie tradusă în viaţă din cauza asasinării lui Nizam al-Mulk şi a morţii lui Malikşah (1092). După aceste evenimente



Fig. 61. Obeliscul de pe mormîntul lui Ommar Khayyam la Nişapur (ridicat în 1934).

se închise şi observatorul. Aprecierile asupra calendarului lui Khayyam sînt contradictorii în literatura tîrzie arabă, dar toate stau mărturie asupra exactităţii lui: o eroare de o zi se acumulează abia în 3 770 sau 5 000 de ani.

Contemporanii îl apreciază foarte mult pe Khayyam ca om de ştiinţă, dar o slavă şi mai mare îi aduc vestitele ***Rubayate*** — catrene, în care el cîntă iubirea şi libertatea, deplînge viaţa trecătoare şi imperfectă de pe pămînt şi ia în derîdere religia oficială. ***Rubayatele*** lui Khayyam sînt o operă clasică a poeziei persano-tadjice, care prin traduceri în limbile europene capătă în secolele al XIX-lea şi al XX-lea o mare faimă în toată lumea. După moartea protectorilor săi, libertatea lui de gîndire atrage prigoana, şi la bătrîneţe este silit să facă un pelerinaj la Mekka. Ommar Khayyam moare în oraşul său natal, în anul 1123 [138, 139].

Algebra şi aritmetica se defineau înainte ca ştiinţa despre găsirea necunoscutelor după legăturile lor cu unele mărimi cunoscute.

Nu se făcea o delimitare strictă între algebră și aritmetică. În tratatul său de algebră, Khayyam analizează doar rezolvarea ecuațiilor algebrice și explică în ce constă această știință. „Rezolvările algebrice, scrie el, se efectuează cu ajutorul ecuației, adică, după cum prea bine se știe, prin egalarea unor puteri cu altele" [132, p. 18]. Cu alte cuvinte, algebra este știința rezolvării unor egalități între polinoame întregi. Necunoscutele căutate pot fi numere absolute, adică întregi, precum și mărimi continue, cum sînt: linia, suprafața, corpul și timpul, după cum afirmă autorul, urmîndu-l pe Aristotel. Nu se obișnuiește ca timpul să constituie obiectul problemelor algebrice, dar se poate totuși admite și aceasta. În conformitate cu deosebirea dintre necunoscutele întregi și cele continui, algebra are nevoie atît de soluții numerice ale ecuațiilor, cît și de reprezentarea lor geometrică. Cînd ecuațiile conțin numere, obiecte sau laturi și pătrate, soluția numerică rezultă dintr-una geometrică, care se poate fundamenta cu ajutorul *Elementelor* sau a *Datelor* lui Euclid. Dar pentru ecuații conținînd și cuburi care nu se pot reduce la pătrate (cum am spune noi, împărțind prin prima putere a necunoscutei), rezolvarea este posibilă numai cu ajutorul secțiunilor conice și, în acest caz, trebuie să ne bazăm pe primele două cărți ale lucrării lui Apoloniu. După cîte se știe, aceasta este prima indicație că ecuațiile de gradul al treilea nu se pot rezolva, în general vorbind, cu ajutorul compasului (și al riglei). În anul 1637, R. Descartes afirmă din nou acest lucru, iar cu 200 de ani mai tîrziu (1837), P. L. Vantzel îl demonstrează.

Khayyam pune problema rezolvării numerice a ecuației de gradul al treilea într-un mod asemănător cu rezolvarea ecuațiilor de gradul al doilea, dar recunoaște că toate eforturile făcute în acest sens au rămas zadarnice:

„Demonstrarea acestor forme în cazul în care obiectul problemei este un număr absolut nu-i posibilă nici pentru noi și nici pentru aceia care stăpînesc această artă. Poate cineva din cei care vor veni după noi o va afla..." [1] [132, p. 19]. Rezolvarea prin radicali a ecuațiilor de gradul al treilea o găsesc în secolul al XVI-lea matematicienii italieni S. del Ferro și N. Tartaglia.

Conținutul cel mai important al algebrei lui Khayyam îl constituie clasificarea ecuațiilor, construcția geometrică a rădăcinilor

[1] Pentru ecuația numerică $x^3 = a$, Khayyam cunoaște desigur soluția exactă în cazul unui cub întreg, dar această soluție, după cum spune el, se bazează pe alegere și nu pe o „lege a artei" [132, p. 22].

și determinarea numărului și a limitelor soluțiilor pozitive. Ecuațiile se analizează sub formă generală, adică cu coeficienți pozitivi arbitrari, dar sînt exprimate în cuvinte. La baza clasificării se află gradul ecuației și numărul termenilor existenți în ambele părți ale ecuației. Se obțin în total 25 de forme canonice, din care șase fuseseră studiate încă de al-Horezmi, cinci se reduc la acestea prin împărțire prin necunoscută, iar 14 se rezolvă cu ajutorul secțiunilor conice. Aceste 14 forme se împart astfel: 1) una cu doi termeni, 2) șase cu trei termeni, 3) șapte cu patru termeni, împărțite la rîndul lor în două clase: într-una — trei termeni egali cu un termen, iar în cealaltă — doi termeni egali cu alți doi termeni. În clasificare intră doar ecuațiile ce pot avea soluții pozitive.

Rezolvarea ecuațiilor de gradul al doilea nu conține nimic nou și de aceea vom trece la ecuațiile de gradul al treilea.

Urmîndu-i pe antici, Khayyam respectă cu strictețe principiul omogenității. El previne, de pildă, că vorbind despre egalitatea dintre un număr și o suprafață, prin număr înțelege un dreptunghi, una din laturile căruia este o unitate, iar cealaltă se ia într-un mod corespunzător. Tot așa, prin numărul unui corp el înțelege un paralelipiped drept, cu baza căruia un pătrat cu latura egală cu unitatea, iar înălțimea corpului față de latură stă în același raport în care se află numărul față de unitate. Înainte de a realiza reprezentarea, fiecare ecuație se aduce la una din forme, ca de pildă, ecuația

$$x^3 + a x = b \tag{1}$$

se aduce la forma

$$x^3 + p^2x = p^2q. \tag{1'}$$

O asemenea transformare se bazează pe teoreme speciale de geometrie elementară.

Khayyam dă mai întîi reprezentarea rădăcinii unei ecuații de gradul al treilea cu doi termeni folosind două parabole. Apoi, rezolvă ecuația (1) sau (1′) cu ajutorul circumferinței

$$x^2 + y^2 = qx$$

și al parabolei

$$x^2 = py$$

(vezi fig. 62, unde sensul pozitiv al axei absciselor este spre stînga, iar al axei ordonatelor — în jos) [1]. Abscisa punctului de intersecție diferit de originea acestor curbe satisface ecuația dată. Khayyam demonstrează acest lucru cu ajutorul unor proporții exprimate prin cuvinte. El spune că după proprietățile parabolei $\frac{p}{x} = \frac{x}{y}$, iar după cele ale cercului

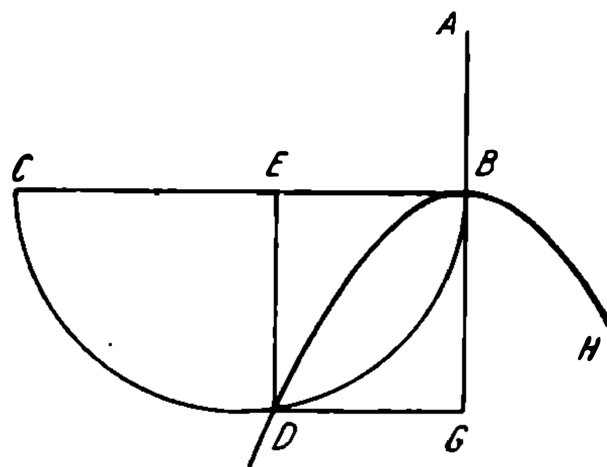


Fig. 62

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{q - x},$$

atunci

$$\frac{p^2}{x^2} = \frac{x}{q - x}$$

și

$$p^2 (q - x) = x^3.$$

Adăugînd la ambele părți p^2x, Khayyam obține:

$$x^3 + p^2x = p^2q.$$

Khayyam conchide că la această formă nu există varietate mare de cazuri și probleme imposibile, adică ecuația (1) are totdeauna o singură rădăcină pozitivă. Acest lucru rezultă clar din construcție.

Reprezentarea rădăcinilor formei următoare de ecuație

$$x^3 + a = bx \qquad (2)$$

(pentru simplitate, în cele ce urmează nu vom păstra omogenitate în scriere) prezintă un interes deosebit. Khayyam rezolvă această ecuație cu ajutorul parabolei

$$x^2 = \sqrt{b}y$$

și cu ramura stîngă a hiperbolei echilatere

$$x^2 - \frac{a}{b}x = y^2.$$

[1] Khayyam desenează numai acele părți ale curbelor care sînt necesare pentru reprezentarea rădăcinii pozitive.

Aici, spune Khayyam, există o varietate mare de cazuri și printre probleme există unele imposibile. Într-adevăr, se poate întîmpla ca aceste curbe să nu se intersecteze (ramura dreaptă ce trece prin vîrful parabolei și se mai intersectează cu ea încă într-un punct nu se ia în considerare: rădăcina respectivă fiind negativă) și atunci problema nu este posibilă (ecuația are o rădăcină negativă și două imaginare). Dar curbele pot fi tangente într-un punct sau se pot intersecta în două puncte. În primul caz, ecuația (2) are o soluție [1], iar în al doilea — are două. În acest fel, Khayyam stabilește că ecuația de gradul al treilea poate avea două rădăcini; mai departe se mai întîlnesc și alte cîteva cazuri similare.

Prezentăm și analiza ecuației

$$x^3 + a = cx^2 \qquad (3)$$

întîlnită în problema lui Arhimede. Rădăcinile se determină cu ajutorul parabolei

$$y^2 = \sqrt[3]{a}(c - x)$$

și al hiperbolei

$$xy = \sqrt[3]{a^2}.$$

După Khayyam, ecuația poate avea una sau două rădăcini pozitive, corespunzător cazului de intersecție sau tangență a

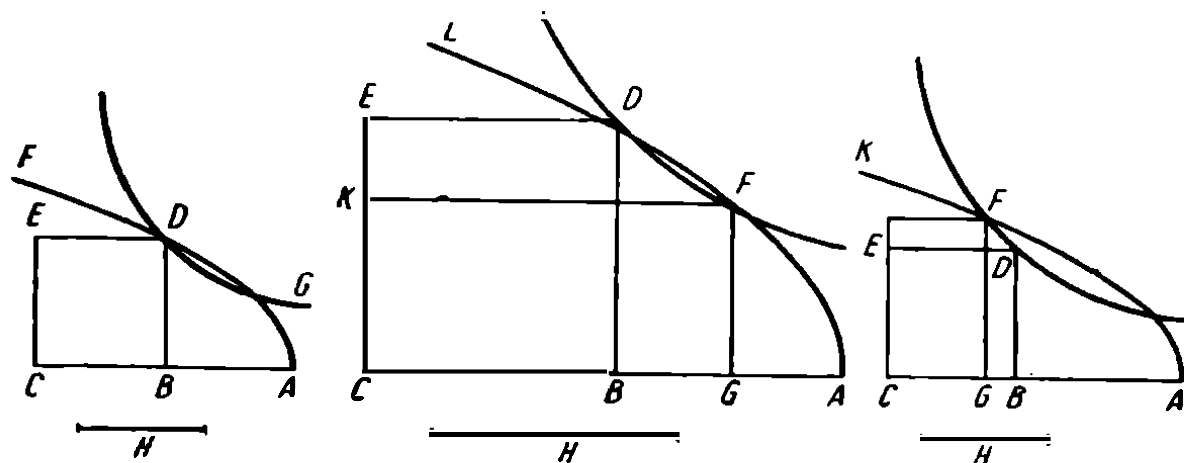


Fig. 63

ramurilor parabolei și hiperbolei, dar poate să și nu aibă soluții cînd aceste ramuri nu se întîlnesc (vezi fig. 63, unde $AC = c$, $H = \sqrt[3]{a}$, $BC = H$ și $AB = c - \sqrt[3]{a}$). Khayyam stabilește tot-

[1] Noțiunea de rădăcină dublă apare de abia în secolul al XVII-lea — *N.A.*

odată unele limite ale rădăcinilor. El arată în primul rînd că pentru $\sqrt[3]{a} \geqslant c$ nu există soluție, fiindcă atunci pentru $x = \sqrt[3]{a}$ vom avea $cx^2 \leqslant a$, pentru $x < \sqrt[3]{a}$ vom avea $cx^2 < a$, iar pentru $x > \sqrt[3]{a}$ ar urma $x^3 > cx^2$, ceea ce contrazice ecuația dată. Mai departe, el analizează cazurile $\sqrt[3]{a} \gtreqless \frac{c}{2}$, comparînd ordonatele punctelor parabolei și ale hiperbolei (BD) pentru $x = c - \sqrt[3]{a}$. 1) Dacă $\sqrt[3]{a} = \frac{c}{2}$, atunci ambele ordonate ale curbelor sînt egale cu $\sqrt[3]{a}$ și, după cum e ușor de văzut, mai există o intersecție, așa încît se obțin două soluții. 2) Dacă $\sqrt[3]{a} > \frac{c}{2}$ atunci $x = c - \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{a}$ și ordonata hiperbolei $\frac{\sqrt[3]{a}}{c - \sqrt[3]{a}}$ este mai mare decît ordonata $\sqrt[3]{a}$ a parabolei. Spre dreapta de BD, curbele pot să nu se întîlnească, dar se pot și intersecta sau pot fi tangente; în mod corespunzător problema nu este posibilă sau are una sau două soluții mai mici decît $c - \sqrt[3]{a}$. 3) În sfîrșit, dacă $\sqrt[3]{a} < \frac{c}{2}$, atunci punctul D al hiperbolei se află în interiorul parabolei și există două intersecții, adică două soluții.

Analiza destul de amănunțită întreprinsă de Khayyam nu este totuși completă. Încă Arhimede, iar mai tîrziu al-Kuhi, stabiliseră că limita rădăcinilor pozitive este determinată de condiția $a \leqslant \frac{4c^3}{27}$, în timp ce Khayyam arată că pentru $a \leqslant \frac{c^3}{8} = \frac{3\,\frac{3}{8}c^3}{27}$ există numai două rădăcini, pentru $a > \frac{3\,\frac{3}{8}c^3}{27}$ pot exista două, una sau nici una, iar pentru $a \geqslant c^3$ nu există rădăcină.

Analizînd ecuația lui Arhimede, Khayyam observă că Abu-l-Djud comisese o eroare, presupunînd că pentru $\sqrt[3]{a} = \frac{c}{2}$ curbele sînt tangente, iar pentru $\sqrt[3]{a} > \frac{c}{2}$ ele nu se întîlnesc. Această eroare, Khayyam o contrazice pe exemplul numeric al ecuației:

$$x^3 + 144 = 10x^2.$$

În cazul de față, $\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{144} > 5 = \frac{c}{2}$. Totuși curbele

$$y^2 = \sqrt[3]{144}\,(10 - x)$$

și

$$xy = \sqrt[3]{144^2}$$

se întîlnesc cînd $x = 6$ (rădăcina $2 + 2\sqrt{7}$ nu se indică). Într-un alt exemplu, înrudit cu precedentul, însuși Khayyam comite o greșeală. Dorind să prezinte cazul cînd pentru un $\sqrt[3]{a}$ ceva mai mare decît $\frac{c}{2}$ curbele nu se intersectează, el analizează ecuația:

$$x^3 + 41^3 = 80\ x^2.$$

Pentru abscisele $x_1 = \sqrt[3]{a} = 41$ și $x_2 = \sqrt[3]{a} + \frac{3}{4}(c - \sqrt[3]{a}) =$ $= 41 + \frac{3}{4} \cdot 39$, ordonatele parabolei sînt respectiv mai mici decît ordonatele hiperbolei și Khayyam trage concluzia că cele două curbe nu se intersectează. În realitate, curbele se intersectează de două ori între aceste puncte; acest lucru rezultă chiar din faptul că pentru valoarea intermediară $x_3 = \frac{11}{10} \cdot 41$, ordonata hiperbolei este mai mică decît ordonata parabolei. Khayyam ar fi trebuit să ia un termen liber ceva mai mare să zicem 43^3.

Aceste două exemple sînt foarte semnificative: ele arată că teoria generală geometrică de separare a rădăcinilor se aplică la ecuații cu coeficienți numerici. În completare la tratatul unde se analizează cele două exemple, Khayyam spune că, respectînd cît mai mult plenitudinea analizei, el s-a străduit să fie cît mai succint și de aceea n-a mai adăugat exemple numerice pentru fiecare formă și cazurile ei. El „s-a limitat la expunerea regulelor generale, avînd încredere în mintea celui care învață, fiindcă acela care înțelege bine acest tratat nu va fi oprit de exemple particulare și de alegerea lor“ [132, p. 63].

Printre lacune, cea mai regretabilă este analiza incompletă a ecuației:

$$x^3 + bx = cx^2 + a, \qquad (4)$$

pentru a cărei construcție servește cercul:

$$y^2 = \left(x - \frac{a}{b}\right)(c - x)$$

și hiperbola:

$$x(\sqrt{b}-y)=\frac{a}{\sqrt{b}}.$$

Khayyam arată just că ecuația are totdeauna o rădăcină — abscisa punctului K (fig. 64, unde $BC = c$, $BD = \sqrt{b}$, $S = AB = \frac{a}{b}$) și că pentru $\frac{a}{b} \geqslant c$, această rădăcină este unică[1]. Totuși

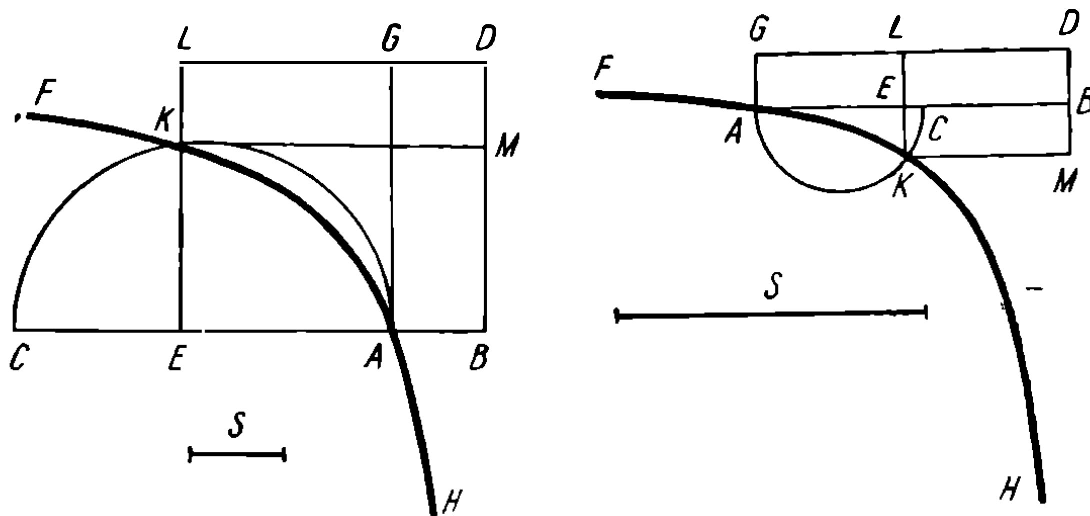


Fig. 64

el n-a observat că pentru $\frac{a}{b} < c$ mai pot exista și alte două rădăcini pozitive. Astfel, Khayyam trece pe lîngă descoperirea celor trei rădăcini ale ecuației de gradul al treilea, pe care le descoperă abia G. Cardano la mijlocul secolului al XVI-lea. De altfel, pe desenul lui Khayyam nu-i ușor de observat că mai pot exista încă două puncte de intersecție între A și K.

Analizînd 25 de forme de ecuații, Khayyam studiază ecuații care conțin puterile inverse ale necunoscutei și se reduc la cele precedente. În privința ecuației

$$x^2 = a\frac{1}{x^3},$$

el spune că construcția ei se reduce la determinarea a patru medii proporționale între 1 și a și a fost dată de ibn al-Haisam, dar

[1] Abscisa punctului A, adică $x = \frac{a}{b}$, nu satisface ecuația (4): ecuațiile curbelor, după eliminarea lui y, dau o ecuație auxiliară de gradul al patrulea, cu o rădăcină suplimentară $\frac{a}{b}$ — *N.A.*

este prea complicată pentru a fi prezentată în cartea respectivă. În legătură cu ecuația de gradul al patrulea

$$x^2 + 2x = 2 + 2 \cdot \frac{1}{x^2}$$

Khayyam observă că nu se cunoaşte un procedeu pentru rezolvarea ei.

Matematicienii din țările Islamului se ocupă şi după Khayyam de teoria geometrică a ecuațiilor de grade superioare. Într-un manuscris anonim există o construcție pentru o problemă care se reduce la o ecuație de gradul al patrulea, arătîndu-se că, un timp oarecare, specialiștii în geometrie și cei în algebră își propuseseră reciproc, unii altora, această problemă fără să găsească o soluție. Anume, se cere să se construiască un trapez $ABCD$, avînd $AB = AD = BC = 10$, iar aria egală cu 90. Dacă presupunem problema rezolvată (fig. 65) și coborîm perpendiculara AK pe prelungirea laturii CD, iar ca necunoscută luăm $DK = z$, atunci

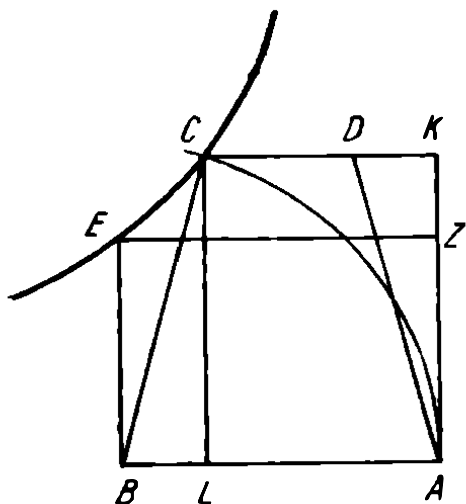


Fig. 65

$$z^4 + 2000\, z = 20\, z^3 + 1900.$$

Să ducem $BE = \frac{9}{10} AB$ perpendiculară pe AB, iar prin E să trasăm hiperbola

$$(10 - x)\, y = 90$$

(unde BA este axa absciselor, iar BE — axa ordonatelor), iar din B ca centru, circumferința

$$x^2 + y^2 = 10^2.$$

Abscisa punctului de intersecție C a celor două curbe este rădăcina ecuației, iar restul construcției este evident [132, pp. 138—139].

Din *Cheia aritmeticii* lui al-Kaşi aflăm că o operă despre cele 19 tipuri de ecuații, în afară de cele șase în general cunoscute (adică de tipurile analizate anterior de Ommar Khayyam), a scris Şarafeddin al Mas'udi, matematician care lucrase la Tusa

în secolele al XII-lea — al XIII-lea și fusese unul dintre profesorii lui Nasireddin at-Tusi. E greu să ne închipuim că atît al-Mas'udi cît și elevul său n-ar fi cunoscut lucrările lui Khayyam. Al-Kași în persoană se ocupase de ecuații de gradul al patrulea și el afirmă că a dat soluția pentru 70 de tipuri de ecuații (în realitate 65), de care nu se ocupaseră nici precursorii și nici contemporanii săi. Al-Kași își exprimă intenția să consacre o carte specială acestei probleme; nu se știe dacă și-a îndeplinit sau nu intenția [126, p. 192].

În țările mauritane, teoria geometrică a ecuațiilor n-a căpătat răspîndire și arabii apuseni nu s-au ocupat de ea, deși știuseră cîte ceva despre ea. Ibn-Haldun scrie în secolul al XIV-lea:

„Pînă la noi a ajuns știrea că niște mari învățați din Răsărit au extins numărul ecuațiilor peste aceste șase tipuri, aducîndu-le la peste douăzeci, și că au găsit pentru ele soluții sigure cu ajutorul unor demonstrații geometrice [139, p. 148].

În secolul al XVII-lea, construcția geometrică a rădăcinilor ecuațiilor de grade superioare atrage în mod deosebit atenția matematicienilor europeni. R. Descartes pune la baza matematicii sale universale reprezentarea grafică a rădăcinilor reale ale ecuațiilor algebrice oarecare cu ajutorul unor curbe algebrice, alese într-un mod corespunzător. El dă, în particular, o construcție unitară pentru ecuațiile de gradul trei și patru cu ajutorul parabolei și al cercului. La Descartes de aplicarea construcțiilor geometrice în algebră, este strîns legată dezvoltarea geometriei analitice, ca de pildă, elaborarea clasificării curbelor algebrice. Aproape toți marii matematicieni din secolul al XVII-lea și chiar din secolul al XVIII-lea se ocupă de construcțiile grafice ale rădăcinilor, iar I. Newton le consacră un capitol întreg din cartea lui de algebră. Între altele, dintr-o metodă generală geometrică de rezolvare a problemelor, așa cum îi servise lui Descartes reprezentarea grafică a rădăcinilor, la Newton ea devine doar unul dintre procedeele de determinare aproximativă a celei de-a 2-a sau a 3-a cifre a rădăcinilor. În secolul al XVII-lea și următoarele se mai dezvoltă și problema limitelor rădăcinilor ecuațiilor, pusă încă de Arhimede, iar mai tîrziu de algebra arabă.

Simbolurile algebrice ale lui al-Kalasadi. Aproape în toate lucrările matematicienilor din țările Islamului ajunse pînă la

noi lipsesc cu desăvîrșire simbolurile algebrice. Aceasta se referă integral la toți învățații orientali de la al-Horezmi pînă la al-Kași. În vestul arab însă întîlnim o excepție strălucită și neașteptată în tratatul de aritmetică și algebră amintit mai înainte, al lui Abu-l-Hasan Ali ibn Muhammed al-Kalasadi, care lucrase la Granada înainte de a fi fost nimicit emiratul mauritan din sudul Spaniei și care, alungat fiind în Africa, moare în anul 1486. Denumirea lucrării lui al-Kalasadi ne-a parvenit în cîteva variante, una dintre ele fiind *Ridicarea vălului de pe știința gubar (Kașf al-mah-djub min'ilm al-gubar)* [140]. Termenul *gubar* apare aici ca sinonim al aritmeticii scrise și nu ca o notație a cifrelor (vezi p. 200). Nu ne vom opri în amănunt asupra conținutului bogat al acestei opere; în prima ei carte se expune aritmetica numerelor întregi, în cea de a doua — operațiile cu fracțiile, inclusiv cu fracțiile cu numărător unitatea, fracțiunile de fracțiuni etc., într-a treia — extragerea rădăcinilor, iar într-a patra — rezolvarea ecuațiilor. Al-Kalasadi nu are rezultate esențial noi; un interes istoric îl prezintă doar sistemul foarte dezvoltat de simboluri. Rădăcina pătrată se notează prin prima literă a cuvîntului *djizr* (rădăcină) și se pune deasupra numărului; același semn (poate ca prima literă a cuvîntului *dja'ala* — necunoscuta) servește pentru notarea necunoscutei în proporțiile regulei de trei, iar termenii proporției se separă prin trei puncte așezate astfel ∴ În ecuații, puterea întîi a necunoscutei, pătratul și cubul se notează respectiv prin primele litere ale cuvintelor *șai*, *mal* și *ka'b*, semnele fiind scrise deasupra coeficienților.

La al-Kalasadi se întîlnește și semnul egalității, care poate că este ultima literă a cuvîntului *'adala*, care înseamnă egalitate. În fig. 66 dăm cîteva transcrieri după al-Kalasadi.

Sistemul de simboluri al lui al-Kalasadi este atît de dezvoltat, încît este puțin probabil ca el să fi fost creat în întregime de acest învățat. Totuși, nu cunoaștem nimic despre precursorii săi în ceea ce privește elaborarea acestor notații algebrice. Poate că unul dintre aceștia să fi fost ibn al-Banna, care, după relatările lui ibn Haldun, aplicase în demonstrațiile dintr-o operă (necunoscută nouă) notații algebrice servind simultan atît pentru „raționamente abstracte", cît și pentru „reprezentări concrete" [21, I, p. 805].

În Europa, simbolurile algebrice încep să se dezvolte aproximativ în aceeași perioadă, adică la sfîrșitul secolului al XV-lea.

Probleme ale geometriei. Abu-l-Vafa. Imediat după apariția primelor traduceri arabe ale *Elementelor* lui Euclid și a capitolului de geometrie din algebra lui al-Horezmi începe o rapidă

1. Rădăcini pătrate din numere

$\sqrt{60}$ ...; $\sqrt{5}$ ...; $\sqrt{12}$ ...;

$\sqrt{20\frac{4}{7}}$ ...; $\sqrt{6}$ ...; $\sqrt{\frac{3}{5}}$ ...;

$3\sqrt{6}$ ...; $\sqrt{54}$ ...; $\frac{1}{2}\sqrt{48}$ ...; $\sqrt{12}$ ...

2. Ecuații de gradul al doilea

$x^2+10x=56$ ...; $x^2=8x+20$ ...;

$x^2+20=12x$ ...; $x^2+16=8x$ ...;

$6x^2+12x=90$ ...; $4x^2+48=32x$ ...;

$3x^2=12x+63$ ...; $\frac{1}{2}x^2+x=7\frac{1}{2}$ ...

3. Proporții

$7 : 12 = 84 : x$ .....

$11 : 20 = 66 : x$ .....

Fig. 66. Cîteva expresii scrise, după al-Kalasadi.

asimilare a moștenirii geometrice occidentale și orientale, și totodată un studiu independent al problemelor din acest domeniu.

Curînd după al-Horezmi, la Bagdad desfășoară o activitate intensă frații banu Musa, fiii lui Musa ibn Șakir, unul dintre apropiații califului al-Mamun: Abu Djafar Muhammed ibn Musa (decedat în 872), al Hasan și Ahmed. Ei se ocupă de matematică, astronomie, instrumente muzicale și de mecanică. Își construiesc un observator propriu, colecționează manuscrise și încurajează traducerea în limba arabă a autorilor eleni. Dintr-o călătorie

în ţinuturile greceşti, fratele cel mai mare îl aduce la Bagdad pe Tabit ibn Korra. Aportul personal în ştiinţă a fiecărui frate nu poate fi delimitat. Se ştie doar că pe Ahmed l-a interesat mai mult mecanica. Sub numele tuturor celor trei fraţi a ajuns pînă la noi în traducerea latină a lui Gherardo din Cremona, *Cartea de geometrie a celor trei fraţi (Liber trium fratrum de geometria)* [140 a, 141]. În această operă, atrage atenţia aşa-numita formulă a lui Heron, a cărei deducere diferă într-o oarecare măsură de demonstraţia făcută de însuşi autorul *Metricei.* Cei trei fraţi se ocupă de trisecţiunea unghiului şi de determinarea mediilor proporţionale[1] cu ajutorul unor mijloace mecanice. Ei ştiu cum se desenează o elipsă cu ajutorul unei sfori fixată în focare.

Geometria practică din cartea pentru grămătici a lui Abu-l-Vafa despre care am mai vorbit cu o altă ocazie (p. 203) se înrudeşte cu partea de geometrie din algebra lui al-Horezmi. Abu-l-Vafa Muhammed ibn Muhammed al-Buzdjani (940—997/8) s-a născut în Horasan, în oraşul Buzdjan, aşezat între Herat şi Nişapur. La vîrsta de douăzeci de ani el se mută în Irak şi se evidenţiază curînd la Bagdad ca un mare matematician şi astronom. Lui îi aparţin nenumărate lucrări originale şi comentarii (ale lucrărilor lui Euclid, Diofant, Ptolemeu), multe dintre ele nefiind descoperite pînă în prezent. El are merite deosebite în domeniul geometriei şi trigonometriei.

În capitolul de geometrie din cartea pentru grămătici, în afară de materialul lui al-Horezmi, Abu-l-Vafa introduce multe informaţii suplimentare, fără acele aluzii la demonstraţii, pe care le socotise utile precursorul său. El prezintă aici formula lui Heron amintită mai sus, regulile de calcul ale ariei sferei prin aria cercului mare şi a volumului sferei prin diametru şi circumferinţă $\left(d^2 \cdot \frac{c}{6}\right)$ şi prin aria suprafeţei sferei $\left(\frac{1}{3} \cdot S \cdot \frac{d}{2}\right)$

Numărul π îl ia pretutindeni egal cu $\frac{22}{7}$. Pentru calculul ariei segmentului de cerc după arcul de cerc sau coardă sînt date valo-

---

[1] Este vorba de problema celor două medii geometrice, adică de determinarea necunoscutelor x şi y satisfăcînd condiţiile

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{a} = \frac{b}{x}$$

care cuprinde problema duplicării cubului şi de care s-au ocupat diverşi matematicieni greci — *I.P.*

rile coardelor într-un cerc cu diametrul egal cu 14 pentru arce de $\frac{k}{22}\,180°$ ($k = 1, 2, \ldots, 22$); coardele sînt exprimate în unități sexagesimale — *şaire* și părți ale lor. Abu-l-Vafa mai formulează şi regulile de transformare a valorilor pentru cazul unui cerc de rază oarecare, precum și regulile de interpolare.

Odată cu tabelul coardelor, el citează numele lui Ptolemeu și apoi prezintă ca fiind indiană următoarea regulă aproximativă care exprimă diametrul d al cercului prin numărul laturilor și latura a_n a unui poligon regulat înscris cu n laturi:

$$d^2 = a_n^2\left[\frac{(n-1)\,n}{2} + 3\right]\cdot\frac{2}{9} = a_n^2\,\frac{(n^2-n+6)}{9}.$$

E ușor de văzut că această regulă dă valori exacte pentru diametru, cînd $n = 3{,}4$ și 6. Pentru $n = 5$ eroarea este de circa 0,1%, pentru $n = 10$ — circa 1%, pentru $n = 20$ — circa 2%, iar cînd $n \to \infty$, ea tinde către $\frac{\pi - 3}{3}$, adică este ceva mai mică decît 5%. Nu se cunoaște proveniența acestei reguli.

În încheiere, Abu-l-Vafa descrie procedeele de măsurare a distanțelor pînă la obiecte inaccesibile și a înălțimii lor, cu ajutorul unei scînduri dreptunghiulare gradate pe margini și al unui vizor rotativ.

Ştim că manualul de aritmetică a lui al-Karadji conţine o serie de capitole de geometrie. Conţinutul lor este atît de apropiat de cel din cartea pentru grămătici, încît l-am putea trece cu vederea. Trebuie totuși să amintim curioasa regulă pentru volumul sferei

$$v = d^3\left(1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2}\right)^2 = d\left(\frac{\pi d}{4}\right)^2$$

$\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$. Dacă în cazul de faţă nu este vinovat cel care a făcut copia, atunci rezultă că al-Karadji consideră că sfera este echivalentă ca volum cu un paralelipiped drept cu înălțimea egală cu diametrul și cu baza pătrată, cu latura egală cu un sfert de cerc mare. Această regulă amintește procedeele grosiere de cvadratură, folosite, după spusele lui Abu-l-Vafa, de topometrii acelor vremuri (vezi p. 292).

Regula lui al-Karadji ne va surprinde în mai mică măsură, dacă vom ţine seama că în manualul enciclopedic al unui matematician calificat, cum a fost iranianul Behaeddin și care a trăit

cu cinci secole mai tîrziu [177], volumul sferei este dat sub forma:

$$v = d^3 \left\{\left(1 - \frac{3}{14}\right) - \frac{3}{14}\left(1 - \frac{3}{14}\right) - \frac{3}{14}\left[\left(1 - \frac{3}{14}\right) - \frac{3}{14}\left(1 - \frac{3}{14}\right)\right]\right\} =$$

$$= \left(\frac{11}{14}d\right)^3,$$

adică pentru $\pi = \frac{22}{7}$, $v = \left(\frac{\pi d}{4}\right)^3$. Cu alte cuvinte, Behaeddin consideră sfera echivalentă cu un cub a cărui latură este un sfert din cercul mare. Valoarea lui π, corespunzătoare de fapt regulii lui Behaeddin, este aproximativ egală cu 2,9, deci ceva mai bună decît cea corespunzătoare regulii lui al-Karadji, egală aproximativ cu 3,7.

Lui Abu-l-Vafa îi mai aparține și o operă specială de geometrie practică: *Carte despre ceea ce îi este necesar unui meseriaș care lucrează cu construcții geometrice (Kitab fi mai iahtadj ilaihi as-sana'min a'mal al-handassia)*. S-a păstrat expunerea acestei lucrări în limba arabă, făcută de un elev al său [142], și o traducere în limba persană [143] dintr-o perioadă de timp apropiată. Ambele texte se completează unul pe altul.

Cartea este alcătuită dintr-o introducere și 12 capitole conținînd o mulțime de diferite construcții importante în topometrie, arhitectură, tehnică și geodezie. Este deosebit de interesant că aproximativ cincisprezece probleme sînt rezolvate cu ajutorul unei rigle și al unui compas cu deschidere constantă. Uneori această cerință se exprimă în condițiile problemei, iar uneori se îndeplinește de fapt în realizarea construcției. Importanța practică a unor asemenea construcții este condiționată de faptul că pe teren uneori este incomod de construit cercuri de raze diferite. Poate că primele construcții cu compasul de deschidere constantă țin de *Regulile funiei* indiene și s-au întîlnit și la greci, dar lui Abu-l-Vafa îi revine meritul de a fi rezolvat pe această cale, în mod sistematic, un grup întreg de probleme fundamentale și de a fi scos în evidență principiul în sine. Meritul lui nu-l micșorează nici faptul că pentru simplificare, în unele probleme el ia deschiderea compasului egală cu un segment oarecare dat și nu arbitrară. Ulterior, tot în virtutea necesităților practice, în secolul al XVI-lea, în Italia reîncep studii în același sens, unde de această problemă se ocupă Leonardo da Vinci, G. Benedetti, N. Tartaglia și G. Cardano, iar și mai tîr-

ziu ele sînt continuate în mod strălucit de L. Mascheroni la finele secolului al XVIII-lea, în secolul al XIX-lea de J. Steiner și de alții.

În introducere, folosind rigla și compasul de deschidere constantă, Abu-l-Vafa construiește perpendiculara pe mijlocul și la capătul unui segment. În cap. I, conținînd construcțiile de bază, segmentul de dreaptă se împarte prin aceleași mijloace în orice număr de părți, iar unghiul — în jumătate. În cap. II consacrat poligoanelor regulate, pe un segment de dreaptă dat se construiesc poligoane cu 3, 4, 5, 6, 8 și 10 laturi, iar în cap. III — poligoane regulate cu 3, 4, 5, 6 și 8 laturi înscrise într-un cerc dat.

În aceleași capitole se dă construcția pentru dreptele paralele, tangenta la circumferință, heptagonul regulat (ca latură se ia în mod aproximativ jumătatea laturii unui triunghi echilateral înscris în același cerc), trisecțiunea mecanică a unghiului, duplicarea mecanică a cubului și altele. În cap. I se arată două construcții pentru o oglindă care, concentrînd razele Soarelui, aprinde un obiect la o distanță dată. Într-una din aceste construcții, șablonul, adică parabola, se construiește prin puncte cu ajutorul unui cerc, a cărui rază este de două ori mai mare decît distanța (focală) dată. Pe niște drepte perpendiculare pe diametrul cercului se iau segmente de dreaptă egale cu coardele ce leagă unul din capetele diametrului cu punctele de intersecție dintre aceste perpendiculare și circumferință; capetele segmentelor se află pe parabola căutată. În cea de-a doua construcție se folosește o familie de cercuri ale căror centre se află pe o rază și care trec prin origine. După cum se pare, ambele construcții se întîlnesc aici pentru prima oară în istoria matematicii.

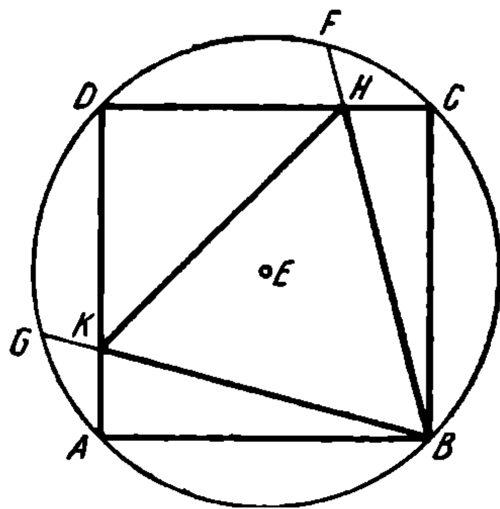


Fig. 67

În cap. VI se analizează probleme de înscriere sau de circumscriere a unui poligon regulat într-altul. Iată, de pildă, unul din cele cinci procedee de a înscrie un triunghi echilateral într-un pătrat dat. Din centrul E al pătratului se duce un cerc prin vîrful D (fig. 67); apoi din D, cu aceeași rază, se duce un arc de cerc, care intersectează circumferința în punctele F și G. Punctele de intersecție H și K între dreptele BF și BG cu laturile CD și AD sînt vîrfurile triunghiului căutat BHK.

Capitolele VIII — X sînt consacrate divizării figurilor rectilinii şi a cercului, ca de pildă, împărţirea patrulaterului în două părţi egale cu ajutorul unei drepte ce trece printr-unul din vîrfurile lui sau secţionarea unei a $\frac{1}{n}$ părţi dintr-un paralelogram cu ajutorul unei drepte ce trece printr-un punct exterior dat. Încă Euclid consacrase acestor probleme o operă specială.

În sfîrşit, în cap. XI se rezolvă o serie de probleme de transformare într-un singur pătrat a sumei cîtorva pătrate şi de descompunere a unui pătrat într-o sumă a altora. Mulţi practicieni au nevoie de aceasta, scrie Abu-l-Vafa, dar „toate procedeele folosite de lucrători nu se bazează pe vreun principiu, nu merită încredere şi sînt foarte inexacte“ [142, p. 345]. Abu-l-Vafa avusese intenţia să stabilească principiile generale de rezolvare a unor asemenea probleme. Mai întîi el dă cele mai simple construcţii pentru un pătrat alcătuit din n^2 sau $n^2 + m^2$ pătrate cunoscute. În ultimul caz se foloseşte de fapt egalitatea $n^2 + m^2 = 2\,nm + (n - m)^2$: pătratul căutat se obţine dacă în jurul pătratului $(n - m)^2$ se aşază 4 dreptunghiuri $\frac{nm}{2}$. Această construcţie nu este complicată în realizare şi coincide cu construcţia teoremei lui Pitagora folosită în China şi India (compară fig. 28 de la p. 124); şi probabil fusese adusă din India. Mai departe, el rezolvă aceleaşi probleme de descompunere a pătratului.

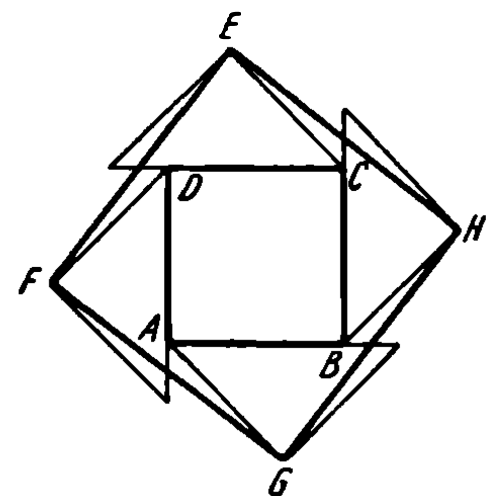


Fig. 68

După aceasta se pune problema construcţiei unui pătrat din orice număr de pătrate date. Abu-l-Vafa nu face o analiză generală, ci studiază numai cazul triplării unui pătrat. Aceasta se poate face construind ipotenuza unui triunghi dreptunghic cu catetele egale cu latura şi diagonala pătratului dat. O asemenea soluţie, spune Abu-l-Vafa, este suficientă pentru un geometru, dar nu este convenabilă în practică. Probabil că este vorba despre faptul că, în realitate, se cere să se împartă pătratele date în nişte părţi din care se va alcătui un pătrat nou. Iată construcţia lui Abu-l-Vafa (fig. 68). Tăind două pătrate date de-a lungul diagonalelor, aşezăm cele patru triunghiuri în jurul pătratului aşa cum se arată în fig. 68, iar apoi unim *E*, *F*, *G*, *H*.

Figura *EFGH* este un pătrat egal cu triplul pătratului *ABCD*, deoarece triunghiurile înguste care ies în afara laturilor *EFGH* și cele care intră în el sînt congruente.

Mai departe, Abu-l-Vafa transformă într-un singur pătrat două pătrate cu laturi oarecare, neegale. Pentru aceasta, pătratul mai mic *ABCD* se aplică peste cel mare *AEFG* (fig. 69). Atunci suma lor se va compune din ariile a două dreptunghiuri *ABHG* și *AEKD* egale între ele și pătratul *CKFH*. Așezînd în felul cunoscut cele patru triunghiuri, obținute prin împărțirea dreptunghiurilor prin diagonale în jurul pătratului *CKFH*, vom realiza un pătrat egal cu suma celor două date. În sfîrșit, Abu-l-Vafa rezolvă problema împărțirii unui pătrat în două, dintre care unul de latură dată.

Construcția prin care Abu-l-Vafa obține un pătrat din suma altor două pătrate date conține în esență demonstrația teoremei lui Pitagora bazată pe principiul echivalenței, care apare aici cît se poate de evident. O demonstrație similară, dar cu un desen ceva mai diferit de fig. 28 și mai ilustrativ pentru evidențierea echivalenței, o dă încă Tabit ibn Korra în secolul al IX-lea; această demonstrație se cunoaște mulțumită lui an-Nairizi [146].

Referitor la cazul unui număr oarecare k de pătrate egale, Abu-l-Vafa observă că aici se poate recurge la teorema lui Pitagora, dar adaugă din nou faptul că acest procedeu este incomod în practică. Într-adevăr, descompunerea în părți congruente folosind teorema lui Pitagora este relativ complicată, deși practic nu este mai dificilă decît construcția pentru trei pătrate egale. Nu ne putem dispensa însă în întregime de teorema lui Pitagora. S-ar putea pune doar problema celei mai comode descompuneri a numărului dat în componentele lui pentru a aplica teorema lui Pitagora de cît mai puține ori. Cu ajutorul teoremei lui Fermat privind reprezentarea oricărui număr prin suma a cel mult patru pătrate, s-a arătat că pentru orice k, teorema lui Pitagora trebuie folosită cel mult o dată [143].

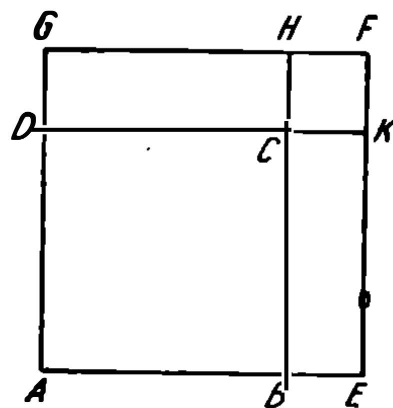


Fig. 69

În cap. XII, Abu-l-Vafa expune procedeele de descompunere a suprafeței sferei în poligoane sferice regulate. Desigur, vîrfurile acestora sînt vîrfurile poliedrelor înscrise în sferă, dar Abu-l-Vafa nu amintește nimic despre aceasta. Construcțiile elegante și simple din acest capitol dau cinci poliedre regulate și alte două

semiregulate din cele 13 descoperite de Arhimede, şi anume, poliedrul cu 14 feţe, dintre care 8 triunghiuri şi 6 pătrate, şi poliedrul cu 32 de feţe, dintre care 20 de triunghiuri şi 12 pentagoane. Construcţiile altor trei corpuri semiregulate nu sînt pe deplin exacte. În cazul de faţă, sînt prea puţin cunoscute sursele folosite de Abu-l-Vafa. Afară de *Elemente*, el cunoscuse aproape neîndoielnic lucrarea lui Pappus, dar o serie de construcţii ale geometrului din Bagdad nu se mai întîlnesc în literatura dinaintea lui şi poate că-i aparţin lui personal. Mult mai tîrziu, S. Stevin şi J. Kepler se ocupă din nou de poliedrele semiregulate, despre care ei cunoşteau doar o descriere succintă a clasificării lor după Pappus.

Am văzut că în operele aritmetico-algebrice ale autorilor arabi există deseori capitole de geometrie. Progresul realizat în măsurarea figurilor, către sfîrşitul etapei analizate, se poate aprecia după *Cheia aritmeticii* a lui al-Kaşi. Cea de-a patra carte a acestei lucrări *Despre măsurători* este mult mai bogată decît părţile corespunzătoare din cărţile lui al-Horezmi sau al-Karadji, iar valorile numerice pentru segmentele incomensurabile sînt exprimate, aşa după cum am mai spus, cu o înaltă exactitate. Al-Kaşi rezolvă unele probleme pe cale pur algebrică, iar în altele aplică unele formule trigonometrice. Pentru poligoanele regulate cu n laturi, cu $n = 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 15$ şi 16 el dă tabele de rapoarte între arie şi pătratul laturii, adică $\frac{n}{4}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$, în fracţii sexagesimale cu o precizie pînă la 60^{-5} şi în fracţii zecimale cu o precizie de 10^{-6}. Tabelul valorilor $k\pi$ ($k = 1, 2, \ldots 60$) se dă în fracţii sexagesimale pînă la terţi, iar în fracţii zecimale ($k = 1, 2, \ldots, 10$) pînă la 10^{-6}. Odată cu volumele corpurilor rotunde obişnuite se analizează volumele cilindrului şi ale conului înclinat, precum şi ale corpurilor cu gol interior, de felul „prisosului conic" (trunchi de con cu un gol interior de forma unui con, a cărui bază este baza mică a trunchiului de con, iar vîrful e situat în centrul bazei mari), „prisos rombic" (combinarea conului cu un trunchi de con cu gol interior conic, cu baza mai mică decît baza trunchiului de con, iar vîrful coincide cu vîrful conului plin), cilindri cu gol interior etc. Într-un tabel special sînt reunite caracteristicile numerice a celor cinci poliedre regulate şi ale celor două poliedre semiregulate construite de Abu-l-Vafa. În încheiere, al-Kaşi prezintă calcule şi construcţii complicate

pentru arce ogivale, bolți, cupole și așa-numitele stalactite[1], caracteristice pentru arhitectura arabă [144].

Teoria dreptelor paralele. Au o importanță remarcabilă studiile consacrate celui de-al V-lea postulat al lui Euclid despre paralele, pe care încercaseră să-l demonstreze încă elenii [2]. Aceste studii au durat mai mult de patru secole.

Elaborarea teoriei paralelelor, la fel ca și a teoriei rapoartelor, începe în țările Islamului îndată după ce apare traducerea *Elementelor* în limba arabă. Primul studiu cunoscut de teoria paralelelor îi aparține contemporanului și colaboratorului lui al-Horezmi, astronomului și matematicianului al-Abbas ibn Said al-Djauhari, născut în orașul Faraba (astăzi Otrar, în R.S.S. Kazahă). Capitolul respectiv al lucrării lui al-Djauhari, *Perfecționarea cărții „Elementelor" (Islah li kitab al-Usul)*, îl cunoaștem după expunerea lui at-Tusi [144 *a*]. Al-Djauhari propune demonstrația celui de-al V-lea postulat, bazată pe următoarea ipoteză implicită: dacă două drepte paralele sînt intersectate de o altă dreaptă și unghiurile alterne sînt egale, același lucru se întîmplă cînd cele două drepte sînt intersectate de orice altă dreaptă. În mersul demonstrației, al-Djauhari deduce teoremele conform cărora mediana unui triunghi este egală cu jumătatea bazei lui și că prin orice punct din interiorul oricărui unghi dat se poate duce o dreaptă care să intersecteze ambele lui laturi (de unde și rezultă postulatul V). Ultima teoremă este remarcabilă: pe ea se bazează cunoscuta „demonstrație" a postulatului V, propusă în anul 1800 de geometrul francez A. M. Legendre.

În jurul anului 900, an-Nairizi rezervă un loc important teoriei paralelelor în comentariile sale la *Elemente* [144 b]. Abu-l-Abbas al-Fadl ibn Hatim an-Nairizi (decedat în jurul anului 922), din Nairizi, în apropiere de Șiraz, lucrează la Bagdad pe lîngă califul Mu'tadid (892—903). El se ocupă de astronomie și matematică, scrie lucrări despre astrolabul sferic și despre determinarea direcției în care se află Mekka, îl comentează pe Ptolemeu și Euclid. Comentariile la cărțile I — a VI-a din *Elemente* ni

---

[1] Stalactitele reprezintă un sistem multietajat de prisme poliedrice atîrnate unele deasupra altora, cu fețe plane sau curbe, servind pentru împodobirea cornișelor, a balcoanelor, a nișelor din portaluri etc. — *N.A.*

[2] Conform celui de-al V-lea postulat, dacă o dreaptă formează cu alte două drepte, situate în același plan, unghiuri alterne interne, a căror sumă este mai mică decît $2d$, atunci aceste două drepte duse pe lungimi suficiente se intersectează în acea parte unde suma este mai mică decît $2d$ [33a, I, p. 15] — *N.A.*

s-au păstrat într-un manuscris arab [145], iar la cărțile I — X — într-o traducere latinească făcută de Gherardo din Cremona [146].

Comentînd teoria paralelelor, an-Nairizi se referă la Simplicius, filozof grec din prima jumătate a secolului al VI-lea. Probabil că tot de la acesta aflase el teoria paralelelor a lui Aganis, contemporan al lui Simplicius, teoretic expusă destul de amănunțit.

În teoria lui Aganis, partea centrală o ocupă definiția dreptelor paralele ca fiind drepte situate în același plan și care, oricît s-ar prelungi în ambele direcții, rămîn echidistante. Prin distanța dintre drepte (dintre două puncte), Aganis înțelege, după cum o spune an-Nairizi, drumul cel mai scurt care le unește.

Definiția lui Aganis conține o afirmație echivalentă cu cel de-al V-lea postulat al lui Euclid. Ea nu este nouă. Știm de la Proclus, că încă Posidoniu definise într-un chip asemănător dreptele paralele, în secolul I î.e.n. Pentru Posidoniu, dreptele paralele sînt acelea care, fiind situate în același plan, nu se apropie și nu se îndepărtează una de alta, așa încît toate perpendicularele duse din punctele uneia pe cealaltă dreaptă sînt egale între ele [147, 148].

Apoi, an-Nairizi deduce o serie de teoreme ale lui Aganis: distanța dintre două drepte paralele este determinată de un segment perpendicular pe ele; două drepte perpendiculare pe a treia sînt paralele între ele; dreapta care intersectează două drepte paralele formează unghiuri interne și de aceeași parte, a căror sumă este egală cu două unghiuri drepte. Ultima propoziție este propoziția 29 din cartea I a *Elementelor* și este prima teoremă din cele demonstrate de Euclid cu ajutorul postulatului V. În cursul demonstrației, bazată la Aganis pe ipoteza dreptelor echidistante, se stabilește totodată și existența dreptunghiului. Ceva mai departe, pe baza propoziției 35, se demonstrează chiar postulatul V și se construiește punctul de intersecție al dreptelor respective. În construcție se folosește ipoteza că înjumătățind de un număr suficient de ori segmentul mai mare dintre cele două date, se poate obține un segment mai mic decît segmentul mai mic dintre cele două date. Această propoziție este echivalentă cu așa-numita axiomă a lui Eudoxus — Arhimede.

Ideile expuse în comentariul lui an-Nairizi au fost curînd dezvoltate mai departe. În primul rînd, pentru ibn al-Haisam a avut o importanță deosebită definiția paralelelor după Posidoniu — Aganis.

Ibn al-Haisam consacră două opere pentru analiza lucrării clasice a lui Euclid: *Cartea comentariilor la introducerile din*

cartea lui Euclid „Elemente“ (Kitab şarh musadart kitab Uclidis fi-l-Usul), unde analizează definiţiile, axiomele şi postulatele, şi un tratat alcătuit mai tîrziu *Despre rezolvarea îndoielilor din cartea lui Euclid „Elemente“ (Fi hall şukuk kitab Uclidis fi-l-Usul)*, în care comentează propoziţiile. Teoria paralelelor e expusă în prima operă [149, 150].

Ibn al-Haisam consideră necesar să fundamenteze în primul rînd însăşi noţiunea de paralele, ca drepte situate în acelaşi plan, şi care prelungite fiind la infinit nu se intersectează pe nici o parte, întrucît noi nu sîntem în stare să ne închipuim o prelungire la infinit. De aceea e necesar să arătăm atît posibilitatea de a realiza în general o dreaptă infinită, cît şi în mod special, drepte paralele. Prima se obţine prin construirea unui segment mai mare decît cel dat de un număr oricît de mare de ori, adică, aplicînd de fapt aşa-numita axiomă a lui Eudoxus — Arhimede, pe care de altfel el n-o aminteşte direct. Pentru a doua, ibn al-Haisam introduce o nouă definiţie a dreptelor paralele, conţinînd într-o formă implicită, propoziţia care cuprinde postulatul V şi se bazează pe aplicarea mişcării continue în geometrie. El consideră o linie descrisă în plan de capătul liber al unui segment de lungime constantă, perpendicular pe dreapta dată şi a cărui bază se deplasează de-a lungul acestei drepte. O asemenea mişcare el o numeşte simplă. Raţionamente nedefinite, deşi extinse cu privire la „egalitatea şi asemănarea“ mişcării tuturor punctelor perpendicularei aflate în mişcare, îl duc pe autor la concluzia că traiectoriile descrise simultan de ele sînt congruente şi că linia descrisă de capătul perpendicularei este o dreaptă echidistantă în raport cu dreapta dată. Prin aceasta, după părerea lui ibn al-Haisam se demonstrează atît existenţa dreptelor paralele, cît şi procedeul pentru obţinerea lor. În realitate, după cum am mai spus, însăşi afirmaţia lui al-Haisam implică postulatul V al lui Euclid[1].

Mai departe, ibn al-Haisam trece la demonstrarea postulatului V. Demonstraţia se bazează pe definiţia mai sus prezentată a dreptelor paralele şi conţine o serie de fapte interesante din punct de vedere istoric. Ibn al-Haisam păşeşte pe o cale, urmată după el de o serie de succesori direcţi sau indirecţi ai săi, inclusiv pînă la geometrii din secolul al XVIII-lea. El analizează un patrulater *ABCD* (fig. 70), în care unghiurile *A* şi *B*

[1] În planul neeuclidian al lui Lobacevski, precum şi în planul neeuclidian al lui Riemann, o linie echidistantă faţă de o dreaptă este o linie curbă — *N.A.*

sînt adiacente bazei drepte, iar CD este o perpendiculară dusă pe BD dintr-un punct oarecare C al laturii AC, adică același tridreptunghi, pe care J. H. Lambert îl pune la baza lucrărilor sale privind teoria paralelelor. Se cere să se arate că și cel de-al patrulea unghi C este drept; pentru aceasta se demonstrează că latura CD adiacentă la al patrulea unghi este egală cu latura opusă AB. În timpul demonstrației, ibn al-Haisam enunță o idee, folosită ulterior în diferite variante de geometrii de mai tîrziu, și anume el construiește o demonstrație prin reducere la absurd, plecînd de la contrariu și ajunge la absurditatea presupunerii că $CD > AB$ sau $CD < AB$.

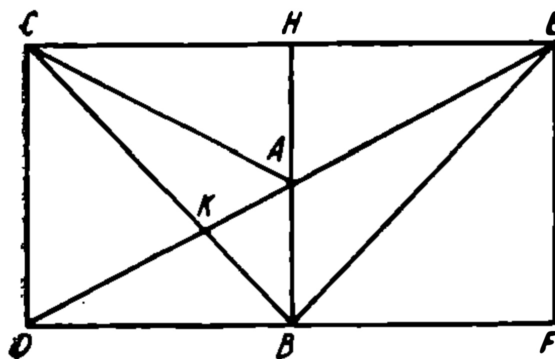


Fig. 70.

La început se admite că $CD > AB$. Latura CA se prelungește cu segmentul AE, egal cu ea, pe prelungirea dreptei DB se ridică perpendiculara EF și se duce BC și BE. Se demonstrează apoi ușor că $EF = CD$, așa încît în conformitate cu ipoteza, $EF > AB$. Să ne închipuim acum că EF se deplasează de-a lungul liniei FBD, rămînînd perpendiculară pe ea, pînă ce va coincide cu CD. Cînd punctul F coincide cu B, segmentul EF se suprapune peste BA și în virtutea ipotezei admise va ocupa poziția BH, unde $BH > BA$. Prin aceasta ajungem la următoarea contradicție: în conformitate cu procedeul de formare, linia CHE este dreaptă, dar tot dreaptă este și linia CAE, iar două drepte nu pot mărgini o arie. În acest fel, ipoteza $CD >$ $> AB$ este absurdă. În mod analog se demonstrează că este absurdă și ipoteza $CD < AB$[1].

Să observăm că patrulaterul $CDFE$ este vestitul dreptunghi al lui Khayyam-Saccheri, despre care vom vorbi în curînd.

Demonstrînd egalitatea laturilor AB și CD, ibn al-Haisam stabilește ușor că cel de-al patrulea unghi C al tridreptunghiului este și el drept, adică demonstrează existența dreptunghiurilor, iar apoi și postulatul V. El distinge trei cazuri: 1) cînd unul din unghiurile alterne interne este drept; 2) cînd unul din ele este ascuțit și 3) cînd unul din ele este obtuz. Nu vom analiza aceste

[1] Inegalitatea $CD > AB$ este îndeplinită în planul neeuclidian al lui Lobacevski, iar inegalitatea $CD < AB$ — în planul neeuclidian al lui Riemann — *N.A.*

Fig. 71. Demonstrația teoremei tridreptunghiului în tratatul lui ibn al-Haisam (manuscrisul din Kazan).

raționamente, lipsite de importanță deosebită. Vom remarca doar, că demonstrînd intersecția dintre perpendiculară și oblică, ibn al-Haisam formulează ca evidentă o propoziție pe care

M. Pasch o remarcă, în anul 1882, ca o importantă axiomă planimetrică. Aceasta este una dintre axiomele de ordine (după terminologia lui D. Hilbert): o dreaptă care nu trece prin vîrfurile unui triunghi și intersectează una din laturile lui mai intersectează încă una din celelalte două laturi. De aceeași propoziție se folosește și Nasireddin at-Tusi.

În concluzie, ibn al-Haisam declară că postulatul V demonstrat de el trebuie scos din rîndul celorlalte postulate și introdus ca teoremă înaintea propoziției 29 din cartea I a *Elementelor*, iar la celelalte patru postulate rămase să se adauge propoziția: „două drepte nu limitează o suprafață"[1].

Unul din rezultatele principale ale lui ibn al-Haisam este dezvăluirea legăturii reciproce dintre postulatul paralelelor și suma unghiurilor unui patrulater. La Euclid această legătură apărea încă unilateral: din postulatul paralelelor rezulta că această sumă este egală cu patru unghiuri drepte. Trebuie observat că al-Haisam a mai pus în evidență o propoziție care a jucat apoi un rol deosebit în dezvoltarea teoriei dreptelor paralele. Aceasta este afirmația că două drepte care se intersectează nu pot fi paralele cu o aceeași dreaptă. În cel de-al doilea comentariu al *Elementelor* el arată că o asemenea propoziție „se reduce la afirmația demonstrată de Euclid", dar este „mai intuitivă pentru simțuri" [144 a, p. 526], și mai departe o folosește pentru a deduce propoziția 29 din cartea I a *Elementelor*.

Teoria paralelelor este dezvoltată în continuare de Ommar Khayyam [132]. În *Comentarii la dificultățile din introducerile cărții lui Euclid*, Khayyam nu este în principiu de acord cu ibn al-Haisam. Urmîndu-i pe Aristotel și Euclid, el se opune ideii de a folosi mișcarea în geometrie. Introducînd definiția sa, ibn al-Haisam se referă la însuși Euclid, care definise sfera ca un rezultat al rotirii unui semicerc în jurul diametrului său. Dar, spune Khayyam, autorul *Elementelor* manifestase în acest fel o lipsă de consecvență. În cărțile de stereometrie există în general multe neglijențe, pe care Euclid le comisese poate, socotind că un cititor ajuns la aceste cărți ar fi trebuit să aibă timp să capete o anumită experiență. Se știe doar că Euclid definește cercul ca rezultat al rotirii în plan a unui segment de dreaptă fixat la un capăt.

[1] Această propoziție, pe care Euclid o folosește ca evidentă în demonstrarea teoremei egalității a două triunghiuri avînd două laturi și unghiul dintre ele egale, figurează în cîteva ediții mai tîrzii ale *Elementelor* sub forma axiomei IX. Majoritatea istoricilor matematicii consideră că axioma IX nu aparține lui Euclid — *N.A.*

Khayyam propune să se înlocuiască postulatul paralelelor printr-un alt principiu, care după cuvintele lui ar fi fost propus încă de Aristotel [1]: două drepte convergente (adică drepte care se apropie una de alta) se intersectează şi nu este posibil ca două linii convergente să se îndepărteze pe direcţia convergenţei. Cartea I din *Comentarii* este consacrată în întregime deducerii din acest principiu a postulatului lui Euclid despre dreptele paralele.

În teoria paralelelor prezentată de Khayyam există totuşi o serie de puncte slabe, părţi prea lungi şi unele neglijenţe. Însuşi „principiul" emis de el este alcătuit din două afirmaţii, fiecare dintre ele fiind echivalentă cu postulatul V al lui Euclid, aşa încît s-ar putea neglija oricare dintre ele. Nu vom intra în critica raţionamentelor lui Khayyam, ci vom desprinde doar acele chestiuni care reprezintă o valoare istorică.

Khayyam formulează în primul rînd axioma lui Arhimede şi axioma de mai sus privind liniile convergente. Din această axiomă, după cum arată raţionamentele lui Khayyam, rezultă că două perpendiculare pe o dreaptă sînt echidistanţate. Mai departe, el deduce opt propoziţii prin care trebuie înlocuită propoziţia 29 din cartea I a *Elementelor* [2]. Aici se studiază „patrulaterul lui Saccheri" format din segmentul dat AB, două perpendiculare egale AC şi BD aşezate la capetele lui, şi segmentul CD.

În propoziţia 1 se demonstrează că unghiurile de sus ale acestui patrulater sînt egale între ele, în propoziţia 2 — că perpendiculara ED pe mijlocul bazei de jos este perpendiculară pe baza de sus şi o împarte în două părţi egale. Propoziţia 3 a lui Khayyam este cea esenţială. În ea se analizează trei ipoteze, şi anume: 1) unghiurile de sus ale patrulaterului sînt ascuţite, 2) unghiurile de sus sînt obtuze şi 3) unghiurile de sus sînt drepte; primele două ipoteze se resping prin reducere la absurd cu noul postulat despre dreptele paralele. Pentru demonstraţie, perpendiculara EG din mijlocul bazei inferioare AB se prelungeşte cu $GK = EG$, pe EK se duce perpendiculara FH pînă la intersecţia cu prelungirea laturilor AC şi BD; în patrulaterul $CDFH$ latu-

---

[1] În operele lui Aristotel pe care le cunoaştem nu există formularea acestui principiu — *N.A.*

[2] Dreapta care intersectează două drepte paralele formează unghiuri alterne egale, unghiul exterior este egal cu cel opus interior, iar suma unghiurilor interne şi de aceeaşi parte este egală cu două unghiuri drepte — *N.A.*

rile CH și BF sînt egale. Mai departe (fig. 72) desenul se îndoaie după dreapta CD. În cazul ipotezei unghiurilor superioare ascuțite, HF trece în segmentul SN, mai mare decît baza inferioară, iar în cazul ipotezei unghiurilor obtuze — se transformă în segmentul LM, mai mic decît baza inferioară. După aceasta, întregul desen se îndoaie după dreapta AB. Atunci, în cazul ipotezei unghiurilor ascuțite, cele două perpendiculare pe segmentul AB de ambele părți ale lui sînt divergente, iar în ipoteza unghiurilor obtuze — sînt convergente. Dar, după cum s-a demonstrat, două perpendiculare pe o dreaptă sînt echidistante, și în consecință este posibilă doar ipoteza unghiurilor drepte. Celelalte teoreme se folosesc pentru demonstrarea propoziției 7, care coincide cu propoziția 29 din cartea I a *Elementelor*, și a propoziției a 8-a, în care se demonstrează cel de-al V-lea postulat a lui Euclid.

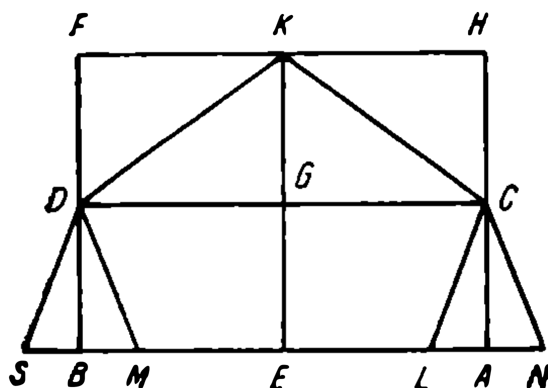


Fig. 72

Să observăm că unele particularități ale expunerii lui Khayyam dovedesc că el cunoștea bine comentariile lui an-Nairizi. Khayyam le amintește pe acestea și vorbește și despre alte cîteva încercări de a demonstra postulatul V, dar analizează numai concepțiile expuse în lucrarea lui ibn al-Haisam *Rezolvarea îndoielilor*.

Pasul următor în dezvoltarea teoriei paralelelor îl face Nasireddin at-Tusi. Cunoaștem trei opere ale lui at-Tusi în care se analizează această chestiune. Prima este *Tratatul care înlătură îndoiala în privința liniilor paralele (Ar-risala as-șafiiia'an așșakk fi-l-hutut al-mutavaziiia)* [144 a], scris înainte de anul 1251, iar celelalte sînt două redactări ale *Expunerii lui Euclid* [151, 152, 153, 153 a] adică două ediții ale *Elementelor* cu adaosurile și modificările personale ale lui at-Tusi.

At-Tusi expune amănunțit, uneori chiar textual deși cu unele lipsuri esențiale, teoria paralelelor a lui al-Djauhari, ibn al-Haisam (conform operei acestuia *Despre rezolvarea îndoielilor din cartea „Elemente" a lui Euclid)* și ale lui Ommar Khayyam. El analizează în mod critic fiecare teorie și în încheiere propune o teorie proprie a paralelor, bazată în mare măsură pe teoria lui Khayyam și în parte a lui al-Djauhari. Ulterior, această teorie

într-o formă îmbunătățită a fost inclusă în prima redactare a *Expunerii lui Euclid* publicată la Teheran de-abia în anul 1888. Noutatea constă aici în faptul că at-Tusi încearcă să demonstreze postulatul V fără nici un fel de premisă suplimentară, dar în realitate el folosește implicit afirmația prin care înlocuiește în mod deschis postulatul în prima redactare a *Expunerii lui Euclid*. Acest postulat propriu a lui Nasireddin spune: dacă două drepte situate în același plan sînt divergente într-o direcție, ele nu se pot uni în această direcție, doar dacă nu se intersectează [1].

Nasireddin mai introduce o serie de teoreme după propoziția 28 din *Elemente*. El analizează același patrulater al lui Khayyam, iar propoziția lui nr. 3 coincide cu propoziția 3 a lui Khayyam. Ipotezele unghiului obtuz și ascuțit el le respinge într-un alt mod.

În cazul ipotezei unghiului obtuz (fig. 73), din unul din vîrfuri, *A*, se duce perpendiculara *AE* pe *AC*. Deoarece unghiul *B* este drept, în triunghiul *ABE* ipotenuza *AE* este mai mare decît cateta *AB*. Apoi în *E* se ridică perpendiculara *EG* pe *BD*, care fiind totodată și ipotenuza triunghiului *AEG* este mai mare decît *AE*. Continuînd același proces, Nasireddin arată că bazele *AC* și *BD* ale patrulaterului sînt divergente pe direcția *AB* spre *CD*. În mod analog se arată că dreptele *CA* și *DB* sînt divergente pe direcția *CD* spre *AB*. Prin aceasta, ipoteza unghiului obtuz conduce la o contradicție cu postulatul admis. În mod similar se respinge și ipoteza unghiului ascuțit — în acest caz, bazele trebuie să fie convergente pe două direcții opuse.

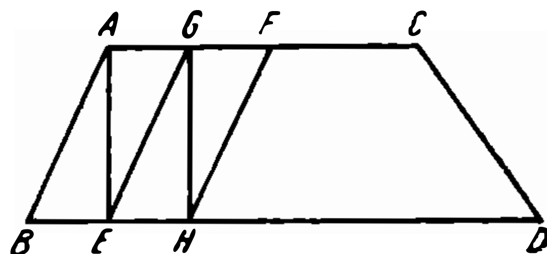


Fig. 73

Stabilind că în patrulaterul considerat toate unghiurile sînt drepte, Nasireddin deduce în propoziția 5, la fel ca și Ommar Khayyam, propoziția 29 din cartea I a *Elementelor*. Mai departe, urmează două variante de demonstrație ale postulatului V. În prima variantă se demonstrează că o perpendiculară și o oblică față de o dreaptă se intersectează (propoziția 6), iar apoi postulatul V (propoziția 7); în a doua variantă se demonstrează că dintr-un punct din interiorul unui unghi se poate duce o dreaptă care intersectează ambele laturi ale unghiului (propoziția 7) și postulatul V (propoziția 8).

---

[1] În secolul al XVIII-lea R. Simson propune un postulat asemănător în locul celui euclidian — *N.A.*

În a doua redactare a *Expunerii lui Euclid*, Nasireddin urmează o cale puţin diferită. În locul postulatului din prima redactare el admite două premise.

1) Dacă *AB* şi *CD* sînt două linii drepte (fig. 74), aşezate astfel încît perpendicularele *EF*, *GH* şi *KL*, coborîte din diferite puncte ale dreptelor *AB* pe *CD*, să formeze totdeauna cu dreapta *AB* unghiuri adiacente neegale care rămîn tot timpul ascuţite pe partea lui *B* şi obtuze pe partea lui *A*, atunci dreptele *AB* şi *CD* atîta timp cît nu se intersectează se apropie constant pe partea unghiurilor ascuţite şi se depărtează pe partea unghiurilor obtuze, adică perpendicularele se micşorează spre punctele *B* şi *D* şi cresc spre punctele *A* şi *C*.

a) Invers, dacă perpendicularele duse în acest fel devin mai scurte pe direcţia punctelor *B* şi *D* şi mai lungi pe direcţia punctelor *A* şi *C*, astfel încît dreptele *AB* şi *CD* se apropie constant în partea lui *B* şi *D* şi se depărtează în partea opusă, atunci fiecare perpendiculară formează cu dreapta *AB* două unghiuri, unul fiind ascuţit, iar celălalt — obtuz; toate unghiurile ascuţite sînt îndreptate spre punctele *B* şi *D*, iar cele obtuze — în partea opusă.

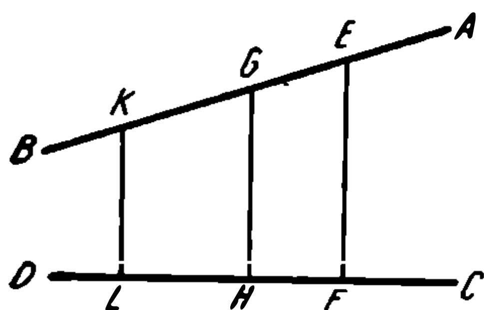


Fig. 74

Cu ajutorul acestor premise, Nasireddin încearcă să demonstreze că în patrulaterul considerat toate unghiurile sînt drepte, adică tocmai propoziţia 3 din prima redactare a *Expunerii lui Euclid.* Demonstraţia se face din nou prin absurd, dar în ea, fără să observe, Nasireddin foloseşte o propoziţie echivalentă cu postulatul V. Premisele adoptate care se pot demonstra prin mijloacele geometriei absolute, aşadar independent de postulatul V, nu sînt suficiente pentru a deduce propoziţia 3. Nu ne vom opri asupra acestei lacune din raţionamentele lui Nasireddin, pe care Saccheri a pus-o în evidenţă mai tîrziu cu claritate. Să mai remarcăm o altă împrejurare importantă. Deducînd propoziţia 3, Nasireddin mai demonstrează că suma unghiurilor unui triunghi este egală cu două unghiuri drepte, la început pentru un triunghi dreptunghic, împărţind în două, prin diagonală, un patrulater cu patru unghiuri drepte şi mai departe, pentru un triunghi oarecare, împărţindu-l în două triunghiuri dreptunghice prin înălţimea dusă dintr-unul din vîrfuri. În sfîrşit, el demonstrează

propoziția 29 din cartea I a *Elementelor* și, la fel ca al-Haisam, formulează în trecere „axioma lui Pasch".

Ideile lui Khayyam și Nasireddin at-Tusi ocupă un loc important în dezvoltarea teoriei paralelelor și preistoricul geometriei neeuclidiene. Bineînțeles ei se aflau departe de ideea unui sistem geometric diferit de cel euclidian și se străduiesc doar să demonstreze postulatul paralelelor pe baza unor propoziții socotite ca mai evidente. În același timp se fac o serie de descoperiri remarcabile. Despre una dintre ele, și anume despre stabilirea dependenței bilaterale dintre postulat și mărimea sumei unghiurilor unui patrulater și, în consecință, a unui triunghi, s-a vorbit mai sus. Un alt fapt important este încercarea de a respinge ipoteza unghiului ascuțit și obtuz prin reducere la absurd. Mai mult, cînd Khayyam conchide că în ipotezele unghiului ascuțit și obtuz baza superioară a patrulaterului său este mai lungă, respectiv mai scurtă decît cea inferioară, el are de fapt de-a face cu cele mai simple propoziții din geometriile neeuclidiene, deși este departe de însăși ideea posibilității lor. Să mai subliniem și aplicarea evidentă a „axiomei lui Pasch", deși nu ca axiomă aparte.

Lucrarea lui Khayyam a rămas timp îndelungat necunoscută și a fost publicată pentru întîia oară în limba arabă la Teheran, în anul 1936. Dar cea de-a doua redactare a *Expunerii lui Euclid*, aparținînd lui Nasireddin at-Tusi, apare la Roma în 1594 și tot acolo într-o traducere latină (incompletă), în anul 1657 [154, 155]. Această demonstrație a lui Nasireddin e cunoscută de J. Wallis care o expune în opera despre cel de-al V-lea postulat al lui Euclid, iar mai tîrziu, G. Saccheri o pune la baza încercării sale ingenioase de a-l „curăța de toate petele" pe Euclid, reducînd la absurd ipotezele unghiului ascuțit și obtuz în patrulaterul studiat de Nasireddin. În literatura de geometrie neeuclidiană, acest patrulater poartă și astăzi numele lui Saccheri.

Secțiunile conice; noile cubaturi ale lui ibn al-Haisam. Teoria secțiunilor conice capătă o largă aplicare în țările Islamului pentru reprezentarea grafică a rădăcinilor ecuațiilor algebrice de gradul trei și, în parte, de gradul patru. Interesul față de acest domeniu al geometriei este legat de lucrările de optică. Fizicienii cunoșteau proprietățile oglinzilor parabolice și, de pildă, în lucrarea fundamentală de optică a lui ibn al-Haisam un loc important îl ocupă construcțiile geometrice corespunzătoare [156].

Am amintit mai înainte cîteva construcții interesante ale elipsei la frații banu Musa și parabolele lui Abu-l-Vafa. Totuși, după

cum se poate aprecia după literatura de specialitate studiată, în Orientul Apropiat și Mijlociu nu s-au adus completări esențiale în teoria antică a secțiunilor conice. Meritul principal al matematicienilor din țările Islamului în acest domeniu îl constituie păstrarea și transmiterea descoperirilor antice. Prin literatura arabă, în Europa pătrund primele informații despre secțiunile conice, iar o parte considerabilă din lucrarea fundamentală a lui Apoloniu, cărțile 4—7, s-a păstrat numai în traducerea arabă a lui Tabit ibn Korra, redactată la sfîrșitul secolului al X-lea de iranianul Abu-l-Fath Mahmud ibn Muhammed ibn Kasim Fadl al-Ispahani.

Învățații din secolele al X-lea — al XI-lea sînt preocupați de cvadratura secțiunilor conice și de calculul volumelor corpurilor de revoluție definite de ele. Tabit ibn Korra efectează din nou cvadratura segmentului parabolic și cubatura paraboloidului de rotație, iar nepotul său, Abu Ishak Ibrahim ibn Sinan ibn Tabit ibn Korra (908—946), propune încă un procedeu original al cvadraturii amintite mai sus. Mai departe decît Arhimede a mers al-Kuhi. După cum se știe, Arhimede a determinat volumul segmentului de corp rezultat prin rotația parabolei în jurul axei. Al-Kuhi calculează volumul unui corp rezultat prin rotirea unei părți de parabolă în jurul acestui diametru [157, 158, 159].

Un rezultat și mai important pentru istoria calculului infiniților mici îi aparține lui ibn al-Haisam; el calculează volumul unui corp rezultat prin rotația unui segment de parabolă în jurul unei ordonate arbitrare, care delimitează acest segment. În lucrarea specială *Tratat despre măsurarea corpului parabolic* (*Fi ma sahat al-mudjassam al-mukafi* [160]), cunoscută după o copie aproximativ din secolul al XVI-lea, ibn al-Haisam povestește că stimulentul acestui studiu îl constituiseră lucrările lui Tabit ibn Korra și ale lui al-Kuhi. El formulează problemele rezolvate de dînșii, declarînd că metoda primului este nesatisfăcătoare. Nu se știe dacă ibn al-Haisam (și în general matematicienii țărilor Islamului) cunoscuse opera lui Arhimede *Despre conoizi și sferoizi*; această operă nu este amintită nicăieri în literatura arabă de matematică[1]. Soluția lui al-Haisam pentru problema volumului

[1] Nu se știe dacă au existat sau nu traduceri arabe ale operelor lui Arhimede despre cvadratura parabolei, despre spirale, precum și epistolele lui despre metodă (operele despre sferă și cilindru și despre măsurarea cercului fuseseră probabil necunoscute autorilor arabi). Aceasta nu înseamnă, desigur, că matematicienii țărilor Islamului nu cunoscuseră prin intermediul altor surse procedeele de integrare și rezultatele obținute de Arhimede. Compară cu lucrarea [160 a] — *N.A.*

unui segment din corpul rezultat prin rotația parabolei în jurul axei sale diferă de cea dată de Arhimede, deși ambele soluții se încadrează în formele riguroase ale metodei exhaustive. Și deducerea sumei seriei pătratelor naturale diferă de cea a lui Arhimede.

Nu vom expune demonstrațiile matematicianului egiptean, ci vom enumera doar principalele leme și teoreme. Întîi primul rînd, el deduce sumele primelor patru puteri ale numerelor naturale; Ibn al-Haisam prezintă suma numerelor naturale la puterea a patra, care apare aici pentru prima oară în istoria matematicii, sub forma:

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \left(\frac{n}{5} + \frac{1}{5}\right) n \left(n + \frac{1}{2}\right)\left[(n+1)\, n - \frac{1}{3}\right].$$

Mai tîrziu, această sumă, scrisă sub o formă puțin diferită, dar fără demonstrație, o găsim în *Cheia aritmeticii* a lui al-Kași. Mai departe, pentru a aprecia aproximările necesare în procesul implicit de trecere la limită și pentru a demonstra unicitatea rezultatului obținut, ibn al-Haisam deduce inegalitățile:

$$\frac{8}{15}(n-1)\, n^4 < \sum_{k=1}^{n-1} (n^2 - k^2)^2 < \frac{8}{15} n \cdot n^4$$

și inegalitatea:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (n^2 - k^2)^2 > \frac{8}{15} n \cdot n^4.$$

Rezultatele principale sînt următoarele:

1) volumul corpului rezultat prin rotația suprafeței *abg* în jurul diametrului arbitrar *ag* (*bg* este ordonata conjugată acestuia) este egal cu jumătatea cilindrului avînd înălțimea egală cu segmentul de diametru $ag = kl$, și avînd raza bazei egală cu perpendiculara *bk* pe diametru (fig. 75);

2) volumul corpului rezultat prin rotația segmentului *abg* dintr-o parabolă în jurul ordonatei *ag* este egal cu $\frac{8}{15}$ din cel al unui cilindru avînd înălțimea egală cu ordonata $ag = kl$, și avînd raza bazei egală cu perpendiculara *bk* pe ordonată (fig. 76).

Această din urmă teoremă include un calcul echivalent al integralei definite $\int_0^a t^4\, dt$. Dacă în cazul $bg \perp ag$ se ia *ag* ca axă a ordonatelor, *bg* — ca axă a absciselor, se notează $dg = bg = r$ și

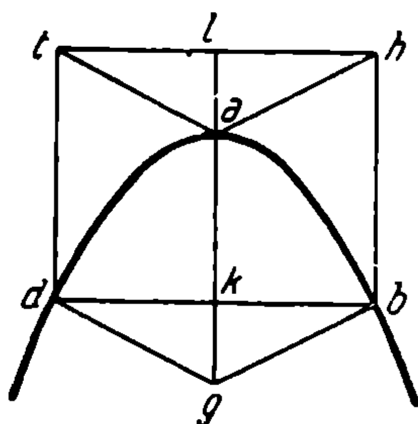
$ag = h$. Atunci volumul V al corpului rezultat din rotaţia segmentului abg al parabolei $y^2 = p(x + r)$ se exprimă prin integrala:

$$V = \pi\int_0^h x^2 dy = \pi\int_0^h \left(\frac{y^4}{p^2} - \frac{2ry^2}{p} + r^2\right) dy = \pi\left(\frac{h^5}{5p^2} - \frac{2rh^3}{3p} + r^2h\right).$$

Deoarece pentru $x = 0$ şi $y = h$ avem $p = \frac{h^2}{r}$, rezultă după cum găseşte şi ibn al-Haisam:

$$V = \frac{8}{15}\pi r^2 h.$$

Rezultatul de mai sus obţinut de ibn al-Haisam nu fusese cunoscut grecilor antici. Matematicienii europeni îl descoperă din nou în



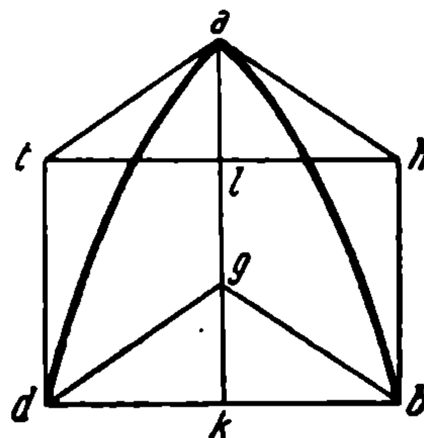
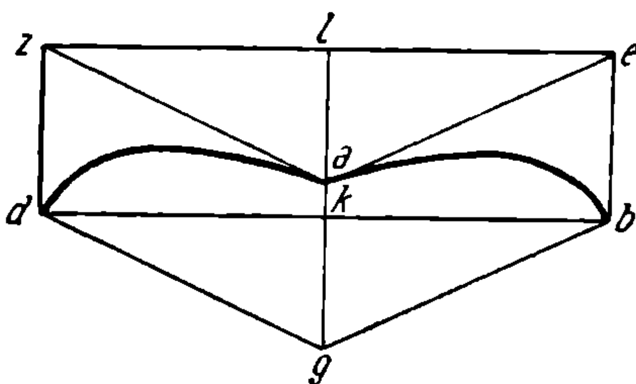


Fig. 75

prima jumătate a secolului al XVII-lea, împreună cu o regulă mai generală de integrare a funcţiei exponenţiale (x^n) pentru orice exponent natural.



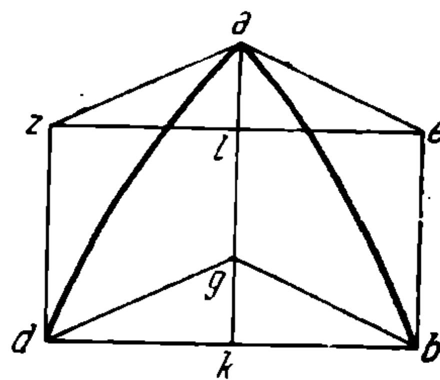


Fig. 76

Succese însemnate se obţin şi în ceea ce priveşte cvadratura aproximativă a cercului; ne va fi mai comod să le analizăm legate de diferite calcule trigonometrice.

Să remarcăm totodată că în literatura de filozofie în limba arabă se oglindește și teoria antică atomistă cu privire la spațiu și timp respinsă de Aristotel, și pe plan matematic — de Eudoxius și de urmașii săi. Acest punct de vedere îl dezvoltă Abu-l-Hasan Ali ibn Ismail al Aș'ari (873 sau 874—935 sau 936), arab din Basra care lucrase la Bagdad și fusese elevul unuia dintre elevii lui Abu Bakr Ahmed ibn Ali ibn al-Talib al Bakilani (decedat în 1013), născut și acesta la Basra și care a locuit la Bagdad. Al-Aș'ari este întemeietorul scolasticii musulmane — *kalama* și al școlii filozofice a *mutakallimilor*.

Dezvoltarea trigonometriei. În matematica țărilor Islamului, trigonometria ocupă un loc important. Ea servește ca verigă de legătură directă între matematică și principala știință a naturii din acele vremuri — astronomia, cu calendarul și gnomonica, știința despre ceasornicele solare, foarte răspîndită în orașele musulmane, unde cerul este rareori și numai pentru scurt timp acoperit de nori. Problemele de trigonometrie stimulează dezvoltarea altor domenii ale matematicii, îndeosebi a metodelor de calcul aproximativ.

Rezolvarea triunghiurilor sferice fusese necesară și pentru îndeplinirea ritualurilor religioase. Musulmanii își citesc rugăciunile așezîndu-se cu fața spre Mekka — orașul natal al lui Muhammed. Direcția în care se află Mekka se indică într-o nișă specială — *Kibla* — din fiecare geamie și împreună cu liniile orare se trasează pe toate ceasurile solare publice. Dacă în fig. 77 (cercul fiind meridianul zero) vom nota latitudinea și longitudinea punctului dat *A* și ale orașului Mekka *M*, respectiv prin φ_1, φ_2, și λ_1, λ_2, atunci în triunghiul sferic *AMP*, unde al treilea vîrf este Polul Nord, sînt date laturile $AP = 90° - \varphi_1$, $MP = 90° - \varphi_2$ și unghiul dintre ele $\lambda_2 - \lambda_1$, se cere să se găsească unghiul *MAP*. Rezolvarea triunghiului dă concomitent și latura *AM*, adică distanța între punctele *A* și *M* în grade sau, dacă se cunoaște raza globului pămîntesc, în unități liniare. Această problemă este totodată și una dintre problemele fundamentale ale geografiei matematice.

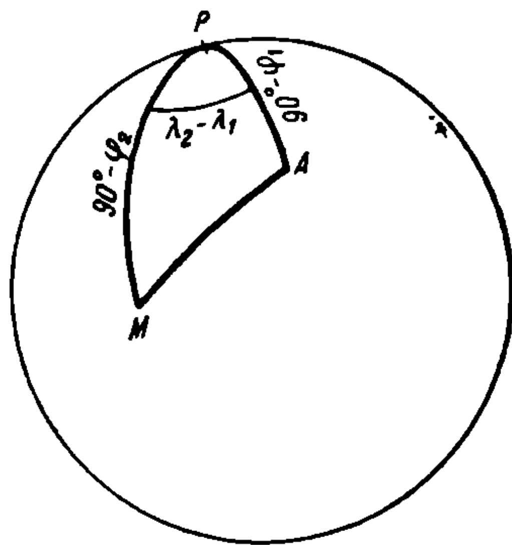


Fig. 77

Lucrările de trigonometrie, ca și cele de matematică în general, învățații arabi le-au început cu studiul operelor precursorilor lor. S-a mai spus că în jurul anului 773, la Bagdad devine cunoscută una dintre *siddhanta-lele* indiene, tradusă în limba arabă de astronomul Abu Abdalla Muhammed ibn Ibrahim al-Fazari. În secolul al IX-lea apar traducerile *Almagestului* lui Ptolemeu, primele fiind efectuate de Sahl at-Tarabi și de al-Hadjjadj și *Sferica* lui Menelau[1], precum și comentariile la aceste opere. Cele trei opere citate formează baza pe care matematicienii arabi încep să construiască mai departe cu succes. Astronomii alexandrini introduseseră o singură mărime trigonometrică — coarda arcului. Teorema lui Ptolemeu, echivalentă cu teorema sinusului sumei a două arce, împreună cu teorema coardei semiarcului stătuseră la baza tabelului grecesc al coardelor; teorema lui Menelau cu privire la patrulaterul complet servise pentru rezolvarea cîtorva cazuri de triunghiuri sferice. Indienii înlocuiseră coardele prin sinusuri, adăugaseră liniile cosinusului și ale sinusului-versus. întocmind un mic tabel al sinusurilor. Matematicienii țărilor Islamului, introducînd mărimi trigonometrice noi, descoperind numeroase proprietăți ale acestora și găsind rezolvarea tuturor cazurilor de triunghiuri plane și sferice, elaborează treptat trigonometria ca știință de sine stătătoare. Denumirea propriu-zisă de „trigonometrie", adică „măsurarea triunghiurilor", apare în anul 1595 la B. Pitiscus.

După cum s-a mai spus, una dintre primele opere de trigonometrie scrise la Bagdad aparține lui al-Horezmi (p. 228). Amintind-o, am spus că tabelele tangentelor din această operă puteau să fi fost o completare ulterioară. Se poate afirma însă cu siguranță că tangenta și cotangenta erau deja cunoscute unui contemporan și coleg al lui al-Horezmi de la *Casa înțelepciunii*, Ahmed ibn Abdalla al-Marvezi din Merv, deseori numit al-Habaș al-Hasib adică „calculatorul" (decedat între anii 864 și 874, în vîrstă de 100 de ani) [161, 162].

Tangenta, cotangenta (și cosecanta[1]) nu apar la început ca linii legate de cerc, ci în gnomonică, la compararea laturilor unui triunghi dreptunghic. Dacă înălțimea unei prăjini-gnomon verticale este h, atunci raportul între lungimea t a umbrei sale și h

---

[1] *Sferica* lui Menelau s-a păstrat numai în traduceri arabe — *N.A.*

[2] În limba latină *tangens* înseamnă tangent, iar *secans* — linie care secționează, intersectează, taie — *N.A.*

variază în funcție de înălțimea α a Soarelui (fig. 78). Luînd $h = 60' = 1$, al-Habaș întocmește un tabel cu valorile umbrei t pentru $\alpha = 1°, 2°, 3°, \ldots$ cu o exactitate mergînd pînă la secunde. Acest tabel, adică tabelul cotangentelor

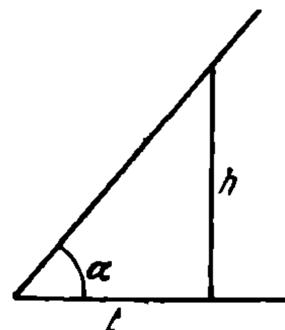


Fig. 78

$$t = h \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} \alpha,$$

permite să se determine înălțimea Soarelui după lungimea umbrei, și invers. Al-Habaș întocmește de asemenea un tabel al „umbrelor inverse", pentru un gnomon orizontal (fig. 79) perpendicular pe un perete, adică a tangentelor

$$\tau = h \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha.$$

Deși ulterior, în locul tangentelor și al cotangentelor se folosesc uneori rapoartele între sinusuri și cosinusuri, totuși mulți matematicieni adoptă inovația care simplifică mult calculele trigonometrice dacă există tabelele corespunzătoare. Chiar și la al-Habaș, aplicarea tangentei și a cotangentei iese din cuprinsul gnomonicei. Astfel, el exprimă relația dintre ascensia dreaptă α a Soarelui, declinația δ și înclinarea ε a eclipticii prin regula:

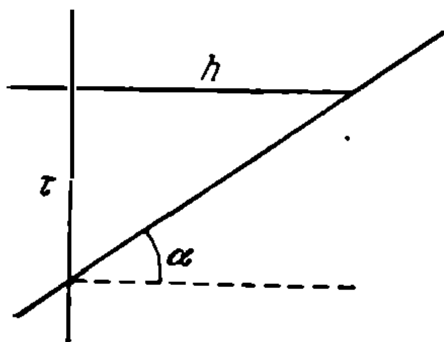


Fig. 79

$$\sin \alpha = \operatorname{tg} \delta \operatorname{ctg} \varepsilon.$$

Nu este exclus ca al-Habaș să se fi aflat sub influența operelor indiene despre calculul cu ajutorul umbrelor, dintre care una a fost amintită mai sus (p. 174), introducerea și tabularea tangentei și a cotangentei, precum și aplicarea lor în astronomie este însă incontestabil un fapt nou și aparține istoricului trigonometriei. Înseși denumirile umbrei *zill* și ale umbrei inverse *zill mak'us* probabil sînt traduse din limba sanscrită. În limba latină aceste denumiri se traduc ad litteram; așa de pildă, în traducerea latină a tabelelor lui al-Horezmi, efectuată de Adelard din Bath, se vorbește despre *umbra recta* (umbra directă) și *umbra versa* (umbra inversă). Termenul de tangentă e propus de-abia de T. Fink în anul 1583, iar termenul de cotangentă (și cosinus) — de E. Gunter în 1620.

În cazul gnomonului vertical, al-Habaș folosește și noțiunea de cosecantă „diametrul umbrei", pentru înălțimea dată a Soarelui,

ca ipotenuză. El întocmește pentru cosecantă un tabel din grad în grad. Interesul teoretic al funcțiilor cosecantă și al secantei este neînsemnat, dar aplicarea lor a avut o mare valoare practică pînă la inventarea logaritmilor, înlocuind împărțirea prin înmulțire, cu ajutorul tabelelor corespunzătoare. Aceste linii capătă o aplicare mai mare în literatura matematică europeană în secolele al XVI-lea — al XVII-lea; denumirea de „secantă“ e introdusă de T. Fink.

Mult timp după al-Horezmi și al-Habaș, în calculele astronomice se folosesc coardele concomitent cu sinusurile. Matematicienii întrebuințează și unele și altele chiar în aceeași lucrare, iar alții preferă să opereze numai cu coardele. Cu timpul, liniile trigonometrice se răspîndesc din ce în ce mai mult. O teorie destul de dezvoltată cu privire la ele se găsește la eminentul astronom și matematician Abu Abdalla Muhammed ibn Djabir ibn Sinan al-Battani (născut înainte de 858, decedat în 929) din Harran sau din apropierea acestei localități și la fel ca Tabit ibn Korra, provenit din sabeenii astrolatri. Al-Battani lucrase la ar-Rakka. În opera sa de astronomie *Perfecționarea Almagestului (Islah al-Madjisti)* [163], al-Battani aplică în mod sistematic liniile trigonometrice și consideră sinusul și sinusul-versus de la 0 pînă la 180°. Întrucît cosinusul se înțelegea ca sinusul complementului pînă la 90° și nu se folosesc numerele negative, de aceea, în al doilea sfert al cercului, sinusul-versus nu se definește ca diferența, ci ca suma $r + r \sin(\alpha - 90°)$. Dintre relațiile între liniile trigonometrice, al-Battani prezintă următoarele (de fapt, cunoscute încă de al-Habaș):

$$\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{r} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \frac{\operatorname{tg}\alpha}{r} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \frac{\sin\alpha}{r} = \frac{r}{\operatorname{cosec}\alpha},$$

$$\frac{\cos\alpha}{r} = \frac{r}{\sec\alpha}, \quad r\sec\alpha = \sqrt{r^2 + r^2\operatorname{tg}^2\alpha},$$

$$r\operatorname{cosec}\alpha = \sqrt{r^2 + r^2\operatorname{ctg}^2\alpha}, \quad \frac{\sin\alpha}{r} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sec\alpha}.$$

Bazele trigonometriei sînt expuse încă și mai sistematic în tratatul de astronomie al lui Abu-l-Vafa *Cartea perfectă (Kitab al-kamil)* [64]. În prefața la această carte, Abu-l-Vafa scrie: „În această carte am pășit pe o cale neurmată de nici unul dintre precursorii noștri; am evitat metodele cunoscute, dacă însușirea lor a fost dificilă pentru cei care le învățau, ca de pildă, metoda patrulaterului și regulile celor șase mărimi. Am mai adăugat și

unele propoziţii, neamintite de greci... Tabelele le-am calculat cu o minuţiozitate maximă“ [18, I, p. 55]. Despre lucrările de trigonometrie sferică şi de calcul al tabelelor vom vorbi mai departe. Aici vom observa doar că Abu-l-Vafa defineşte toate liniile trigonometrice în mod unitar într-un cerc; aşa de pildă, tangenta el nu o introduce printr-un triunghi dreptunghic, ci ca un segment al tangentei la cerc. El mai adaugă relaţia:

$$\frac{\text{tg}\,\alpha}{r} = \frac{r}{\text{ctg}\,\alpha}$$

şi formulează unele reguli luînd raza egală cu unitatea. Teorema sinusului sumei şi a diferenţei el o exprimă numai cu ajutorul sinusurilor (vezi p.326). Uneori el dă formule ale trigonometriei coardelor:

$$\frac{\text{crd}\,\alpha}{\text{crd}\,\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\,\text{crd}\left(180^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{1}.$$

Matematicienii ţărilor Islamului rezolvă triunghiurile rectilinii cu ajutorul unor mijloace minime, şi de aceea destul de greoi. Mult timp pentru a rezolva un triunghi oarecare, el se împarte după exemplul anticilor în două triunghiuri dreptunghice printr-o înălţime. Aşa găseşte de pildă al-Battani latura a, date fiind laturile b, c şi unghiul C opus uneia dintre ele (fig. 80). Mai întîi se determină înălţimea $AH = b \sin C$ şi segmentul $CH = b \cos C$, apoi celălalt segment al aceleiaşi laturi $BH = BC - HC$ şi, în sfîrşit, cu ajutorul teoremei lui Pitagora, folosind AH şi BH se determină latura a. Probabil că al-Battani nu cunoscuse teorema sinusurilor. Demonstraţia acestei teoreme pentru triunghiul plan o dă Abu Nasr Mansur ibn Ali ibn Irak (decedat între anii 1000 şi 1020), unul dintre traducătorii *Sfericei* lui Menelau, iar mai tîrziu — elevul său al-Biruni şi alţii.

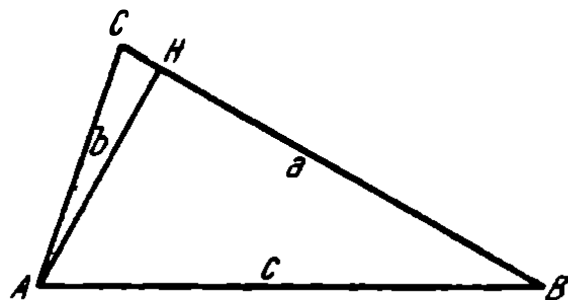


Fig. 80

După cum se ştie, rezolvarea unui triunghi cînd se dau două laturi şi unul din unghiurile opuse lor nu este posibilă totdeauna, iar dacă este posibilă, ea poate fi atît unică cît şi dublă. Asupra acestui lucru atrage atenţia Gabir ibn Afla. În Europa, complexi-

tatea acestui caz o remarcă Regiomontanus (secolul al XV-lea) și alții, iar analiza completă o face F. Viète.

Cazul în care sînt date laturile b, c și unghiul A dintre ele e redus la rezolvarea unor triunghiuri dreptunghice. Se calculau segmentele determinate de înălțime pe una din laturi și însăși înălțimea, iar apoi din triunghiul dreptunghic se determina cea de-a treia latură și încă un unghi. În fine, pentru a găsi unghiurile triunghiului cu laturile date, se ducea înălțimea pe una din laturi și după teoremele lui Euclid asupra pătratului laturii așezate în fața unghiului ascuțit sau obtuz se calculau segmentele determinate de înălțimi pe o latură.

Importanta teoremă a cosinusurilor

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

conținută în teoremele lui Euclid mai sus amintite (propozițiile 12 și 13 din cartea a II-a a *Elementelor*), rămîne de o parte. E drept că ea fusese aproape găsită de mai multe ori. Chiar al-Biruni o formulează în treacăt într-o problemă, fără a-i da însă prea multă importanță. Mult mai tîrziu, al-Kași exprimă pătratul laturii a, fiind date b, c și A, sub forma:

$$a^2 = (b \pm c \cos A)^2 + c^2 \sin^2 C$$

(semnul dublu apare deoarece cosinusul unghiului obtuz este considerat drept cosinusul suplimentului pînă la 180°). Ar fi fost suficient să se fi dezvoltat partea din dreapta a egalității pentru a obține formularea obișnuită a teoremei cosinusurilor. Totuși, într-o asemenea formulare, teorema de mai sus se întîlnește abia la F. Viète.

Aparatul formulelor trigonometrice rămîne tot timpul neînsemnat. Uneori, relații importante și simple nu se exprimă cu claritate suficientă pentru a căpăta caracterul unor reguli sau teoreme. De pildă, al-Kași dă regula de calcul a razei cercului înscris, avînd ca scop calculul ariei triunghiului

$$r = \frac{bc \sin A}{a + b + c},$$

considerînd-o ca o descoperire a sa. În exemplul imediat următor se spune că aria se obține dacă se înmulțește raza cu semiperimetrul

$$\frac{r(a + b + c)}{2}.$$

De aici rezultă imediat formula:

$$S = \frac{bc \sin A}{2},$$

şi totuşi, al-Kaşi nu formulează o regulă aparte pentru calculul ariei în funcţie de două laturi şi unghiul cuprins între ele, lucru pe care-l face de-abia W. Snellius în anul 1627.

La astronomul şi matematicianul Abu-l-Hasan Ali ibn abi Said Abd ar-Rahman ibn Ahmad ibn Iunis din Cairo (decedat în 1009), remarcabil observator şi întocmitor al unor vestite tabele astronomice, întîlnim o relaţie dedusă cu ajutorul proiecţiei ortogonale, echivalentă cu formula:

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)].$$

În secolul al XVI-lea, Tycho Brahe şi alţii folosesc această formulă pentru a înlocui înmulţirea prin adunare. Mai tîrziu, ea a început să slujească pentru a reduce suma cosinusurilor sau a sinusurilor la o formă calculabilă prin logaritm.

Un exemplu interesant, deşi foarte simplu din punct de vedere matematic, de folosire a trigonometriei în ştiinţele naturii este determinarea înălţimii atmosferei efectuată de ibn al-Haisam şi bazată pe faptul că amurgul continuă pînă cînd Soarele coboară cu mai mult de 19° sub orizont. Fie că N este un nor înalt, care după apusul soarelui reflectă o rază solară SN spre observatorul M (fig. 81). Unghiul dintre rază şi orizont este $\alpha = 19°$, iar $\sphericalangle LNO$ este egal cu $\sphericalangle MNO$ conform legii reflexiei. Din triunghiul dreptunghic OMN, unghiul $\sphericalangle MNO = 80°30'$ şi înălţimea atmosferei este:

$$h = \frac{r}{\sin 80°30'} - r.$$

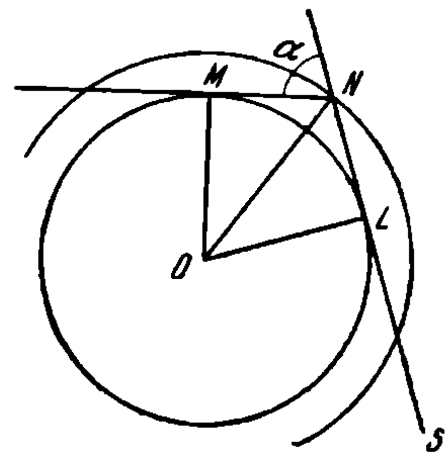


Fig. 81

Rezultatul lui ibn al-Haisam, bazat pe lungimea gradului de meridian măsurat în acele vremuri, era de circa 10—12 km. Desigur, acest rezultat este departe de realitate, fiindcă ibn al-Haisam neţinînd seama de refracţia razei solare, (ce-i era cunoscută),

a considerat că atmosfera se termină la înălţimea norilor vizibili ş.a.

Un alt exemplu analog de folosire a trigonometriei, de data aceasta în geografia matematică, îl găsim la al-Biruni. Abu Raihan Muhamed ibn Ahmed al-Biruni s-a născut în anul 973 într-o suburbie a oraşului Kiat, capitala Horezmului. Între anii 1010 şi 1017, împreună cu dascălul său Abu Nasr, cu vestitul filozof Ibn Sina şi cu alţii lucrează la Academia din Kiat, înfiinţată de şahul al-Mamun al II-lea, iar după ce sultanul Mahmud din Gazna cucereşte Horezmul în anul 1017, este nevoit să se mute la Gazna, devenită unul dintre cele mai mari centre cultural-ştiinţifice. Al-Biruni petrece cîţiva ani în India, a cărei parte de nord fusese cucerită de Mahmud. El studiază sanscrita şi în 1031 încheie o operă despre India, extrem de bogată în diferite materiale, conţinînd în cea mai mare parte informaţii despre descoperirile ştiinţifice ale indienilor în matematică şi astronomie. Afară de cartea despre India, printre numeroasele lucrări ale lui al-Biruni sînt deosebit de importante următoarele: lucrarea despre calendarele şi cronologia diferitelor popoare, scrisă în anul 1000, manualul de matematică şi astronomie, *Cartea învăţăturii despre începuturile artei cititului în stele (Kitab at-tafhim al-ava'il sina'at at tandjim)*, terminat între anii 1029 şi 1034 şi *Canonul lui Mas'ud despre astronomie şi stele (Al-Kanun al-Mas'udi fi-al-hai'a vanudjum)*, terminat în 1030. Titlul ultimei lucrări este legat de numele sultanului Mas'ud al Gaznei, fiul lui Mahmud, căruia îi fusese închinată cartea. Al-Biruni lucrează în toate domeniile ştiinţelor naturii şi tot lui îi aparţin tratate de fizică, farmacologie şi medicină. El moare în anul 1048 [165].

Canonul lui Mas'ud [166, 167] este foarte important pentru istoria trigonometriei. În el, autorul face un bilanţ al lucrărilor numeroşilor săi precursori şi al observaţiilor şi al calculelor sale personale. *Canonul* este format din 11 cărţi. Cărţile I—II cuprind chestiuni de cronologie şi de calendar.

Cartea a III-a din *Canon* este consacrată trigonometriei şi este alcătuită din 10 capitole. În cap. I se calculează lungimile laturilor următoarelor figuri geometrice regulate, înscrise; triunghi, pătrat, pentagon, hexagon, octogon şi decagon; calculul se face pe baza construirii coardelor respective cu ajutorul compasului şi al riglei. În cap. II se demonstrează teoreme despre coarde echivalente cu teoremele sinusului sumei a două unghiuri, ale sinusului diferenţei a două unghiuri, a sinusului unghiului dublu, a sinusului unghiului pe jumătate etc. În cap. III se constru-

ieşte latura unui nonagon regulat. Al-Biruni rezolvă această problemă cu ajutorul soluţiei unor ecuaţii de gradul al treilea (vezi p. 273) şi al unui proces special de iteraţie (vezi p. 328). Cap. IV este consacrat problemei mai generale a trisecţiunii unghiului; aici se prezintă 12 procedee de trisecţiune a unghiului cu ajutorul unui adaos şi procedee analoge propuse de diferiţi matematicieni de la Arhimede pînă la al-Biruni. Tot aici se calculează coarda de 1° egală cu dublul sinusului de 1/2°. Pe baza rezultatelor din acest capitol, în capitolul V se calculează raportul între diametru şi circumferinţă. Cap. VI conţine tabelele sinusurilor, ale căror reguli de utilizare se expun în cap. VII. Printre aceste reguli se află şi regulile de interpolare liniară şi pătratică (vezi p. 329). În cap. VIII se consideră tangentele şi cotangentele şi se prezintă tabelele tangentelor şi regulile pentru folosirea lor, în particular, aceleaşi reguli de interpolare liniară şi pătratică. Tot în acest capitol se demonstrează teorema sinusurilor din trigonometria plană. Cap. IX şi X sînt consacrate trigonometriei sferice. În particular, el demonstrează aici teorema sferică a sinusurilor.

Obiectul cărţii a IV-a îl constituie problemele de astronomie sferică şi de gnomonică, iar al cărţii a V-a — de geodezie. Cărţile a VI-a — a XI-a sînt consacrate îndeosebi problemelor de astronomie (mişcarea şi fazele Lunii, cataloage stelare, mişcarea planetelor etc.).

În cap. VII al cărţii a V-a a *Canonului* se expune un nou procedeu pentru calculul lungimii meridianului terestru. Prima măsurare a unui grad de meridian, în ţările Islamului, se efectuează după cum s-a mai spus, în timpul lui al-Mamun. Pentru aceasta, două grupe de învăţaţi efectuează măsurători cu ajutorul unor sfori, pe un teren plan, de-a lungul meridianului spre nord şi spre sud. Rezultatele ambelor măsurători s-au comparat şi pentru un grad au dat valoarea de $56\frac{2}{3}$ de mile arabe, adică circa 113 km. Pentru a verifica această valoare, al-Biruni, fiind în India, se urcă pe un munte ridicat deasupra unui şes întins, mai neted, după cum spune el, decît suprafaţa mării şi cu ajutorul unui astrolab calculează aşa numita depresie orizontală, adică unghiul α (fig. 82), găsindu-l egal cu 34′. După înălţimea muntelui, egală cu $h = 652{,}05$ coţi

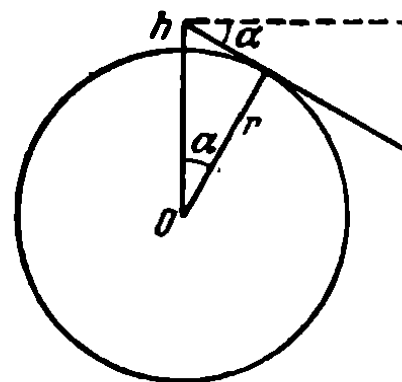


Fig. 82

(un cot este aproximativ 0,5 *m*) și depresia α, al-Biruni deduce din proporția $r:h = \cos\alpha:(1 - \cos\alpha)$ că raza Pămîntului este egală cu 1081 farsangi. De aici el găsește că circumferința Pămîntului este de 6800 farsangi și deoarece 1 farsang este egal cu 3 mile, capătă pentru un grad $56\frac{2}{3}$ mile, ca și învățații din secolul al IX-lea.

Trigonometria sferică. Problemele de trigonometrie sferică cu aplicație directă în astronomie se află, desigur, pe primul plan. Încă Ptolemeu rezolvase cele patru cazuri ale triunghiului dreptunghic cunoscînd: 1) două catete, 2) o catetă și ipotenuza, 3) ipotenuza și unghiul adiacent și 4) o catetă și unghiul opus. El reducea la acestea cazul triunghiurilor oarecare cu care avea de-a face. Pentru rezolvare servea teorema lui Menelau despre patrulaterul complet — o figură formată de triunghiul ABE și arcul DFC (în cazul plan — o dreaptă) al cercului mare, care intersectează laturile AB, BE și EA, respectiv în punctele D, F și C. După cum se știe, în acest caz au loc egalități de forma:

$$\sin AE \cdot \sin CD \cdot \sin BF = \sin AC \cdot \sin DF \cdot \sin BE$$

(în plan, sinusurile arcelor se înlocuiesc prin segmente de dreaptă). Autorii arabi numeau teorema lui Menelau regula celor șase mărimi și la fel cu cei antici o exprimă cu ajutorul unor rapoarte compuse.

Aceleași cazuri ale triunghiului dreptunghic le rezolvă la început și astronomii arabi. Dar încă Tabit ibn Korra și al-Battani au mers mai departe, exprimînd în mod explicit teorema sinusurilor pentru cazul particular al triunghiului dreptunghic $\sin a: \sin A = \sin b: \sin B$. Desigur, această teoremă se obține imediat din cele două relații care leagă sinusurile catetelor de sinusul ipotenuzei, dar era important ca ea să fie desprinsă ca o propoziție aparte. Într-o problemă, al-Battani obținuse o relație, care numai formal se deosebește de una din cele mai importante teoreme ale trigonometriei sferice, și anume, teorema cosinusurilor:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \sin c \cos A, \qquad (1)$$

care permite să se calculeze un unghi în funcție de trei laturi date sau o latură în funcție de celelalte două și unghiul dintre ele. Problema lui al-Battani se referă la primul caz: în ea se cere să se găsească azimutul Soarelui după declinația și înălțimea lui și după înălțimea polului. Un rezultat similar există

și la ibn Iunis. Totuși, matematicienii țărilor Islamului nu dădură atenție acestei relații. Teorema cosinusului a fost extrasă din lucrarea lui al-Battani și apreciată după merit doar de Regiomontanus, care o denumește „teorema lui Albategnia" („teorema lui al-Battani").

Succese esențiale au fost obținute în simplificarea rezolvării triunghiurilor, întrucît aplicarea teoremei lui Menelau și specializarea ei pentru diferite cazuri sînt destul de laborioase. În acest sens se făcuseră primii pași încă în timpul lui al-Battani. An-Nairizi și Abu-l-Vafa au separat un caz, cînd $AC = CD = 90°$ și l-au aplicat în rezolvarea triunghiurilor dreptunghice. Prin aceasta se obține regula celor patru mărimi (cunoscută de altfel și de Menelau):

$$\frac{\sin DF}{\sin AE} = \frac{\sin BF}{\sin BE}.$$

Aceiași matematicieni exprimaseră și așa-numita teoremă a tangentelor:

$$\frac{\operatorname{tg} DF}{\operatorname{tg} AE} = \frac{\sin BD}{\sin AB}.$$

În sfîrșit, se stabilește și teorema generală a sinusurilor:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C},$$

demonstrată în diferite feluri de an-Nairizi, Abu-l-Vafa, al-Hodjani și Abu Nasr. Folosirea noilor teoreme ușurează mult rezolvarea cazurilor cunoscute ale triunghiului dreptunghic, iar teorema sinusurilor fu numită „teorema care scutește de patrulaterul complet" [169 p. 167].

Toate cazurile triunghiului sferic sînt în întregime rezolvate în secolele al XII-lea — al XIII-lea. Rezolvarea triunghiului, pentru cateta a și unghiul adiacent B dat, o obține în vestul îndepărtat, Gabir ibn Afla. El introduce o relație echivalentă cu formula

$$\cos \alpha = \cos a \cdot \sin B,$$

numită mai tîrziu, în traducerile latine, regula lui Gheber (Gabir ibn Afla).

Ultimul caz — triunghiul dreptunghic cu unghiurile A și B date — a fost rezolvat de Nasireddin at-Tusi cu ajutorul formulei:

$$\cos c = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta.$$

Tratatul lui Nasireddin at-Tusi despre patrulaterul complet. Marele învățat oriental în domeniul trigonometriei, Abu Djafar Muhammed ibn Muhammed ibn al-Hasan Nasireddin at-Tusi, s-a născut în anul 1201 în importantul centru cultural Tusa din Horasan [168, 151]. După mărturia unui cronicar, străbunii lui proveneau din Hamadan. At-Tusi locuiește timp de mulți ani în patria sa, vizitează. o dată Bagdadul, iar la vîrsta de 50 de ani îl găsim în Kuhistan la curtea conducătorului statului hașișinilor-assasini. După cucerirea Kuhistanului de către mongoli, noul stăpînitor al Iranului, Hulagu-han, și-l apropie pe at-Tusi, și sfătuit de acesta construiește un observator, în noua sa capitală Maraga. În Observatorul de la Maraga, deschis în anul 1259, at-Tusi se află în fruntea unui mare grup de învățați aduși din Damasc, Mosul, Kazvin, Tbilisi și alte locuri; acolo lucrează chiar și astronomi chinezi. După felul utilării, bogăția bibliotecii și amploarea activității, acest observator este unul dintre cele mai bune din evul mediu. Rezultatul activității intense duse la acest observator sînt tabelele, denumite în cinstea hanului tabelele lui Elhan *(Zidj Ilhani)*. Nasireddin moare în anul 1274, în timp ce călătorea spre Bagdad.

At-Tusi este autorul multor zeci de cărți originale, traduceri și comentarii. Despre lucrările lui referitoare la teoria rapoartelor și teoria paralelelor s-a mai vorbit înainte. Vom face cunoștință acum cu principala lui lucrare *Kitab aș-șakl al-kita'*, adică cu cartea despre figura alcătuită din secante[1], purtînd astăzi, de obicei, titlul de *Tratat despre patrulaterul complet* [169].

Tratatul despre patrulaterul complet este scris în limba persană și tradus în 1260 în arabă chiar de autor, probabil pentru nevoile Observatorului din Maraga. Tratatul ocupă un loc excepțional în istoria trigonometriei. Mai întîi, această operă este prima lucrare în care teoria rezolvării triunghiurilor se tratează ca știință independentă, deoarece înainte vreme, noțiunile de trigonometrie se prezentau în cărțile de astronomie, ca pur auxiliare. În al doilea rînd, tratatul lui at-Tusi reprezintă prima lucrare foarte completă și unitară a întregului sistem al trigonometriei, începînd cu noțiunile și relațiile de bază și terminînd cu algoritmul de rezolvare a tuturor problemelor tipice. Autorului îi aparțin rezultate importante, îndeosebi, rezolvarea triunghiurilor oarecare în cele mai dificile cazuri — cunoscînd trei la-

---

[1] Cuvîntul *șakl* înseamnă și „figură" și „propoziție" (în sensul lui Euclid) iar *kita* înseamnă secante — *N.A.*

turi sau trei unghiuri. În fine, *Tratatul* lui at-Tusi are o influență hotărîtoare asupra dezvoltării trigonometriei în Europa [170].

Tratatul cuprinde cinci cărți. Cartea I, în care autorul îl urmează pe Ommar Khayyam, conține teoria rapoartelor compuse (vezi p. 402). În cartea a II-a se dau cîteva variante de demonstrații a teoremei lui Menelau pentru diferite tipuri de patrulater complet, plan. Demonstrațiile sînt simple și rezultă toate din asemănarea triunghiurilor care se obțin dacă dintr-un punct oarecare al intersecției a două laturi se duce paralela la una din laturile ce trec prin acest punct, pînă la întîlnirea cu o altă latură. În cartea a III-a se introduce noțiunea de sinus și cosinus a arcului și se demonstrează teoremele auxiliare; în particular, se rezolvă probleme de calcul a două arce după suma sau diferența lor și după raportul sinusurilor lor (ambele există și la Ptolemeu). Tot aici se dă rezolvarea triunghiurilor plane, mai întîi dreptunghice și apoi oarecare, subliniindu-se că, printre elementele date, unul trebuie să fie o latură. At-Tusi distinge două procedee: cu ajutorul arcelor și al coardelor sau cu ajutorul arcelor și al sinusurilor; pentru aplicarea arcelor și a sinusurilor se demonstrează teorema sinusurilor. În această privință autorul nu aduce nimic nou; ca și în alte lucrări din acele timpuri, lipsește analiza cazului echivoc al triunghiului oarecare. Obiectul cărții a IV-a îl formează teorema lui Menelau pentru triunghiul sferic; ea se deduce cu ajutorul unei construcții simple din teorema patrulaterului plan și al unor propoziții auxiliare din cartea a III-a. Propoziția

$$\frac{\sin CE}{\sin EA}=\frac{\sin CF}{\sin FD}\cdot\frac{\sin DB}{\sin BA}$$

at-Tusi o numește teorema explicită a lui Ptolemeu, iar

$$\frac{\sin CA}{\sin AE}=\frac{\sin CD}{\sin DF}\cdot\frac{\sin FB}{\sin BE}$$

— teorema implicită. La sfîrșitul cărții a IV-a se explică importanța teoremei patrulaterului complet în determinarea unor arce, obținute prin intersecția cercurilor mari pe sferă, cu altele. At-Tusi spune că cei antici o folosiseră cu deplină siguranță.

„Dar mulți dintre învățații de mai tîrziu, fiindu-le teamă să nu se încurce în cercetarea diferitelor rapoarte și varietăți ale acestora, demonstrează alte teoreme pentru a înlocui patrulaterul

complet și a obține folosul ce rezultă din el, fără să recurgă la numeroasele cazuri de rapoarte compuse" [169, p. 127]. Cartea a V-a este consacrată tocmai rezolvării triunghiurilor sferice cu ajutorul „unor metode care înlocuiesc patrulaterul". Ea începe cu o clasificare amănunțită a 10 tipuri principale de triunghiuri sferice în funcție de unghiurile lor (ascuțite, drepte sau obtuze) sau de laturile lor (mai mici, egale sau mai mari decît un sfert de cerc mare). După aceasta, at-Tusi trece la deducerea celor două teoreme fundamentale — teorema sinusurilor și teorema tangentelor. Este caracteristică denumirea arabă a primei teoreme *aș-șakl al-mukni*, ceea ce înseamnă ad-litteram „propoziție suficientă", adică o propoziție cu ajutorul căreia ne putem lipsi de patrulaterul complet. At-Tusi prezintă numeroase demonstrații ale acestor teoreme date de precursorii săi, bazîndu-se pe expunerea lor făcută de al-Biruni, pe care-l numește, cu respect, mare dascăl și învățat; concomitent, el introduce noțiunile de tangentă, cotangentă, secantă și cosecantă. Apoi at-Tusi prezintă demonstrații proprii foarte simple pentru teorema sinusurilor și teorema tangentelor, bazate pe o variantă a teoremei lui Menelau, numită regula celor patru mărimi.

Demonstrînd teorema tangentelor pentru triunghiul dreptunghic sub forma: raportul între tangenta catetei și tangenta unghiului opus este egal cu raportul între sinusul celeilalte catete și sinusul unghiului drept $\left(\frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} B} = \sin a\right)$, at-Tusi deduce ca aplicații din această teoremă o serie de consecințe. Astfel, el descompune triunghiul oarecare ABC prin înălțimea CB (fig. 83) și obține teoremele $\frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B} = \frac{\sin BD}{\sin AD}$, $\frac{\operatorname{tg} C_1}{\operatorname{tg} C_2} = \frac{\operatorname{tg} AD}{\operatorname{tg} BD}$, precum și unele urmări ale lor. At-Tusi arată că mulți evită teorema tangentelor, datorită faptului că diferențele tangentelor mai mari de 45° cresc repede și din această cauză interpolarea tabelelor devine dificilă; în regulile propuse de el nu există un asemenea pericol și ne putem limita la tangente mai mici decît unitatea. În ultimul capitol al cărții se expun procedeele de rezolvare a triunghiurilor sferice. Mai întîi se analizează toate cele șase cazuri ale triunghiului dreptunghic, unul din ele fiind rezolvat de autor, așa după cum am amintit

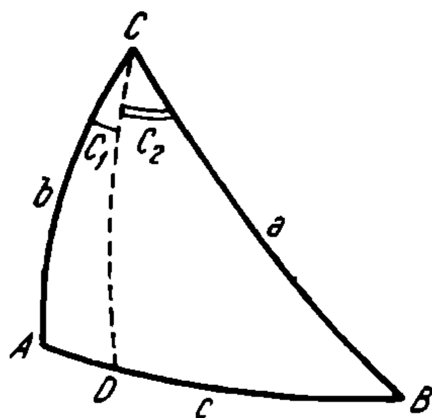


Fig. 83

mai sus. Separat se prezintă soluțiile bazate pe teorema sinusurilor sau pe teorema tangentelor. În sfîrșit, cu ajutorul acelorași mijloace minime se rezolvă triunghiurile oarecare. Ne vom opri la două din cazurile cele mai dificile în care se dau trei laturi sau trei unghiuri. În primul caz, analizat încă de al-Battani (vezi p. 318), at-Tusi dă un procedeu personal; rezolvarea celui de-al doilea caz apare aci pentru prima oară în istoria trigonometriei.

Fie că în triunghiul ABC sînt date toate laturile. Prelungim laturile AB și AC pînă la AD și AE, egale cu un sfert de cerc mare, — iar latura BC pînă la intersecția în punctul F cu arcul de cerc mare DE prelungit, (vezi fig. 84). După teorema sinusurilor avem:

$$\frac{\sin CF}{\sin BF}=\frac{\sin CE}{\sin BD},$$

iar după diferența cunoscută a arcelor CF și BF (adică BC) și raportul sinusurilor lor se pot calcula aceste arce. Acum, în triunghiurile dreptunghice BDF și CEF se cunosc catetele $BD = 90^\circ - AB$, $CE = 90^\circ - AC$ și ipotenuzele. De aici se deduc DF și EF, iar diferența lor DE măsoară unghiul A. Celelalte unghiuri se găsesc la fel.

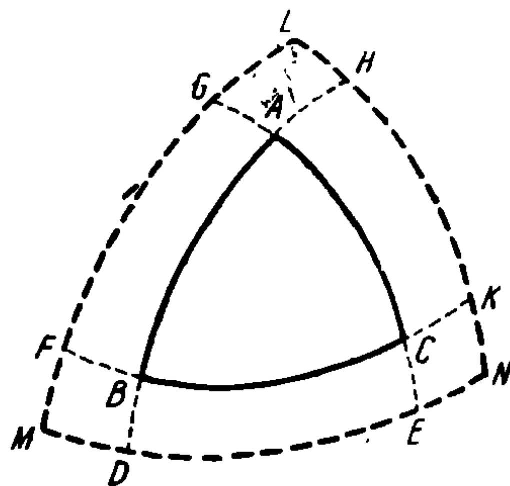


Fig. 84

Dacă într-un triunghi ABC cu laturile mai mici decît un sfert de cerc mare (fig. 84) se dau unghiurile, atunci at-Tusi completează de două ori fiecare din laturi pînă la un sfert de cerc mare: AB pînă la AD și BH, BC pînă la BK și CF, AC pînă la CG și EA, apoi duce cercurile mari prin perechile de puncte D, E, F, G, K, H, și în fine construiește triunghiul LMN cu vîrfurile situate în punctele de intersecție ale acestor cercuri. Triunghiul LMN a căpătat ulterior denumirea de triunghi polar al triunghiului ABC dat, fiindcă laturile lui au ca poli vîrfurile triunghiului dat. Triunghiul ABC dat este la rîndul său polar în raport cu LMN, iar unghiurile fiecăruia completează pînă la 180° laturile respective ale celuilalt. De exemplu, deoarece $MD = EN = 90^\circ - DE = 90^\circ - \sphericalangle A$, de aceea $MN = 180^\circ - \sphericalangle A$; tot astfel, fiindcă $BF = CK = 90^\circ - BC$, de aceea $\sphericalangle L = FK = 180^\circ - BC$. Rezolvînd triunghiul LMN în funcție

de laturile lui, at-Tusi poate exprima apoi laturile triunghiului ABC prin unghiurile L, M, N. El mai amintește și cazul în care latura triunghiului ABC este mai mare decît un sfert de cerc mare.

Tratatul lui Nasireddin at-Tusi, după cum am mai spus, a jucat un rol important în dezvoltarea matematicii în Europa. Regiomontanus împrumută multe lucruri din el pentru lucrarea sa *Cinci cărți despre tot felul de triunghiuri*, publicată postum, în anul 1533 și care stă la baza lucrărilor ulterioare de trigonometrie [170]. Triunghiul polar a fost introdus în Europa de către W. Snellius în secolul al XVII-lea.

Tabele trigonometrice. Pentru rezolvarea triunghiurilor sînt necesare tabele trigonometrice. Asemenea tabele intră în componența așa-numitelor *zidjuri*. Cuvîntul *zidj*, luat din limba persană, înseamnă în limba arabă culegere de tabele pentru astronomi și geografi. De regulă, *zidjurile* sînt alcătuite din descrierea calendarelor, uneori foarte amănunțită, și cuprinzînd calendarele musulman, sirian, persan, ebraic, indian, creștin, chinezesc ș.a., din informații cronologice ale diferitelor țări, din tabele trigonometrice, cataloage de stele, precum și diferite tabele astronomice. Afară de aceasta, *zidjurile* conțin indicații mai mult sau mai puțin amănunțite despre rezolvarea problemelor fundamentale de măsurare a timpului și despre calculul mișcărilor vizibile ale corpurilor cerești, eclipsele solare și de lună etc. Uneori asemenea indicații sînt însoțite de fundamentări teoretice și demonstrații, inclusiv și deducerea regulilor trigonometrice.

Din secolele al VIII-lea — al XV-lea se păstrează (sau se cunosc) peste 100 de *zidjuri*, aproximativ 20 dintre ele fiind fundate pe observațiile autorilor [171]. Este interesantă împărțirea lor după regiuni și secole. În secolul al VIII-lea, cîteva *zidjuri* sînt întocmite în Irak și unul în India. În secolul al IX-lea, cel mai mare număr de *zidjuri* noi apare în Irak, cîteva în Siria și Iran, iar după acest secol, majoritatea lor sînt de origine iraniană. De la sfîrșitul secolului al IX-lea și în secolul al X-lea unele *zidjuri* se întocmesc în Egipt și în țările mauritane din Europa (îndeosebi în secolul al XI-lea și începutul secolului al XII-lea), cinci — în Asia centrală și unul — în Afganistan. Aceste date statistice caracterizează în parte activitatea astro-

nomilor în diferitele țări ale Islamului, dar nu trebuie pierdute din vedere calitatea și importanța unor *zidjuri*, precum și imprecizia hotarelor, de pildă, între Iranul de atunci și vecinii săi. Dintre cele mai complete, sînt *zidjul* lui Nasireddin at-Tusi, *Canonul lui Mas'ud* întocmit de al-Biruni la Gazna, *zidjul* compus în jurul anului 1120 la Merv de Abu-l-Fath Abd-ar-Rahman al-Hazani al-Marvazi, fost elev al lui Ommar Khayyam, mare fizician și astronom de origină greacă, precum și *zidjul* elaborat la Observatorul lui Ulug-bek, din Samarkand.

Cele mai vechi tabele antice compuse în califat pe baza *siddhantalelor* indiene nu s-au păstrat aproape de loc. *Zidjul* lui Muhammed ibn Musa al-Horezmi cuprinde tabelele sexagesimale ale sinusurilor din grad în grad cu trei cifre semnificative (pentru raza egală cu 60) și tabelele cotangentelor cu un semn fracționar [117]. *Zidjul* lui al-Habaș al-Hasib conține valorile sinusurilor, tangentelor, cotangentelor, sinusurilor-versus și ale cosecantelor din grad în grad, cu aceeași precizie. Într-un alt manuscris, ajuns pînă la noi, sub numele acestui învățat, sinusul este dat pentru fiecare sfert de grad, cu patru cifre semnificative, iar tangenta pentru fiecare jumătate de grad, cu două cifre. Trebuie avut în vedere că tabelele lui al-Habaș al-Hasib, ca și tabelele lui al-Horezmi ne sînt cunoscute doar sub forma unor prelucrări mai tîrzii.

Exactitatea primelor tabele arabe este aproximativ aceeași ca și în tabelul coardelor lui Ptolemeu.

Procedeul de calcul al tabelelor lui Ptolemeu dă o eroare sensibilă încă la terții [18, *I*]. Un procedeu nou și mai elastic pentru calculul tabelelor îl propune Abu-l-Vafa. Acesta este de asemenea un anumit procedeu de interpolare, permițînd ca în calculul lui sin $1/2^\circ$ să se evite rezolvarea ecuației trisecțiunii unghiului și să se obțină evaluări destul de apropiate prin adaos și lipsă. În primul rînd se găsesc sinusurile a trei arce apropiate de $1/2^\circ$, și anume: $\frac{12^\circ}{32}$, $\frac{15^\circ}{32}$ și $\frac{18^\circ}{32}$ cu intervale de $\frac{3^\circ}{32}$. Aceste sinusuri se pot găsi din sin 36° și sin 60° cu ajutorul unor operații raționale și al extragerii rădăcinii pătrate, cerută de formula sinusului arcului pe jumătate. Valoarea $\sin\frac{12^\circ}{32}=\sin\frac{72^\circ-60^\circ}{32}$ se

află cu ajutorul formulei sinusului diferenței; Abu-l-Vafa o scrie pe aceasta din urmă, fără a folosi cosinusurile sub forma

$$\sin(\alpha - \beta) = \sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\alpha \sin^2\beta} - \sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\alpha \sin^2\beta}$$

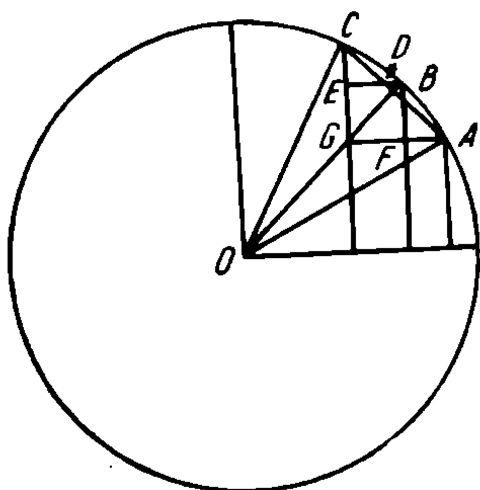


Fig. 85

Interpolarea lui Abu-l-Vafa se bazează pe o teoremă din comentariul lui Teon din Alexandria la *Almagest*, care în termeni trigonometrici sună astfel: la o creștere continuă a argumentului, diferențele sinusurilor se micșorează. Într-adevăr, (fig. 85), dacă arcele AB și BC sînt egale între ele, atunci segmentul CD de coardă este mai mic decît segmentul AD și teorema rezultă imediat din proporția:

$$\frac{CE}{BF} = \frac{CD}{DA} < 1.$$

Scriind inegalitățile:

$$\sin(\varphi + 3h) - \sin(\varphi + 2h) < \sin(\varphi + h) - \sin\varphi < \sin\varphi - \sin(\varphi - h),$$

$$\sin(\varphi + 2h) - \sin(\varphi + h) < \sin(\varphi + h) - \sin\varphi < \sin(\varphi - h) - \sin(\varphi - 2h),$$

$$\sin(\varphi + h) - \sin\varphi = \sin(\varphi + h) - \sin\varphi < \sin(\varphi - 2h) - \sin(\varphi - 3h$$

și adunîndu-le termen cu termen, obținem:

$$\sin\varphi + \frac{1}{3}[\sin(\varphi + 3h) - \sin\varphi] < \sin(\varphi + h) < \sin\varphi +$$
$$+ \frac{1}{3}[\sin\varphi - \sin(\varphi - 3h)]$$

Pentru $\varphi = \frac{15}{32}$, $h = \frac{1}{32}$, ultimele inegalități dau limitele:

$$\sin\frac{15^\circ}{32} + \frac{1}{3}\left(\sin\frac{18^\circ}{32} - \sin\frac{15^\circ}{32}\right) < \sin\frac{1^\circ}{2} <$$
$$< \sin\frac{15^\circ}{32} + \frac{1}{3}\left(\sin\frac{15^\circ}{32} - \sin\frac{12^\circ}{32}\right).$$

Luînd media aritmetică a valorilor din stînga și dreapta, Abu-l-Vafa obține pentru raza 60

$$\sin\frac{1^\circ}{2} = 31'24''55'''545^{IV}5^{V}.$$

Această valoare este justă pînă la cvarte, deoarece cu o exactitate pînă la cvintă avem $\sin\frac{1^\circ}{2} = 31'24''55'''54^{IV}0^{V}$. În fracții zecimale, aproximarea lui Abu-l-Vafa va fi 0,008 726 537 3 în locul valorii corecte 0, 008 726 535 5 și este exactă pînă la 10^{-8}. Eroarea obținută prin procedeul lui Abu-l-Vafa, adică:

$$\sin\frac{1}{2} - \left[\sin\frac{15^\circ}{32} + \frac{1}{6}\left(\sin\frac{18^\circ}{32} - \sin\frac{12^\circ}{32}\right)\right],$$

este de 47 cvinte; la matematicianul din Bagdad ea este de 55 cvinte, din cauza inexactității cvintelor din datele inițiale.

Tabelele sinusurilor lui Abu-l-Vafa au intervalul de 15'. El întocmește și tabelele de tangente și cotangente.

Calcule trigonometrice remarcabile efectuează ibn Iunis în *Zidj al-Hakimi*, intitulat astfel în cinstea emirului al-Hakim din Cairo. Ibn Iunis calculează independent sinusul de 1°, îmbunătățind oarecum procedeul lui Ptolemeu. În primul rînd Iunis pleacă de la valori ale argumentului mai apropiate de 1°. După sin 18° și sin 15° se calculează $\sin\frac{9^\circ}{8}$ și $\sin\frac{15^\circ}{16}$. Limitele obținute în felul acesta după procedeul lui Ptolemeu pentru sin 1° diferă numai prin $5'''6^{IV}$. Mai departe, ibn Iunis împarte această mărime în părți proporționale cu raportul diferenței arcelor $\left(\frac{9}{8} - 1\right) : \left(1 - \frac{15}{16}\right) = 2:1$ și obține pe această cale $\sin 1^\circ = 1;\ 2'49''43'''28^{IV}$. El mai precizează această valoare comparînd valorile sin (3° — 1°) și sin (2·1°). Valoarea definitivă $\sin 1^\circ = 1;\ 2'49''43'''4^{IV}$ diferă de cea adevărată cu 7 cvarte și ceva, iar în fracții zecimale este exactă pînă la 10^{-7}. Tot atît de exacte în *Zidj al-Hakimi* sînt și tabelele sinusurilor cu intervalul de 1'. Ibn Iunis mai întocmește și tabele de sinusuri cu un interval de 1". Tabelele lui pentru tangente, cu un interval de 1', nu au fost încă studiate [167].

În cartea a III-a din *Canonul lui Mas'ud*, al-Biruni calculează de asemenea sinusul de 1° pînă la cvarte și dă un tabel foarte exact al sinusurilor și al tangentelor, în care, trebuie spus, raza se ia egală cu unitatea. Al-Biruni motivează [1] în mod expres o

---

[1] În Europa acest lucru îl propune pentru prima oară T. Bradwardinus în secolul al XIV-lea. Raza unitară a cercului trigonometric intră în utilizare generală în secolul al XVIII-lea, mulțumită, îndeosebi, lui L. Euler — *N.A.*

asemenea alegere prin dorința de a se elibera de nevoia permanentă de a înmulți și de a împărți prin $r = 60$ [1].

Un interes deosebit îl prezintă metoda aproximativă de calcul a lui al-Biruni. Eroarea calculelor lui Abu-l-Vafa și Ptolemeu depinde de valorile inițiale ale sinusurilor alese și ale diferențelor lor și ele nu formează o succesiune de aproximări convergentă către valoarea exactă a mărimii căutate. Al-Biruni folosește diferite procedee pentru aproximații consecutive, a căror eroare poate fi făcută oricît de mică. Din păcate, al-Biruni n-a lăsat o descriere a procedeului său de rezolvare numerică a ecuației de gradul al treilea. În schimb, cunoaștem un alt procedeu foarte simplu al lui pentru calculul laturii nonagonului sau al coardei de 40°. Ca valori inițiale pentru calcule servesc:

$$\text{crd } 30° = 31'3''29'''49^{IV}36^{V}, \quad \text{crd } 12° = 12'32''37'''17^{IV}46^{V}.$$

Mai departe, cu ajutorul regulilor trigonometrice se găsesc coardele de $30° + 12° = 42°$ și $\frac{42°}{4} = 10\frac{1°}{2}$, apoi de

$$30° + 10\frac{1°}{2} = 40\frac{1°}{2} \text{ și } \frac{40\frac{1°}{2}}{4} = 10\frac{1°}{8}, \text{ pe urmă de}$$

$30° + 10\frac{1°}{8} = 40\frac{1°}{8}$ și $\frac{40\frac{1°}{8}}{4} = 10\frac{1°}{32}$ etc., adică valorile coardelor pentru $a_n = 40° + \frac{2°}{4^n}$, unde $n = 0,1,2, \ldots$ Al-Biruni se oprește la coarda de $40°24^{IV}$, obținînd valoarea $41'2''32'''42^{IV}29^{V}$, sau mai exactă pînă la cvarte.

Pentru a obține sinusul de 1°, al-Biruni, calculează în particular latura nonagonului regulat înscris ca coardă a arcului de 40°. Am văzut (p. 273) că el reduce această problemă, prin două procedee, la o ecuație de gradul al treilea de forma:

$$x^3 = 3x + 1,$$

sau de forma:

$$x^3 + 1 = 3x.$$

[1] Trebuie observat că în calculul sexagesimal, raza egală cu 60 joacă, în esență, același rol ca și raza noastră unitară, înmulțirea sau împărțirea prin 60 corespunde la simpla mărire sau micșorare cu un rang a deînmulțitului — *N.A.*

Rădăcinile acestor ecuații el le calculează în fracții sexagesimale, pînă la cvinte, ceea ce corespunde la opt zecimale. Sinusul de 1° este la al-Biruni $1'2''49'''43^{VI}$, adică e corect pînă la cvarte.

Tabelele de sinusuri sînt întocmite la al-Biruni la fel ca la Abu-l-Vafa pentru fiecare 15′, iar tabelele tangentelor din grad în grad. Afară de interpolarea liniară, de uz general, încă de pe vremea lui Ptolemeu, al-Biruni aplică aici interpolarea pătratică, folosită, după cum am văzut, la începutul secolului al VII-lea în calculele calendaristice de astronomii chinezi (pp. 107—110). Dar spre deosebire de regula chinezilor, reprezentînd un caz particular al formulei lui Newton — Sterling, regulile recomandate de al-Biruni sînt următoarele:

$$\sin x = \sin x_0 + (x - x_0)\frac{\sin(x_0 + 15') - \sin x_0}{15'} +$$

$$+ (x - x_0)^2 \frac{\dfrac{\sin(x_0 + 15') - \sin x_0}{15'} - \dfrac{\sin x_0 - \sin(x_0 - 15')}{15'}}{15'}$$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0 + (x - x_0)\frac{\operatorname{tg}(x_0 + 1°) - \operatorname{tg} x_0}{1°} +$$

$$(x - x_0)^2 \frac{\dfrac{\operatorname{tg}(x_0 + 1°) - \operatorname{tg} x_0}{1°} - \dfrac{\operatorname{tg} x_0 - \operatorname{tg}(x_0 - 1°)}{1°}}{1°}.$$

Acesta nu este începutul unei formule exacte de interpolare, ci o oarecare modificare a dezvoltării în serie de puteri, cu înlocuirea derivatelor prin rapoartele diferențelor corespunzătoare și a coeficientului $\frac{1}{2}$ al termenului pătratic, prin 1. Este evident că al-Biruni își obține regula printr-un raționament abstract. Sub raport practic, încercarea lui e nereușită, deoarece pentru o funcție crescătoare, al treilea termen al regulii lui are un semn contrar celui de-al treilea termen din formula exactă de interpolare. De aceea, dacă se calculează „valorile precizate“ după al-Biruni (el însuși n-a făcut aceasta), ele vor fi mai puțin exacte decît valorile obținute de dînsul cu ajutorul interpolării liniare.

Expunînd regula de interpolare a tabelelor sinusurilor și a tangentelor, al-Biruni spune că ea este aplicabilă „pentru toate tabelele“, adică pentru tabelele trigonometrice și astronomice cunoscute pe timpul lui [172].

Vom mai reveni asupra tabelelor Observatorului din Samarkand, în prealabil să facem însă cunoștință cu calculul lui π, strîns legat de calculele trigonometrice.

Măsurarea cercului efectuată de Ghiaseddin al-Kași. De calculul raportului dintre lungimea circumferinței și diametru, adică de calculul numărului π, se ocupaseră ibn al-Haisam, al-Biruni și alții. Mult timp nu se depășește precizia obținută în Grecia. În cartea a III-a din *Canonul lui Mas'ud*, al-Biruni calculează după coarda de 2° perimetrele poligoanelor înscrise și circumscrise cu 180 de laturi și ia media lor aritmetică, dar rezultatul lui, transformat în fracții zecimale, egal cu 3,1417 ..., este mai puțin bun decît 3,1416 cunoscut mai înainte. Aceasta se întîmplă pentru că el ia coarda de 2° egală cu $2'5''39'''43^{IV}36^{V}$, deși în alte capitole din aceeași carte a *Canonu lui luiMas'ud* se dă o valoare mai bună, și anume $2'5''39'''25^{IV}58^{V}$ (valoarea corectă $2'5''39'''26^{IV}22^{V}29^{VI}$).

Conform unui manuscris datînd din anul 1322, dar întocmit în secolul al XIII-lea, o altă aproximare a fost obținută prin calculul perimetrelor poligoanelor înscrise și circumscrise cu 720 de laturi. Și în acest calcul se comite o eroare inițială, drept coardă a jumătății de grad luîndu-se valoarea sinusului acestui cerc, calculat de Abu-l-Vafa, dar ele diferă chiar de la terții. De aceea perimetrul poligonului circumscris cu 720 de laturi rezultă ceva mai mic decît lungimea circumferinței. În acest caz limitele pentru π sînt $3; 8'29''35'''$ și $3; 8'29''42'''$, în timp ce valoarea exactă pînă la terții este $\pi = 3; 8'29''44'''$. Acest calcul a fost atribuit mai tîrziu lui Abu-l-Vafa, dar nu pare verosimil ca el să fi putut înlocui coarda de 1/2° prin sinus.

Este remarcabil calculul lui π efectuat de Djemșid Ghiaseddin al-Kași în lucrarea sa *Tratat despre circumferință (Risala al muhitiiia)*, terminat în anul 1424. Această lucrare este o adevărată capodoperă a calculului aproximativ nu numai în ceea ce privește rezultatul cu 17 zecimale exacte, ci și prin eleganța și simplitatea evaluărilor, alegerea economică a rezervei de exactitate a datelor intermediare etc. [126, 173].

La începutul tratatului, al-Kași critică aproximările obținute de precursorii săi, fiindcă pentru cercuri mari ele dau erori absolute mari. Pentru a înțelege cele ce urmează, vom da unitățile de măsură folosite de al-Kași:

1 farsang = 12000 coți (circa 6 *km*),

1 cot (circa 50 *cm*) = 24 țoli — degete,

1 țol = 6 lățimi a unui bob mijlociu de orz,

1 lățime de bob mijlociu de orz = 6 grosimi de fir de păr de cal, așa încît ultima reprezintă circa 1/2 *mm*. Al-Kași consideră diametrul globului pămîntesc egal cu 2 485 de farsangi, iar circumferința cercului mare al Pămîntului — de aproximativ 8 000 de farsangi. În sfîrșit, urmîndu-l pe astronomul iranian Kuttaddin aș-Sirazi (1236—1311), al-Kași consideră că raza sferei stelelor fixe este egală cu $70\,073\frac{1}{2}$ din diametrul Pămîntului.

Limitele stabilite de Arhimede pentru π, adică $3\frac{1}{7}$ și $3\frac{10}{71}$ diferă prin $\frac{1}{497}$. De aceea, spune al-Kași, într-un cerc cu diametrul de 497 de unități, lungimea circumferinței este inexactă în cuprinsul unei unități, ceea ce pentru cercul mare al Pămîntului dă o oscilație între limitele a 5 farsangi, iar pentru cercul mare al sferei stelelor fixe, de peste 300 000 de farsangi. La măsurarea suprafețelor eroarea crește și mai mult. Indicînd neajunsurile rezultatelor lui al-Biruni și (după cum presupune al-Kași) ale lui Abul-Vafa, autorul pune problema calculului mai exact a lui π. formulînd-o în mod original, cu următoarea cerință: să se exprime lungimea circumferinței prin diametru cu o asemenea exactitate, încît eroarea la lungimea unei circumferințe, al cărei diametru este egal cu 600 000 de diametre ale Pămîntului, să nu depășească grosimea unui fir de păr.

La fel ca și precursorii săi, începînd cu Arhimede, al-Kași măsoară circumferința bazîndu-se pe calculul perimetrelor poligoanelor înscrise și circumscrise. Totuși, el își conduce calculele după un program puțin diferit. Într-un cerc cu raza 60, el determină valorile șirului de coarde $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ pentru arce de $120°$, $150°$, $165°$, $172\frac{1°}{2}$, ... deci, în general, pentru arce:

$$\alpha_n = 180° - \frac{60°}{2^{n-1}}.$$

Ca bază de calcul îi servește teorema: un dreptunghi construit pe semidiametrul OA și pe suma diametrului AB cu coarda AC a unui arc mai mic de $180°$ este egal cu pătratul coardei AD a sumei acestui arc și a jumătății complementului lui pînă la $180°$

(fig. 86, unde D este mijlocul arcului BC). Această teoremă exprimă orice termen al succesiunii coardelor prin intermediul precedentului:

$$(d + \text{ch}\,\alpha)\frac{d}{2} = \text{ch}^2\left(\alpha + \frac{180^\circ - \alpha}{2}\right)^2, \qquad (1)$$

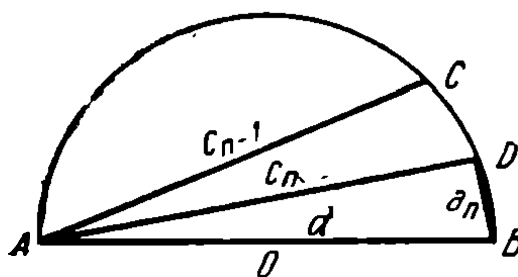


Fig. 86

unde d este diametrul, iar ch α este semnul coardei arcului $\overset{\frown}{BC} = \alpha$. Dacă se ia $\frac{180^\circ + \alpha}{2} = \alpha_n$, atunci $\alpha = \alpha_{n-1}$ și (1) va căpăta forma:

$$\text{ch}^2\,\alpha_n = (d + \text{ch}\,\alpha_{n-1})\frac{d}{2}, \qquad (1')$$

unde $\alpha_0 = 60^\circ$ și ch $\alpha_0 = c_0 = 60$ sau, ceea ce este același lucru,

$$c_n = \sqrt{r\,(2r + c_{n-1})}, \qquad (1'')$$

unde r este raza cercului.

Pentru $\alpha = 2\,\varphi$ și $d = 2$, teorema lui al-Kași se exprimă prin formula trigonometrică:

$$\sin\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \sin\varphi}{2}},$$

întîlnită pentru prima oară în anul 1770 la J. H. Lambert.

Succesiunea coardelor c_n servește pentru calculul laturilor poligoanelor înscrise, deoarece coarda suplimentului arcului α_n este tocmai latura a_n a poligonului regulat cu $3 \cdot 2^n$ laturi înscris în cerc. Astfel, după teorema lui Pitagora:

$$a_n^2 = \sqrt{d^2 - c_n^2};$$

luînd un n suficient de mare, se poate calcula o latură a_n oricît de mică.

Calculele ulterioare, efectuate în sistem sexagesimal, constau din operații raționale și extrageri de rădăcini pătrate după formulele (1′) și (2). Înainte de a trece la ele, al-Kași stabilește următoarele: 1) numărul de laturi ale poligonului înscris cu $3 \cdot 2^n$ laturi, al cărui perimetru asigură exactitatea cerută a măsurării circumferinței și 2) numărul de zecimale suficient pentru acest scop, pentru toți c_n și alte valori auxiliare. Într-o circumferință de 600 000 de ori mai mare decît circumferința cercului mare al

Pămîntului, octava, adică $\frac{1}{60^8}$ dintr-un grad, nu depășește grosimea unui fir de păr, deoarece:

$$\frac{1}{60^8} \cdot \frac{1}{360} \cdot 600\,000 \cdot 8\,000 \cdot 10\,368\,000 \approx \frac{4}{5}.$$

De aici rezultă că exactitatea cerută va fi asigurată dacă se determină perimetrele poligoanelor asemenea înscrise și circumscrise, astfel încît diferența între ele să nu fie mai mare decît 60^{-8} sau, trecînd la un cerc de rază unitară, să nu fie mai mare decît 60^{-9}, adică pentru cercul de rază unitară

$$P - p < \frac{1}{60^9}. \tag{3}$$

De la evaluarea diferenței perimetrelor, al-Kași, neglijînd cu iscusință diferențele foarte mici, trece la evaluarea laturii poligonului înscris.

Să însemnăm prin p — perimetrul și prin h — apotema poligonului înscris, prin P — perimetrul poligonului circumscris, prin r — raza circumferinței, iar diferența $r - h$, adică săgeata, prin s. Atunci:

$$\frac{P}{p} = \frac{r}{h}$$

$$\frac{P - p}{p} = \frac{r - h}{h} = \frac{s}{r - s}. \tag{4}$$

În conformitate cu măsurarea cercului după Arhimede, pentru raportul dintre circumferința C și rază, are loc inegalitatea: $6 < \frac{C}{r} < 6\frac{2}{7}$, astfel încît:

$$\frac{1}{6} - \frac{r}{C} < \frac{1}{6} - \frac{7}{44} = \frac{1}{132} < \frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{1}{126}. \tag{5}$$

Formulele (3) — (5) permit să se găsească numărul căutat de laturi ale poligonului înscris. La un număr suficient de laturi, adică la p apropiat de C și o săgeată s corespunzător mică, (4) se înlocuiește aproximativ prin:

$$\frac{P - p}{C} \approx \frac{s}{r}. \tag{4'}$$

Mai departe, conform cu (3) și (5),

$$\frac{P-p}{C} < \frac{r}{60^9 C} \approx \frac{1}{60^9}\left(\frac{1}{6}-\varepsilon\right),$$

unde $\varepsilon < \frac{1}{126}$, și $\frac{1}{6} - \varepsilon = \frac{8}{60}$, așa încît:

$$\frac{P-p}{C} \approx \frac{s}{r} \approx \frac{8}{60^{10}},$$

iar pentru $r = 60$

$$s \approx \frac{8}{60^9}. \tag{6}$$

După aceasta, al-Kași evaluează coarda c a arcului care completează pînă la 180° arcul subîntins de latura foarte mică a poligonului înscris. Pentru aceasta el ia coarda respectivă egală cu dublul apotemei:

$$c \approx 2h = 2(r-s) \approx 2r - \frac{16}{60^9}. \tag{7}$$

În sfîrșit, latura poligonului înscris, după (2) și (7), este egală cu:

$$a \approx \sqrt{(2r)^2 - (2r-2s)^2},$$

iar pentru o rază egală cu 60,

$$a < \sqrt{2 \cdot 2r \cdot 2s} = \sqrt{\frac{64}{60^9}} = \frac{8}{60^4}. \tag{8}$$

În acest fel, exactitatea cerută în măsurarea cercului se va obține dacă se înscrie într-un cerc de rază 60 un poligon cu o latură care să nu depășească 8 cvarte. Al-Kași întocmește un tabel al arcelor ce se obțin prin înjumătățirea arcului de 120° și găsește că la a 28-a înjumătățire se obține un arc mai mic decît 6 cvarte de grad și a cărui coardă satisface inegalitatea (8). De aceea, numărul laturilor poligonului înscris trebuie să fie egal cu $3 \cdot 2^{28}$ sau 805 306 368 sau în sistem sexagesimal $1^{V}2^{IV}8^{III}16^{II}12^{I}48$.

Acum autorul calculează cîte zecimale trebuie luate la determinarea lungimii laturii, plecînd de la faptul că ea va trebui înmulțită cu numărul laturilor, adică cu un număr de ordinul a 60^5, iar pentru raza 60 rezultatul trebuie să fie exact pînă la octave inclusiv; el mai ține seama și de faptul că printre operațiile folosite intervine și ridicarea la pătrat. Raționamentele lui

sînt aici incomplete, dar în cele din urmă ajunge la concluzia justă că exactitatea cerută va fi asigurată, dacă pentru raza egală cu 60, calculele se vor efectua pînă la rangul al 18-lea. În realitate, el ia chiar o rezervă „uniformă“ de exactitate (poate pentru a evita neconcordanța în toate calculele): în majoritatea calculelor el s-ar fi putut limita la un număr mai mic de cifre exacte.

Calculele coardelor c_1, c_2, ... c_{28} sînt adunate în 28 de tabele vaste: extragerile rădăcinilor cerute de formula (1″) se verifică prin ridicarea la pătrat și în majoritatea cazurilor prin verificarea [1] prin 59; la rotunjirea ultimei cifre el ține seama de cifra aflată în rangul imediat următor. Dacă se ia $r = 1$, atunci în tabelul k se calculează:

$$c_k = 60\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}, \qquad (9)$$

unde numărul rădăcinilor este egal cu indicele k.

Determinînd la sfîrșitul tabelului 28 pătratul laturii căutate:

$$a_{28}^2 = d^2 - c_{28}^2$$

și însăși latura propriu-zisă:

$$a_{28} = \sqrt{d^2 - c_{28}^2}$$

care pentru $r = 1$ va fi[2]:

$$a_{28} = \sqrt{2-\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}, \qquad (10)$$

al-Kași, înmulțind cu numărul laturilor, obține perimetrul poligonului înscris cu 32^{28} laturi. Egalitatea aproximativă:

$$\frac{P_{28}-p_{28}}{p_{28}} \approx \frac{r-\frac{c_{28}}{2}}{\frac{c_{28}}{2}}$$

[1] Merită să observăm că în *Cheia aritmeticii* al-Kași formulează absolut corect regula de verificare prin nouă, spunînd că dacă probele respective nu coincid, operația s-a efectuat eronat — *N.A.*

[2] Expresia (9) continuată la infinit converge spre $60 \cdot 2$, iar (10) înmulțit cu $3 \cdot 2^n$, — spre 2π. Al-Kași nu vorbește despre aceasta. De-abia F. Viète (1593) obține reprezentarea lui $\frac{2}{\pi}$ sub forma unui produs infinit de rădăcini pătrate — *N.A.*

în conformitate cu (7), dă perimetrul poligonului circumscris. În sfîrșit, ca lungime a circumferinței se ia media aritmetică $\frac{P_{28} + p_{28}}{2}$, care pentru raza 60 este egală cu:

$$6\ 16\ 59'\ 28''\ 1'''\ 34^{IV}\ 51^{V}\ 46^{VI}\ 14^{VII}\ 50^{VIII};$$

pentru raza $r = 1$, același număr dă valoarea lui 2π, dacă se micșorează cu o unitate toate rangurile, începînd cu cel mai mare. Toate cele 10 semne ale rezultatului sînt corecte, dar autorul mai verifică o dată calculele precedente și arată că unele inexactități, existente la ultimele semne ale valorilor intermediare, n-au putut influența rezultatul.

După aceasta, al-Kași transformă valoarea lui 2π în fracție zecimală:

$$2\pi = 6,\ 283\ 185\ 307\ 179\ 586\ 5,$$

cu numărul de zecimale corespunzător numărului de semne luat în sistemul sexagesimal, deoarece:

$$\frac{1}{10^{16}} - \frac{1}{60^{9}} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6^{10}}.$$

Și aici sînt exacte toate cele 17 cifre (vezi fig. 87). Am observat că tocmai în *Tratatul despre circumferință* se întîlnesc pentru întîia oară în matematica țărilor Islamului fracțiile zecimale.

Măsurarea cercului, efectuată de al-Kași, este strălucită din punct de vedere al exactității, și constituie una dintre culmile matematicii calculatorii din țările Islamului. Rezultatul lui al-Kași este repetat de A. van Roomen care-l obține în 1597 cu ajutorul poligoanelor cu 2^{30} laturi, apoi este îmbunătățit de L. van Ceulen, care tot atunci găsește 20 de zecimale cu ajutorul poligoanelor cu $60 \cdot 2^{29}$ laturi, iar curînd după aceea găsește 32 de zecimale (publicate în 1615).

Procedeele de măsurare a circumferinței au condus desigur la ideea că ea este incomensurabilă cu diametrul. Procesul de măsurare apare nelimitat și afară de aceasta este bazat pe extragerea unor rădăcini pătrate iraționale. Nici una dintre aceste împrejurări nu garantează desigur iraționalitatea limitei, și abia J.H.Lambert reușește să demonstreze la începutul secolului al XVIII-lea iraționalitatea lui π, dar convingerea că π este irațional o găsim și în literatura arabă. În tratatul de filozofie *Dalalat al-hairin*, adică *Îndreptarul rătăciților*, scris în limba arabă în jurul anului 1190 de filozoful evreu Moise ben Maimon (născut la

2006

Fig. 87. Numărul 2π cu 17 zecimale. Distih pentru memorizarea lui. Din *Tratatul despre circumferință* al lui al-Kași (manuscris din Istambul, probabil din secolul al XVII-lea).

Cordoba în 1135, moare la Cairo în 1204), se spune că nu se poate calcula exact $\sqrt{5\,000}$, la fel ca și raportul între circumferință și diametru „deoarece, aici nu se atinge niciodată limita calculului“ [25, p. 225]. Moise ben Maimon exprimase părerea specialiștilor matematicieni. Al-Kași a observat că valoarea lui pentru π este mult mai exactă și mai apropiată de adevăr decît cea a lui Arhimede.

Soluția algebrică a ecuației trisecțiunii unghiului. Cele mai exacte tabele trigonometrice au fost calculate în Observatorul lui Ulug-bek (1394—1449) [174]. Stăpînitorul Samarkandului, nepotul lui Timur, Muhammed Gurgan Ulug-bek [1], nu a fost numai un protector al științelor și unul dintre cei mai culți oameni ai timpului său, ci și un învățat activ. El organizează la Samarkand și în alte orașe cîteva școli superioare, iar în decada a doua a secolului construiește la Samarkand un observator utilat după ultimul cuvînt al tehnicii acelor vremuri. La acest observator lucrează un grup mare de matematicieni și astronomi, în frunte cu Djemșid Ghiaseddin al-Kași, care, judecînd după introducerea la *Cheia aritmeticii*, se află în 1427 la Samarkand [2]. Deși activitatea lui al-Kași la acest observator nu este de lungă durată, totuși lucrările lui de matematică și astronomie și îndeosebi opera *Zidj Hakani*[3], scrisă în limba persană aproximativ între anii 1414—1420, au o importanță imensă pentru activitatea școlii din Samarkand [171]. Afară de al-Kași, la observații și cercetări teoretice mai participă: Salabe din Musa ibn Muhammed Kazi-zade ar-Rumi, născut în Asia Mică și ale cărui lucrări se înrudesc cu cele ale lui al-Kași, Alaeddin Ali ibn Muhammed al-Kușci, care după moartea lui Ulug-bek se mută la Istambul (decedat în 1474 sau 1475), Abd al-Alim ibn Muhammed ibn Husein al-Birdjandi, Ulug-bek în persoană și alții. La Observatorul din Samarkand se întocmește vestita

---

[1] Ulug-bek înseamnă marele prinț.

[2] Al-Kași spune el singur că a scris această carte pentru biblioteca lui Ulug-bek [126, p. 10].

[3] În aceste tabele, al-Kași își propune să corecteze și să precizeze tabelele lui Nasireddin at-Tusi; tabelele sinusurilor și ale tangentelor sînt date din minut în minut cu patru cifre semnificative. Tabelele lui al-Kași sînt închinate lui *hakan*, adică hanului hanilor, care poate fi sau Ulug-bek sau tatăl său, Șahruh.



Fig. 88. Școala lui Ulug-bek (în jurul anului 1420) la Samarkand.

culegere „Zidjul lui Ulug-bek“ sau „Zidjul lui Guragani“, încheiată în jurul anului 1440, așadar după moartea lui al-Kași și Kazi-zade. Conținutul tabelelor din această lucrare sînt apropiate de alte *zidjuri*, însă ele sînt mult mai complete și exacte. Tabelele sinusurilor sînt întocmite pentru un interval de 1′, tabelele tangentelor, (pînă la 45°), din minut în minut, iar mai departe pentru intervale de 5′; ambele sînt date cu valori conținînd 5 semne sexagesimale. La baza acestor tabele se află determinarea mai exactă a sinusului de 1°, prin rezolvarea ecuației trisecțiunii unghiului.

Primele rezolvări ale problemei trisecțiunii unghiului în literatura arabă și greacă erau construcții geometrice. Abu Said Ahmed ibn Muhammed ibn Abd aj-Djalal al-Sidjizi (născut în jurul anului 951, decedat în jurul anului 1024) rezolvă pentru prima oară această problemă cu ajutorul intersecției unui cerc cu o hiperbolă echilateră. În secolul al XI-lea problema se exprimă printr-o ecuație de gradul al treilea și se pune chestiunea rezolvării ei numerice. Am mai amintit că, cu ajutorulpro-

belor, al-Biruni rezolvă o asemenea ecuație în cazul nonagonului regulat, dar nu cunoaștem procedeul folosit de el.

Al-Kași propune o metodă originală de iterație, care îmbină simplitatea și convergența rapidă. Opera lui, *Tratat despre coardă și sinus (Risala al-vatar va-l djeib)*, n-a fost descoperită pînă-n prezent. Despre acest tratat se amintește la începutul *Cheii aritmeticii*, iar într-un manuscris se arată de-a dreptul că metoda ce se expune pentru calculul sinusului de 1° îi aparține personal lui al-Kași. Metoda lui al-Kași se cunoaște din descrierea amănunțită făcută de Mahmmud ibn Muhammed Mariam Celebi (decedat în 1524 sau 1525) nepotul lui Kazi-zade; acesta lucrează în diferite orașe din Turcia și în jurul anului 1500 scrie un comentariu la tabelele astronomice ale lui Ulug-bek, intitulat *Regulile operațiilor și corectarea tabelelor (Dastur al-amal va tashih al-djadval)* [126, 175]. În explicațiile la tabelele trigonometrice, Mariam Celebi expune mai întîi calculul sinusului de 1° după un procedeu aplicat încă de Abu-l-Vafa, iar mai departe, referindu-se la opera bunicului său, spune:

„Perla slavei și a cinstei timpului său, Ghiaseddin Djemșid, plicînd metoda algebrei și a almukabalei și socotind sinusul ca obiect, reduce problema la următoarea: 45 ridicate o dată, înmulțite cu obiectul, sînt egale cu un cub și un număr" [126, p. 317].

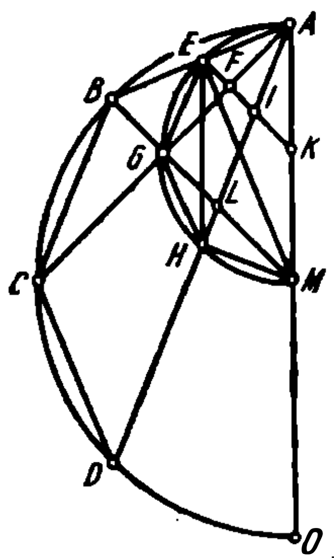


Fig. 89

Deducerea ecuației trisecțiunii unghiului se bazează pe teorema lui Ptolemeu și pe teorema lui Euclid cu privire la egalitatea produsului segmentelor ce intersectează coardele unui cerc. Fie ABO un semicerc de rază dată R (fig. 89), în care arcele $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ și $\overset{\frown}{CD}$ sînt egale între ele. Dacă pe semidiametrul AM se construiește un alt semicerc AEM și se duc coardele AB, AC și AD, atunci arcele AE, EG și GH obținute pe semicercul AEM vor fi de asemenea egale între ele. Să considerăm coarda AH ca fiind dată, iar coarda treimii arcului AE — drept cea căutată. După teorema lui Ptolemeu, în patrulaterul $AEGH$, în virtutea egalității $AE = EG = GH$ și $AE = EH$,

avem:

$$AE^2 + AE \cdot AH = AG^2. \quad (1)$$

După teorema lui Euclid, în virtutea egalității $AG = CG$ (raza perpendiculară pe coardă, împarte coarda în două părți egale):

$$AG^2 = BG\ (2R - BG). \qquad (2)$$

Mai departe, $AB^2 = BG \cdot 2R$, adică $BG = \frac{AB^2}{2R}$ sau, deoarece $AB = 2 \cdot AE$ avem $BG = \frac{2AE^2}{R}$. Introducem $BG = \frac{2AE^2}{R}$ în (2):

$$AG^2 = 4\ AE^2 - \frac{4AE^4}{R^2}. \qquad (3)$$

În sfîrșit, din (1) și (3) obținem ecuația trisecțiunii unui unghi oarecare:

$$4AE^3 + R^2AH = 3R^2 \cdot AE.$$

Dacă se consideră că arcul AH corespunde unghiului 6α, iar arcul AE corespunde unghiului 2α, atunci $AH = R\ \sin 3\alpha$, $AE = R\ \sin\alpha$ și se obține cunoscuta formulă a sinusului unghiului triplu:

$$\sin 3\alpha = 3 \sin\alpha - 4 \sin^3\alpha,$$

care apare în transcripție trigonometrică la F. Viète.

Mariam Celebi, urmîndu-l pe al-Kași, ia $R = 60$ și arcul $AH = 6°$. În acest caz sinusul de $3°$ se poate calcula pe cale elementară cunoscînd sinusul de $72°$ (adică cunoscînd latura pentagonului regulat) și cel de $60°$. Presupunînd

$$AE = 60 \cdot \sin\ 1° = x$$

și luînd

$AH = 60 \cdot \sin 3° = 3\ 8\ 24\ 34\ 59\ 34\ 28\ 15$ septime, el ajunge la ecuația:

$$45 \cdot 60\ \ x = x^3 + 47\ 6\ 8\ 29\ 51\ 53\ 37\ 3\ 45, \text{ septimi.} \qquad (5)$$

Metoda lui al-Kași, pentru rezolvarea unei ecuații de forma:

$$x = \frac{q + x^3}{p}, \qquad (6)$$

constă în următoarele. Să admitem că:

$$x = a + b + c + \dots,$$

unde a, b și c sînt niște cantități consecutive de ranguri sexagesimale începînd cu prima cifră semnificativă. Deoarece se

ştie dinainte că rădăcina căutată este foarte mică, se poate neglija cubul ei şi prima aproximare se obţine din (6) ca un „prim cît“ rezultat din împărţirea „deîmpărţitului“ — deci a termenului liber q prin „împărţitorul“ p — , adică coeficientul termenului primei puteri, iar operaţia se efectuează pînă la primul rang semnificativ:

$$x_1 = \frac{q}{p} \approx a.$$

Să introducem în partea stîngă din (6), valoarea rădăcinii, completată cu un rang, adică $(a + b)$, iar în dreapta — prima aproximaţie a lui a. Prima corecţie b sau „al doilea cît“ se găseşte atunci din nou prin împărţire:

$$\frac{q - ap + a^3}{p} = b + \ldots,$$

luîndu-se din nou doar prima cifră semnificativă a cîtului (care în sistemul zecimal poate avea şi două cifre).

A doua corecţie sau „al treilea cît“ c se găseşte în mod analog din:

$$\frac{(q - ap + a^3) - bp + [(a + b)^3 - a^3]}{p} = c + \cdots,$$

adică, de fapt, din:

$$\frac{q - (a + b)p + (a + b)^3}{p} = c + \ldots$$

etc.

Dacă notăm aproximările succesive $x_1 = a_1$, $x_2 = a + b$, $x_3 = $ $= a + b + c$ etc., atunci:

$$x_1 = a,$$

$$x_2 = \frac{q + a^3}{p} = \frac{q + x_1^3}{p},$$

$$x_3 = \frac{q + (a + b)^3}{p} = \frac{q + x_2^3}{p},$$

şi în general (ţinînd seama de numărul necesar de semne):

$$x_n = \frac{q + x_{n-1}^3}{p}.$$

Se poate arăta că procesul este convergent dacă în vecinătatea rădăcinii avem:

$$\frac{3x^2}{p} < r < 1,$$

ceea ce în cazul de față are evident loc.

Algoritmul de iterație al lui al-Kași necesită un număr foarte mic de operații, care se împart în atîtea etape, cîte cifre dorim să găsim pentru rădăcină. În fiecare etapă avem de-a face cu o ridicare la cub a aproximației precedente și cu o împărțire. Am spus că al-Kași cunoscuse probabil aplicarea metodei chinezești *tian iuan.* de rezolvare a ecuațiilor algebrice. Dacă această presupunere este justă, atunci este ușor de înțeles de ce al-Kași a preferat să rezolve ecuația (6) prin procedeul său: în cazul de față, acest procedeu ne conduce la țintă mult mai repede și mai ușor, fără să impună, în particular, alegerea destul de complicată a părții întregi a rădăcinilor unor ecuații auxiliare complete de gradul al treilea, care apar în metoda lui Ruffini — Horner. Să mai observăm că exactitatea aproximării se precizează automat chiar în cursul calculului; ea se poate aprecia după corecțiile la rangurile găsite ale rădăcinii.

Efectuînd cinci împărțiri în total, Mariam Celebi calculează sin 1°, exact pînă la cvarte. Al-Kași personal găsește sin 1° cu aceeași exactitate cu care îl calculează pe π. În fracții zecimale rezultatul lui este următorul:

$$\sin 1° = 0,\ 017\ 452\ 406\ 437\ 283\ 571.$$

Metoda lui al-Kași reprezintă o tot atît de demnă încheiere a lucrărilor matematicienilor din țările Islamului în rezolvarea numerică a ecuațiilor algebrice, dnpă cum fusese teoria geometrică a lui Khayyam în teoria generală a ecuațiilor de gradul al treilea. Încă H. Hankel scria pe drept despre procedeul lui al-Kași, că el „ca exactitate și eleganță nu este mai prejos decît toate metodele de aproximare descoperite în Occident după F. Viète“[1] [108, p. 292].

[1] După intrarea cărții la tipar, am făcut cunoștință cu *Tratatul despre determinarea sinusului de un grad (Risala fiistihradj djaib daradja vahida)* a lui Kazi-zade însuși [175 a], care s-a bazat nemijlocit pe comunicările lui al-Kași. Tratatul conține expunerea metodei lui al-Kași (indicînd o inexactitate aparentă la deducerea ecuației de gradul al treilea pentru sinusul de 1°), precum și deducerea ecuației pentru coarda de 2°, așadar pentru dublul sinusului de 1°, obținută personal de Kazi-zade. Metoda de iterare a lui al-Kași, pe care Kazi-zade o denumește (ca și Celebi) „introducerea cubului în împărțire“, se formulează în tratat în formă generală (la Celebi el se pre-

Un alt algoritm de iterație, analog cu procedeul lui al-Kași, se aplică în Orientul Apropiat și Mijlociu, unei ecuații transcendente care apare la întocmirea tabelelor necesare în teoria paralaxei [176]. Aceasta este o ecuație de forma:

$$t = \theta - m \sin \theta,$$

în care se cere să se calculeze θ după un m dat și un t fix. Prima aplicare a algoritmului amintit o găsim la contemporanul lui al-Horezmi, Habaș al-Hasib. Calculele acestuia corespund cu formarea următoarelor aproximări:

$$\begin{aligned} \theta_0\ (t) &= t + m \sin t, \\ \theta_1\ (t) &= t + m \sin \theta_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \theta_n\ (t) &= t + m \sin \theta_{n-1}\ (t), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Calculatorii arabi s-au mărginit la aproximări ce se obțin în primele etape ale procesului, cu o convergență destul de rapidă; Habaș al-Hasib lua θ_3. Nu se cunoaște perioada de timp și locul descoperirii acestui algoritm; există oarecare temeiuri să se presupună că el fusese folosit mai înainte în India. În secolul al XVII-lea, J. Kepler obține aceeași ecuație într-o problemă de teoria mișcării planetelor; în mecanica cerească modernă ecuația poartă numele lui.

În lucrările școlii din Samarkand, matematica calculatorie a țărilor Orientului atinge înflorirea sa maximă. Această școală n-a existat totuși timp îndelungat. Depinzînd în întregime de soarta protectorului său, ea s-a descompus după asasinarea lui Ulug-bek în anul 1449, pusă la cale de cercurile reacționare. Mai

---

zintă pe un exemplu de ecuație numerică dată): „Mai întîi unele (cifre) ale numărului se împart la numărul obiectelor. Se formează cubul cîtului și se adaugă la restul numărului. Apoi suma (lor) se mai împarte o dată. Se formează cubul sumei celor două cîturi și surplusul lui peste cubul obținut prima oară se adaugă la restul sumei. Mai departe, cea de-a doua sumă (a lor) se mai împarte o dată. Se formează cubul sumei (celor trei) cîturilor și surplusul lui față de cubul sumei celor două cîturi se adaugă la restul de la cea de-a doua sumă. Mai departe, a treia sumă se mai împarte o dată și se procedează la fel ca mai înainte. Operația se termină atunci cînd se ajunge la ceva de care nu se mai ține seama" [175, a p. 547].

tîrziu, cercetările matematice cad în desuetudine în țările Islamului. Despre aceasta stă mărturie, de pildă, *Cursul scurt de aritmetică (Hualasat al-hisab)* scris de Behaeddin (1547—1622) și foarte popular timp de peste 200 de ani în Turcia, Iran și parțial în India [177] dar care, cu tot volumul său impresionant și plin de conținut, este o lucrare pur compilativă.

Influența matematicii țărilor Islamului asupra științei Europei occidentale. Am amintit numele unor învățați care au lucrat în țările mauritane ale Peninsulei Iberice. Dar rezultatele obținute aici, după cum s-a mai spus, au fost mult mai puțin originale decît cele din Orient. Dintre cele mai bune sînt cîteva descoperiri în domeniul trigonometriei realizate de Gabir ibn Afla. Majoritatea operelor matematicienilor arabi occidentali conțin informații relativ elementare de aritmetică, algebră etc.

Spaniei îi revine un alt rol cultural-istoric de o importanță excepțională. Aici s-au dezvoltat cu o intensitate deosebită contactele culturale și științifice între țările Islamului și țările creștine ale Europei. Oamenii de știință din multe țări plecau în diferitele regiuni ale Spaniei eliberate de sub stăpînirea maurilor, pentru a lua cunoștință de realizările arabilor în domeniul matematicii și al științelor naturii. În secolul al XII-lea, activitatea traducătorilor și a compilatorilor de opere arabe sau a traducerilor din limba greacă atinge un grad remarcabil de dezvoltare.

Învățații europeni continuă să studieze literatura arabă și în afara granițelor Spaniei și mai tîrziu de secolul al XII-lea. E suficient să arătăm că una din bazele creației matematice a lui Leonardo Pisano în aritmetică, geometrie și algebră a fost studiul operelor lui Abu Kamil, iar baza lucrărilor de trigonometrie a lui J. Regiomontanus este studiul lucrărilor lui al-Battani sau Nasireddin at-Tusi.

Matematica țărilor Islamului a influențat fructuos asupra dezvoltării științei europene și a îmbogățit-o atît prin descoperirile sale proprii, cît și prin descoperirile grecilor, indienilor, sirienilor, babilonienilor etc. intrate în cultura arabă. Datorită acestui fapt, învățații Europei medievale au putut construi mai departe pe un fundament solid și nu să repete întreaga cale par-

cursă de precursorii lor. Matematicieni europeni au preluat şi au dezvoltat cu atît mai uşor lucrările învăţaţilor din ţările Islamului, cu cît la început în faţa lor se aflau aceleaşi probleme ca şi ale matematicienilor arabi, şi anume probleme de însuşire şi de creare a celor mai simpli algoritmi de măsurare şi calcul în domeniul aritmeticii, al măsurătorilor geometrice, al algebrei şi trigonometriei. Putem doar regreta că din cauza izolării, care treptat s-a manifestat din ce în ce mai mult între lumea musulmană şi cea creştină şi chiar şi între Orientul şi Occidentul musulman, multe realizări ale unor învăţaţi, cum au fost Ommar Khayyam sau al-Kaşi, au devenit cunoscute în Europa abia după ce ele fuseseră de mult obţinute din nou aici.

MATEMATICA ÎN EUROPA MEDIEVALĂ

Condiții sociale. După ce, ca rezultat al răscoalelor sclavilor și colonilor și al cuceririlor „barbare“, Imperiul Roman dispare, pe teritoriul Europei se statornicește societatea feudalo-iobagistă. Această epocă socială, al cărei început se situează în secolele al V-lea—al VI-lea, durează pînă la revoluția burgheză din Anglia din secolul al XVII-lea și poartă denumirea de ev mediu.

După cum arată Lenin, feudalismul se distinge prin economia naturală, legarea țăranilor de pămînt, „constrîngerea extraeconomică“, precum și printr-o stare inferioară și rutinieră a tehnicii [9, vol. 3 p. 168—169]. În Europa, feudalismul trece prin trei stadii: 1) evul mediu timpuriu (secolele al V-lea—al XI-lea), cînd se produce înfeudarea țăranilor liberi, membri ai obștilor, și încep să se formeze popoarele și micile state feudale, cu legături de convenții între ele, și cînd biserica creștină prin autoritatea ei consfințește formele noi de exploatare; 2) feudalismul dezvoltat (secolele al XI-lea—al XV-lea, în care meseriile se separă de agricultură, cresc și se întăresc orașele de comercianți și meșteșugari, iar într-o serie de țări se întăresc monarhiile feudale; sfîrșitul acestei etape este marcat prin mari răscoale țărănești, precum și prin lupta dintre clasele din interiorul orașelor; 3) evul mediu tîrziu (secolele al XV-lea—al XVII-lea), caracterizat prin descompunerea orînduirii feudale și nașterea burgheziei și a proletariatului, războiul țărănesc și reforma din Germania, revoluția burgheză din Țările de Jos și pregătirea revoluției din Anglia.

În Imperiul Roman de apus unde triburile invadatoare de celți, germani și slavi își formează statele lor, peste care năvălesc curînd hunii, din civilizația anterioară rămîn doar satele și cîteva orașe pe jumătate distruse sau în plină decădere. Nivelul economic, tehnic și cultural rămîne multă vreme extrem de scăzut, întreaga evoluție a societății se desfășoară foarte lent. Aceasta este o societate primitivă agrară, cu agricultură extensivă și

schimburi în natură. Legăturile comerciale și culturale cu Orientul, îndeosebi după ce arabii lipsesc Bizanțul de accesul la Marea Mediterană, sînt întrerupte pentru un timp. La decăderea culturii contribuie în multe privinți activitatea bisericii creștine, situată deasupra puterii laice. La început, biserica încearcă să respingă complet cultura „păgînă" a grecilor și a romanilor, deși tot ea este nevoită să imite și chiar să dezvolte anumite elemente ale acestei culturi. Marele ideolog al creștinismului, Augustin (354—430), spunea: „Nu trebuie disprețuit ceea ce este bun, chiar dacă au spus-o păgînii".

Dezvoltarea treptată a forțelor de producție, a producției de mărfuri și a comerțului, ridicarea orașelor (îndeosebi începînd cu a doua jumătate a secolului al XI-lea), întărirea situației materiale și a rolului social al orășenilor, toate acestea alcătuiesc baza progresului culturii în general și al științei în particular. Analizînd cauzele dezvoltării „miraculos de rapide" a științelor în Europa occidentală la începutul epocii moderne, Engels subliniază că „această minune se datorește tot producției" [3, p. 168]. Engels exprimă în următoarele cuvinte deosebirile esențiale între situația de la finele antichității și mijlocul secolului al XV-lea: „O dezvoltare infinit superioară a producției industriale și a comerțului, datorită orășenilor evului mediu; pe de o parte producția s-a perfecționat, a devenit mai variată și mai masivă, pe de alta relațiile comerciale s-au intensificat; navigația a devenit incomparabil mai îndrăzneață de cînd cu saxonii, frizii și normanzii; în afară de aceasta mulțimea de invenții și importul de invenții din Orient care nu numai că au făcut posibile importul și răspîndirea literaturii grecești, descoperirile maritime, precum și revoluția religioasă burgheză, ci le-au dat și o amploare incomparabil mai mare și un ritm mai rapid. Pe deasupra ele au furnizat, fără însă să-l sistematizeze, un imens material de fapte științifice, necunoscut de antichitate — (acul magnetic, tiparul, caracterele de tipar, hîrtia de in — întrebuințată de arabi și de evreii spanioli din secolul al XII-lea; începînd din secolul al X-lea, intră treptat în uz hîrtia de bumbac, care cunoaște o mai largă răspîndire în secolele al XIII-lea și al XIV-lea, în timp ce papirusul nu mai este folosit după cucerirea Egiptului de către arabi), praful de pușcă, *ochelarii*, *ceasornicele mecanice*, un mare progres atît în ce privește *calcularea timpului*, *cît și mecanica* [3, p. 174].

Lumea spirituală a europeanului în timpul evului mediu se îmbogățește prin cunoașterea unei părți din moștenirea antică

(ceea ce începe cu mult înainte de Renaștere, cînd însă atinge apogeul), precum și a patrimoniului țărilor orientale. Cultura Europei feudale, cuprinzînd elemente create anterior și adaptate, lasă urmașilor creații de felul arhitecturii romanice și gotice, produse unice ale artei aplicate, o creație literară ca *Divina comedie* a lui Dante, concepția științifică a lui Roger Bacon și pictura lui Andrei Rublev.

Mișcarea progresistă culturală și științifică în Europa occidentală feudală se desfășoară relativ lent, într-o luptă ascuțită cu forțele reacționare, luînd de cele mai multe ori forma unei lupte între curente religioase. Cele mai mari realizări aparțin popoarelor din statele mai dezvoltate ca Italia, Franța, apoi Anglia și Germania, deși unele descoperiri mari se fac și în alte țări — de pildă, Copernic care elaborează sistemul heliocentric în Polonia. Engels arată că, avînd anumite particularități în diferite țări, „toată Europa de vest și centrală, inclusiv Polonia, a început să se dezvolte în strînsă legătură, Italia continuînd să-și păstreze totuși locul de frunte, datorită civilizației ei moștenite din antichitate" [3, p. 168].

În perioada feudalismului, Bizanțul, Rusia, Armenia și Georgia au multe lucruri comune cu Europa occidentală. Popoarele acestor țări, la fel ca și cele din Europa occidentală, trecuseră la creștinism, dar nu sub forma catolicismului, ci sub forma ortodoxală sau a religiei armeno-gregoriene. Puterea împărătească moștenită de Bizanț de la Imperiul Roman, se transformă într-o monarhie feudală, împărțită uneori în cîteva „imperii" locale; Rusia, Georgia și Armenia se disting printr-o fărîmițare feudală intensă, învinsă lent de puterea centrală în continuă dezvoltare. O particularitate importantă a istoriei acestor patru țări o prezintă perioadele multiseculare de subjugare: Bizanțul — de către turci, Rusia — de către mongolo-tătari, Georgia și Armenia — de către arabi, mongolo-tătari, turci și perși. Ultimele trei țări reușesc în cele din urmă să se elibereze de sub jugul străin, Rusia — mai devreme, iar Georgia și Armenia — mai tîrziu. Dintre țările situate în partea europeană a fostului Imperiu Bizantin se eliberează de sub turci, Grecia și țările balcanice, iar pe teritoriul de bază al acestui imperiu se formează istoricește statul turc. Migrațiile străine au întîrziat cu mult timp dezvoltarea culturii și a științei în țările creștine răsăritene și chiar au aruncat-o înapoi. Migrația mongolilor și lupta împotriva lor în secolele al XIII-lea—al XV-lea frînează mult timp în Rusia progresul culturii și al științei început înainte vreme. Pușkin remarcă o

dată că tătarii n-au fost asemenea cu maurii: cucerind Rusia, ei nu-i dăruiră nici algebra și nici pe Aristotel. În consecință, către sfîrșitul evului mediu, țările creștine răsăritene rămîn cu mult în urma țărilor din Europa occidentală în privința dezvoltării matematicii.

În capitolul de față, consacrat îndeosebi dezvoltării matematicii în Europa occidentală medievală, vom analiza și dezvoltarea matematicii în țările Europei răsăritene și ale Asiei Mici, inclusiv Bizanțul, precum și ale Georgiei și Armeniei aflate dincolo de granițele Europei, dar a căror cultură este strîns legată de cea bizantină.

Începuturile cunoștințelor matematice. În epoca feudalismului timpuriu și a opresiunii spirituale n-au existat desigur stimulente pentru preocupări științifice față de matematică și științele naturii. În economie și în viața de toate zilele lumea se limita la un minimum de cunoștințe aritmetice și geometrice, fără să iasă din cuprinsul operațiilor elementare cu numere întregi și fracții și al regulilor de măsurare a celor mai simple figuri.

Interes permanent față de matematică se manifestă în mănăstiri, deoarece acestea erau atît organizații cu caracter religios-ideologic, cît și mari unități economice. Dar și aici, interesul față de matematică se limita la probleme de aritmetică și geometrie practică, de calcul calendaristic și al zilelor de sărbători bisericești.

Pentru formarea oamenilor culți se scriu cîteva cărți, conținînd noțiuni de bază privind cele șapte „arte libere“ *(artes liberales)*, împărțite în „trei căi“ *(trivium)* și „patru căi“ *(quadrivium)*; această clasificare datează din primele secole ale Imperiului Roman[1]. *Triviumul* cuprindea gramatica, retorica, ca artă a elocinței cu elemente de drept, precum și dialectica — în sensul iscusinței de a purta discuții în contradictoriu. *Quadriviumul* cuprindea: aritmetica — expunerea fără demonstrații a celor mai simple proprietăți ale numerelor și combinată cu mistica numerelor; geometria — scurte informații despre principalele figuri și măsuri geometrice și geografice; astronomia, inclusiv calendarul, și în sfîrșit muzica, ca teorie a intervalelor armonice. Opere, conținînd informații asupra „artelor libere“ apăruseră încă mai de mult la Roma; unele dintre ele, scrise în secolul al V-lea sau al VI-lea de Martianus

---

[1] Prin Imperiul Roman autorul subînțelege de fapt Imperiul Romano-German, apărut după distrugerea Imperiului Roman antic — *N.R.*

Capella, Cassiodorus și îndeosebi de Boethius, avură o influență de lungă durată. În jurul anului 600 apar *Etimologiile (Origines)* în 20 de cărți, ale episcopului Isidorus din Sevilla (570 — 636). Titlul acestei opere provine de la faptul că autorul explică — în cea mai mare parte greșit — sensul noțiunilor, făcînd o analiză filologică a termenilor respectivi. Conținutul matematic al *Etimologiilor* — cartea a III-a fiind consacrată quadriviumului — este cu totul neînsemnat.

Matematica în Bizanț. Datorită distrugerii în masă a documentelor istorice în timpul luptei bisericii bizantine din secolele al VII-lea —al IX-lea împotriva iconoclaștilor, s-au păstrat informații extrem de puține despre dezvoltarea cunoștințelor matematice în Bizanț. Se știe de exemplu că arhitectul catedralei Sf. Sofia din Constantinopol, Antemiu din Traless (decedat în anul 534), fusese un matematician capabil, ceea ce se vede dintr-un fragment al operei lui despre oglinzile incendiare. Antemiu cunoștea focarul și directoarea parabolei, precum și construcția elipsei cu ajutorul firului fixat în focare, întîlnită mai tîrziu la frații banu Musa (p. 287). Isidor din Milet, un colaborator al lui Antemiu la construcția catedralei, fusese și el matematician. Se presupune că tocmai despre Isidor din Milet este vorba în așa-numita carte a XV-a a *Elementelor*, în care autorul spune că „marele nostru dascăl" Isidor a pus și a studiat problema determinării unghiurilor diedre între fețele poliedrelor regulate. Această operă conține și alte cîteva teoreme cu privire la poliedrele regulate. Autorul acestei opere este necunoscut. Elev al lui Isidor din Milet fusese Eutokios din Ascalon, de pe litoralul palestinian, amintit mai înainte și care a scris comentarii la Arhimede și Apoloniu, prețioase pentru istoria științei.

Un autor necunoscut, de origine greacă, numit uneori Heron cel Tînăr, scrie în jurul anului 940 la Constantinopol *Geodezia* — o carte despre măsurarea loturilor de pămînt și în particular a hipodromului din Constantinopol, după metoda lui Heron din Alexandria.

În a doua jumătate a secolului al XI-lea trăiește Mihail Psellos (născut în 1018, decedat după 1078). Lui i se atribuie o operă despre *quadrivium*. În partea de aritmetică se prezintă doar o clasificare a numerelor și a rapoartelor, iar în geometrie se afirmă că deși părerile sînt divergente în ceea ce privește găsirea ariei cercului, cea mai răspîndită este metoda conform căreia se ia media geometrică între aria pătratului înscris și circumscris,

ceea ce dă pentru π valoarea $\sqrt{8} = 2{,}828$. Acest fapt arată de la ce nivel coborît a trebuit să pornească din nou matematica.

Matematicienii bizantini își căpătau cunoștințele nu numai din literatura veche greacă și latină, ci și din opere arabe și persane. Mulțumită acestui fapt, în secolul al XI-lea în Bizanț se răspîndesc întrucîtva cifrele arabe și numerația pozițională.

Călugărul Maximus Planudes din Nicomedia, care a trăit în jurul anilor 1260—1310 și a fost trimisul împăratului Andronic al II-lea la Veneția, scrie comentarii la primele două cărți ale *Aritmeticii* lui Diofant. El ocolește însă părțile mai dificile din această operă. O altă lucrare a lui Planudes despre aritmetică începe după modelul indienilor, cu explicarea celor nouă semne pentru numerele de la 1 pînă la 9, precum și a semnului denumit „cifra" (τζιφρα — *tzifra*) și care „înseamnă nimic". După cum spune Planudes aceste nouă semne, la fel ca și ultimul, provin din India. Înaintea cărții lui Planudes și purtînd un titlu aproape identic, apăruse în 1252 o altă carte, în care însă, semnele cifrelor nu erau cele arabe răsăritene, ca la Planudes, ci cele arabe apusene.

Numerația pozițională se răspîndește lent în Bizanț, sub diferite forme. Într-un manuscris din secolul al XIV-lea, întîlnim, de pildă, o utilizare pozițională a cifrelor alfabetice: 18 se scrie $\alpha\eta$, iar fracția $\frac{13}{28}$ — sub forma $\frac{\alpha\gamma}{\beta\eta}$.

Printre problemele lui Planudes există următoarea: pe patul de moarte, un tată împarte în mod egal banii între fiii săi, dînd primului 1 monedă și $\frac{1}{7}$ din restul banilor, celui de-al doilea 2 monede și $\frac{1}{7}$ din rest, celui de-al treilea — 3 monede și $\frac{1}{7}$ din rest etc și în acel moment se stinge; se cerea să se afle cîți bani și cîți copii avusese acel tată. O altă problemă constă în găsirea a două dreptunghiuri cu perimetre egale, astfel încît aria unuia să fie un multiplu dat al ariei celuilalt. Tot aici se dă „proba prin nouă", cu indicația că ea fusese descoperită de indieni și fusese transmisă prin arabi.

Elev și prieten al lui Planudes, Manuil Moscopulos a trăit la sfîrșitul secolului al XIII-lea și începutul celui de-al XIV-lea. El scrie un tratat despre pătratele magice, unde arată regulile de alcătuire a lor pentru $n = 2m + 1$ și $n = 4m$, promițînd să le dea și pentru $n = 4m + 2$; nu se știe dacă și-a adus la înde-

plinire promisiunea. Merită atenție faptul că Moscopulos folosise pentru aceasta permutările ciclice [178].

Matematica în Armenia și Georgia. La mijlocul primului mileniu, regiuni întinse din Armenia se aflau sub stăpînirea Persiei, iar altele — a Bizanțului. Un eveniment important în istoria poporului armean și a luptei sale pentru independență a fost crearea unui alfabet propriu la hotarul secolului al IV-lea și al V-lea. Acest alfabet alcătuit din 36 de litere, creat de Mesrop Maștoț (361—440) și avînd la origine pe cel grecesc și persan, stă la baza numerației alfabetice armene. Numerația scrisă armeană se deosebește de cea ionică prin faptul că ea conține notații literale nu numai pentru unități, zeci și sute, ci și pentru mii (fig. 90). Armenii numeau zece mii *biur* și pentru notarea numerelor mai mari decît *biur* foloseau un semn special care mărește de 10 000 de ori valoarea cifrelor alfabetice (pentru aceasta, în partea dreaptă și de sus a literei-cifre, se pune un semn special) [179].

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ա	Բ	Գ	Դ	Ե	Զ	Է	Ը	Թ

10	20	30	40	50	60	70	80	90
Ժ	Ի	Լ	Խ	Ծ	Կ	Հ	Ձ	Ղ

100	200	300	400	500	600	700	800	900
Ճ	Մ	Յ	Ն	Շ	Ո	Չ	Պ	Ջ

1000	10000
Ռ	Օ

Fig. 90

În a doua jumătate a secolului al VII-lea lucrează un remarcabil învățat armean, vardapet (dascălul) Anania Șirakați, adică născut în regiunea Șirak. După spusele unei autobiografii ce i se atribuie lui Anania, el „îndrăgostindu-se puternic de arta calculului" își căutase multă vreme un dascăl, și în cele din urmă îl găsește în persoana matematicianului grec Tiuhik din Trapezunt. Înapoiat în patrie, Anania scrie o serie de opere, precum: *Cosmografia și numărătoarea anilor* și o culegere de probleme de aritmetică *Întrebări și răspunsuri*, păstrată probabil incomplet, fără partea introductivă cu caracter teoretic. Culegerea conține 24 de probleme cu răspunsuri, dar fără deducerea lor; aproape în toate problemele se oglindește într-un fel sau altul viața poporului armean, fie că se vorbește despre anumite evenimente din istoria armeană, fie că se folosesc unități de măsură armene etc. Problemele sînt liniare, cu o singură necunoscută; într-o problemă (nr. 22), se cere să se împartă o mărime în progresie aritmetică; există și problema antică elenă de umplere a unui bazin prin trei conducte

(nr. 24). Vom da textul primei probleme, care la fel ca și multe altele se poate scrie printr-o ecuație de forma

$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}+\cdots+\frac{x}{m}+n=x:$$

„De la tatăl meu am auzit următoarele. În timpul cunoscutelor războaie dintre armeni și perși, Zaurak Kamsarakan a săvîrșit fapte extraordinare; se pare că, atacînd armatele persane de trei ori într-o lună, el distruse de prima dată jumătate din oastea lor și urmărind-o, a doua oară, nimici a patra parte din ea, iar a treia oară — a unsprezecea parte; cei rămași în viață, în număr de două sute opt zeci, o luară la fugă spre Nahceavan. Și astfel, noi trebuie să aflăm după această rămășiță cîți fuseseră ei pînă la înfrîngere"[1] [180, p. 39].

Fracțiile ce se întîlnesc în această culegere de probleme sînt prezentate sub forma unor fracțiuni de unitate, uneori într-o formă destul de originală; astfel, răspunsul la problema 24, pe care noi l-am fi scris $\frac{6}{11}$, se dă sub forma sumei:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{22}, \text{ și nu } \frac{1}{2}+\frac{1}{22}.^{*}$$

Relativ de curînd au fost descoperite tabele vaste întocmite de Anania Șirakați pentru adunare, scădere și înmulțire, precum și „șasemiarul" lui, adică niște tabele cu perechi de factori care au ca produs numărul 6 000, primul factor trecînd prin toate valorile literelor alfabetului armean, iar cel de-al doilea factor dîndu-se rotunjit pînă la un număr întreg. „Șasemiarul" se poate folosi și la împărțire. Tabele similare au existat în Armenia și pentru numerele 5 000, 4 000 și altele cîteva [179].

La începutul secolului al VIII-lea Armenia cade sub stăpînirea califilor din Bagdad, dar la sfîrșitul secolului al IX-lea își reca-

[1] În această problemă se are în vedere răscoala armenilor împotriva perșilor din cea de-a doua jumătate a secolului al VI-lea. Kamsarakanii erau prinții care stăpîneau Șirakul și alte regiuni din Armenia. Nahceavan este actualul Nahicevan — *N.A.*

* Dacă folosim descompunerea $\frac{2}{11}=\frac{1}{6}+\frac{1}{66}$, cunoscută încă în Egiptul antic, atunci pentru $\frac{6}{11}=3\cdot\frac{2}{11}$ se obține $\frac{2}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{22}$. Mai departe s-ar fi putut folosi descompunerea $\frac{2}{6}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$ — *N.A.*

pătă independența. Timp de aproximativ două secole, economia și cultura Armeniei se află în progres. Crește interesul față de clasicii filozofiei și ai științei elene, ale căror opere încep să fie traduse în limba armeană în secolul al XI-lea. Un învățat și promotor al culturii, Grigore Magistrul (în jurul anilor 990—1058), traduce printre altele și *Elementele* lui Euclid. Un fragment din traducere păstrat pînă-n zilele noastre și aparținînd probabil lui Grigore Magistrul conține definițiile, postulatele, axiomele și primele trei propoziții din cartea I a *Elementelor* [181].

Din școala mănăstirii Ahpat din orașul Lori, se remarcă Ovannes Sarkavag (în jurul anilor 1045—1129), autor al unor lucrări de astronomie, calendar și matematică. Opera lui, *Numere poligonale*, se bazează pe surse elene, de felul lucrărilor lui Nikomah.

Progresul economic și cultural al Armeniei este încetinit de noi cuceriri străine crude și de lungă durată, iar literatura științifică armeană din perioada ce o analizăm nu ni s-a păstrat aproape de loc. De a doua jumătate a secolului al XV-lea ține manuscrisul primului manual de aritmetică, cunoscut nouă; în acest manual se laudă un nou sistem pozițional de numerație, prezentat de autor ca „luminos“ în opoziție cu sistemul „întunecat“ — alfabetic [179].

În vechea Georgie, numerația se bazează de asemenea pe un alfabet format din cel elen și persan și avînd 37 de litere; ea se aseamănă cu cea armeană (fig. 91). Să adăugăm numai că în limba georgiană existaseră din timpuri străvechi numerale speciale nu numai pentru 10 000—*bevri*, ci și pentru 1 000 000—*ușkari* și chiar pentru 10 000 000 — *uști*. Numerația alfabetică se menține multă vreme în Georgia, deși prima inscripție cu cifre arabe răsăritene se întîlnește într-un manuscris georgian încă din anul 974 [182].

1	2	3	4	5	6	7	8	9
ა	ბ	გ	დ	ე	ვ	ზ	ჱ	თ

10	20	30	40	50	60	70	80	90
ი	კ	ლ	მ	ნ	ჲ	ო	პ	ჟ

100	200	300	400	500	600	700	800	900
რ	ს	ტ	ჳ	უ	ფ	ქ	ღ	ყ

1000	10000
შ	ჩ

Fig. 91

Despre cultura matematică a Georgiei medievale cunoaștem puține lucruri, fiindcă datorită cuceririlor străine nu ni s-au păstrat manuscrise de matematică din acele timpuri. În operele georgiene de astronomie din secolele al X-lea—al XIII-lea, care reflectă influența științei din țările Islamului, se expun reguli de

întocmire a calendarelor, de determinare a fazelor Lunii ș.a. În lucrările de filozofie din aceeași epocă, care stau mărturie asupra faptului că georgienii cunoșteau bine operele grecilor, se poate găsi expunerea celor mai importante noțiuni de geometrie.

Așa de pildă, Ioane Petriți (în jurul anilor 1055—1130), conducătorul academiei din Ghelat, organizată de regele David Constructorul, aflat sub influența puternică a neoplatonicilor și îndeosebi a lui Proclus Diadoh, scrie:

„Geometria socotește mai presus de toate cele trei dimensiuni ale sale, iar două dintre ele se trag dintr-una... Fiindcă, dacă punctul se întinde, apare linia dreaptă care este primul lui vlăstar, iar dacă linia se lățește, ea produce un plan" [183, p. 239]. Petriți a tradus în limba georgiană operele filozofice ale lui Proclus și le-a înzestrat cu comentarii vaste; este incontestabil că citirea operelor lui Proclus i-a stimulat interesul față de geometrie.

Nicolae Artavazdos. Tratatul mai sus amintit al lui Moscopulos este dedicat învățatului bizantin Nicolae Artavazdos din Smirna, armean de origine. Artavazdos a trăit în mijlocul secolului al XIV-lea. Lui îi aparține publicarea operei lui Planudes despre aritmetica indiană, cu completări personale. S-au păstrat două opere ale lui Artavazdos, sub formă de scrisori. Una se numește *Scurtă și foarte clară expunere a științei calculului, întocmită în Bizanțul lui Constantin, de Rabdas Nicolae Artavazdos din Smirna, specialist în aritmetică și geometrie, la rugămintea preacinstitului raportor juridic, avocatul Gheorg Hacik, foarte ușoară pentru doritorii de a o studia.* În această lucrare se explică sistemul alfabetic de calcul și numărătoarea pe degete pînă la 9 999; cu mîna stîngă se reprezentau unitățile și zecile, iar cu dreapta — sutele și miile. Aceasta este cea mai veche expunere cunoscută a numărătorii pe degete, în limba greacă, deși grecii o folosiseră încă pe vremea lui Aristofan. Expunînd operațiile de aritmetică, Artavazdos observă că, în cazul numerelor mari, este bine să se folosească „marele calcul indian"; la sfîrșitul scrisorii se dau tabele mari de adunare, scădere și înmulțire în numerația alfabetică, apropiate de tabelele amintite ale lui Anania Șirakați.

În cea de-a doua scrisoare, adresată prietenului său Theodor din Clazomene, în apropierea Smirnei, se analizează în continuare alte probleme de aritmetică. Se expun operațiile cu fracții și procedeul aproximativ de extragere a rădăcinilor pătrate, de pe vremea lui Heron. Fracțiile se reduc în permanență la suma

de fracţiuni unitare şi $\frac{2}{3}$; la înmulţirea şi împărţirea fracţiilor ele se aduc mai întîi la numitor comun, dar rezultatul se exprimă din nou în fracţiuni de unitate. Odată cu problemele rezolvabile prin regula de trei există şi o serie de probleme care se pot traduce prin ecuaţii liniare cu una şi două necunoscute, de forma:

$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}+\cdots+\frac{x}{m}=n,$$

$$x+y=n, \qquad ax=by,$$

$$x+\frac{y}{a}=y+\frac{x}{b}=n.$$

Artavazdos rezervă un loc important calculelor calendaristice. Să observăm că în rezolvarea problemelor din viaţa cotidiană, prin regula de trei, Artavazdos utilizează termenul „aritmetica politică", intrat apoi în literatură [178, 179]. Un manuscris de geometrie al lui Artavazdos, păstrat la Paris, n-a fost încă studiat de nimeni.

Dintre matematicienii bizantini mai trebuie amintiţi şi Ioan Pediasim şi Isaac Arghir din secolul al XIV-lea. Pediasim fusese păstrătorul peceţii patriarhului din Constantinopol în perioada domniei lui Andronic al III-lea (1328—1341). Lui îi aparţin observaţii asupra unor probleme dificile din aritmetică, tratatul despre duplicarea cubului şi *Geometria* — o operă foarte apropiată de *Metrica* lui Heron. Arghir fusese călugăr şi unul dintre numeroşii traducători bizantini ai operelor persane de astronomie. El a scris o *Geodezie* şi comentarii la primele şase cărţi ale *Elementelor* lui Euclid, precum şi un tratat despre extragerea rădăcinilor pătrate, conţinînd şi un tabel al rădăcinilor numerelor de la 1 la 102 în fracţii sexagesimale.

Activitatea acestor matematicieni se desfăşoară în perioada decăderii politice a Bizanţului, în jurul căruia se strînge din ce în ce mai mult cercul oştirilor turceşti. În anul 1453 Constantinopolul cade. Unii învăţaţi bizantini fug în Occident, unde ajută la studiul manuscriselor moştenite de la greci.

Baeda[1] şi Alcuin. În timp ce continentul Europei este zguduit de năvălirile noilor triburi în perioada de decadenţă a Imperiului

[1] Citeşte Beda. Ortografia numelui medieval a fost făcută în limba latină — *N.R.*

Roman și chiar mai tîrziu, Irlanda, unde creștinismul pătrunsese încă din secolul al V-lea, rămîne neatinsă de vijelioasele evenimente. Mănăstirile irlandeze în decursul unei perioade anumite de timp devin importante centre de cultură, iar călugării irlandezi vizitează țări depărtate.

Am mai vorbit despre interesul bisericii față de calendar și calcularea zilei paștelui, de care sînt rigid legate alte multe importante sărbători creștine. Prima zi de paște se stabilește prin reguli care în esență dau soluția în numere întregi a unor ecuații liniare nedeterminate. Rolul principal îl joacă cerința ca paștele să înceapă în prima duminică după Luna plină, ce are loc în ziua echinocțiului de primăvară sau într-o zi următoare acestuia. O anumită zi din săptămînă (să zicem, prima duminică din luna martie) cade la date diferite în diferiți ani, repetîndu-se într-un ciclu de 28 de ani (așa-numitul ciclu solar), iar fazele Lunii se repetă cu o periodicitate de 19 ani (ciclul lunar). De aceea, zilele paștelui se schimbă în calendar într-o anumită succesiune, cu o perioadă de 532 de ani (marele ciclu). Am arătat doar factorii principali ai pascaliilor, al căror calcul mai este complicat și de o serie de condiții suplimentare. În biserica creștină s-au dus dispute lungi în privința zilelor paștelui. Asemenea controverse au apărut în particular între biserica engleză și cea irlandeză, și această problemă a fost supusă judecății publice în prezența regelui Oswin în anul 664.

Nu este de mirare că această problemă a atras atenția călugărului învățat irlandez Baeda, supranumit Venerabilul (în jurul anilor 673—735), care a consacrat cronologiei o lucrare specială, purtînd titlul *Despre calculul timpului (De temporum ratione)* [184]. Baeda a fost un învățat multilateral. Despre sine însuși el spunea că îi plăcuse totdeauna fie să învețe, fie să predea, fie să scrie. Baeda are merite însemnate ca istoric, dar el lasă urme și în dezvoltarea matematicii. Lui îi aparține unica descriere completă a numărătorii pe degete (pe care am întîlnit-o mai sus), cuprinsă în cartea lui de cronologie. Degetele îndoite în anumite feluri pe palma mîinii reprezintă unități, zeci, sute și mii, iar anumite gesturi făcute cu mîinile permit numărătoarea pînă la un milion.

Numărătoarea pe degete existase încă din antichitate. Negustorii o foloseau pentru a încheia în secret diferite afaceri în prezența unor persoane străine. Chiar și cei analfabeți puteau folosi numărătoarea pe degete, dar nici matematicienii de seamă nu o neglijează; astfel, Leonardo Pisano ne-o recomandă ca procedeu aju-

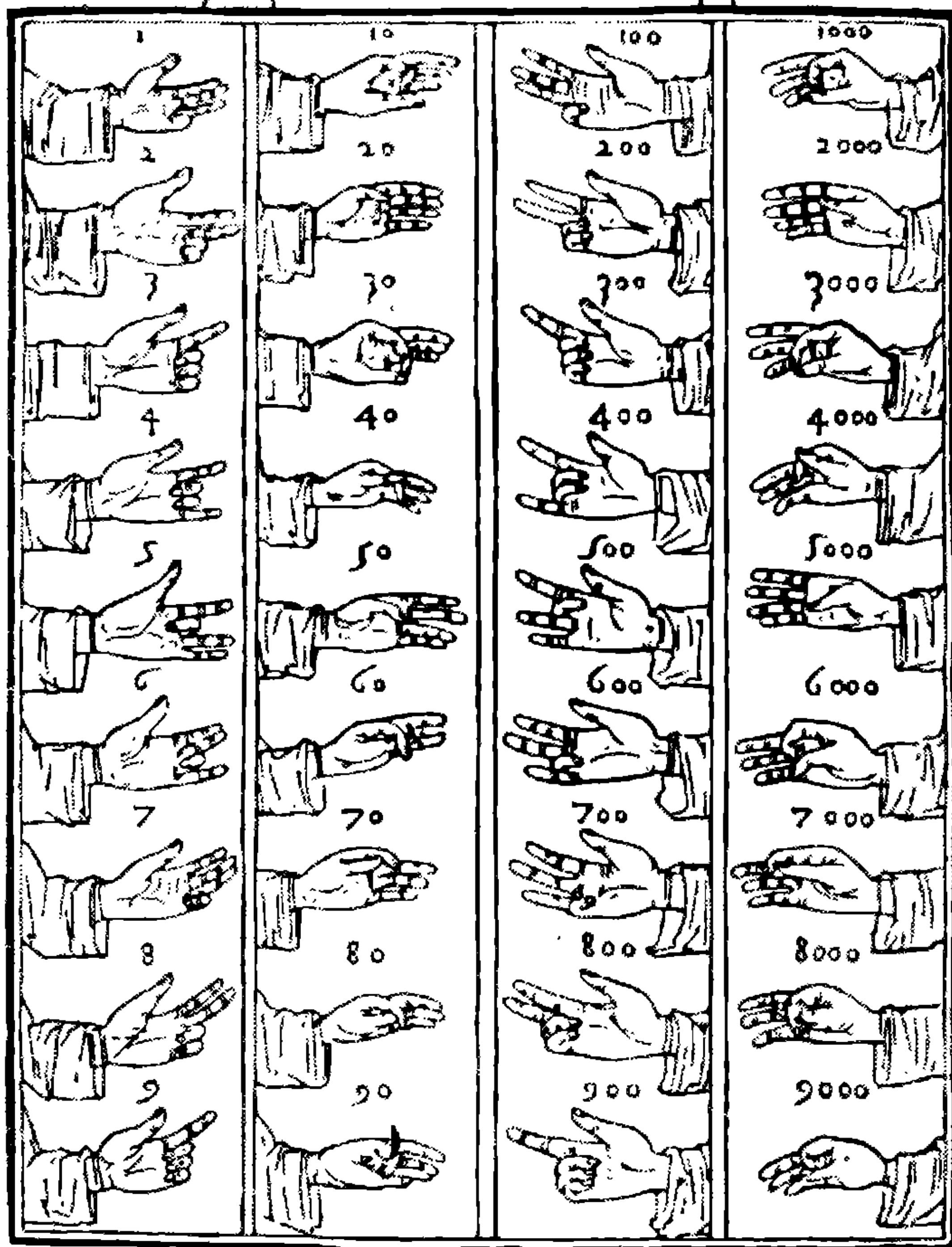


Fig. 92. Numărătoarea pe degete (după cartea *Summa de arithmetica* a lui L. Pacioli, 1494).

tător de calcul în numerația pozițională. De această numărătoare se leagă împărțirea numerelor în *digiti* (degete) — unități, *articuli* (articulații) — zeci și *numeri compositi* — celelalte numere sau numere compuse, caracteristice aritmeticii medievale, începînd cu Boethius; englezii numesc și astăzi unitățile — *digits*, iar francezii — *doigts*.

Termenii *digiti* și *articuli* se foloseau de exemplu la formularea regulilor de înmulțire[1].

În mijlocul secolului al VIII-lea se ridică statul francilor. Puternicul rege și mai tîrziu împărat, Carol cel Mare (768—814), se îngrijește de ridicarea nivelului cultural al preoțimii și al funcționarilor superiori din jurul său. În anul 781 el invită la curtea sa pentru a conduce învățămîntul pe călugărul Alcuin (de fapt, Alh-win, adică „prieten al templului“, originar din York care a trăit aprox. între 735 și 804), elev al unui prieten al lui Baeda: el încearcă să răspîndească în mijlocul nobilimii feudale analfabete diferite cunoștințe, printre care și de matematică. După sfatul acestuia, în Franța și Germania se înființează o serie de școli elementare, iar la mănăstirea din apropierea orașului Tours — o școală de nivel mai înalt, condusă personal de Alcuin în ultimii ani ai vieții sale. Pentru popularizarea matematicii, Alcuin compune probleme sub formă de ghicitori și glume, iar altora le imprimă un caracter bisericesc-mistic. Poate că Alcuin este autorul culegerii *Probleme pentru perfecționarea adolescenților (Propositiones ad acuendos juvenes)* [185], cunoscută după o copie făcută în jurul anului 1 000.

În această culegere intră, de pildă, o asemenea problemă, a cărei rezolvare cere nu numai simple cunoștințe de matematică, ci și o dibăcie de negustor: doi oameni cumpără o turmă de porci cu 100 de soldi, la prețul de 5 porci cu 2 soldi. Apoi ei împart turma și încep să vîndă 5 porci cu cîte 2 soldi și cîștigă bine. Cum e posibil aceasta? Ei avuseseră 250 de porci, pe care-i împărțiră în două turme de cîte 125 de porci — una, cu porci grași, alta cu porci slabi. Primul vîndu 120 de porci la prețul de 2 porci cu cîte 1 soldi, celălalt — 120 de porci, la prețul de 3 porci cu cîte 1 soldi, adică vîndură 5 porci cu cîte 2 soldi. Primul a primit 60, al doilea — 40 soldi, așadar împreună 100 de soldi, și au mai rămas cu $5 + 5 = 10$ porci. Să mai amintim și vestita problemă de istețime, în care trebuie trecuți peste rîu un lup, o capră și o varză.

Dar culegerea mai cuprinde și alte multe probleme pur aritmetice, bucurîndu-se de o mare faimă și mai tîrziu. Așa de pildă, într-o problemă se cere să se afle în cîte salturi va ajunge cîinele un iepure ce se găsește la o distanță de 150 de picioare înaintea cîinelui, dacă iepurele sare de fiecare dată cîte 7 picioare, în timp

---

[1] În aritmetica tipărită la Iași în 1795, Anfilochie — urmînd un model italian — folosește termenul de „număr încheiat“ (articulația ≡ încheietură) — *I.P.*

ce cîinele sare 9. Într-o altă problemă, 100 de *scheffeli*[1] se împart între 100 de bărbați, femei și copii după cum urmează: fiecare bărbat primește cîte 3 *scheffeli*, fiecare femeie — cîte 2, iar doi copii — unul (fără demonstrație se dă un singur răspuns: 11, 15, 74). Asemenea probleme liniare nedeterminate, cu soluții întregi, îi preocupaseră și pe matematicienii din Orient (vezi pp. 244 — 245). Există și o problemă de umplere a unui bazin prin conducte, întîlnită încă la Heron, o serie de probleme exprimabile prin două ecuații liniare cu două necunoscute etc. Problemele geometrice de proveniență romană conțin doar aproximări foarte grosolane (de exemplu, aria cercului se ia egală cu pătratul sfertului de circumferință, aria triunghiului se ia egală cu produsul semisumei a două laturi prin jumătatea celei de-a treia etc.).

Premise pentru dezvoltarea ulterioară a matematicii. Oricît de încet s-a dezvoltat cultura de la căderea Imperiului Roman (476) și pînă la începutul secolului al X-lea cînd apar primele licăriri ale renașterii spirituale, totuși viața s-a îmbogățit cu numeroase procedee tehnologice noi și cu întreaga tradiție a tehnicii meșteșugărești și agricole, aduse de „barbari“. Odată cu introducerea plugului greu cu roți, a folosirii calului la arat, a sistemului de asolament trienal și odată cu răspîndirea generală, mai întîi a morilor de apă (secolul al X-lea), iar apoi a celor de vînt (secolul al XI-lea), în societate se produce o oarecare ușurare a muncii fizice și se creează surplusuri de produse. Aceasta favorizează dezvoltarea comerțului și construcția orașelor noi, unde apar catedrale monumentale, iar apoi (secolele al XI-lea—al XIII-lea) se înființează universitățile.

Dezvoltarea meseriilor și a comerțului începe în Italia înaintea altor țări din Europa occidentală. Încă în secolele al IX-lea — al X-lea, cetățile și reședințele episcopale încep să se transforme în comune orășenești, unde se concentrează meseriașii textiliști, armurierii și giuvaergiii, precum și negustorii. Aceștia din urmă realizează legături între Răsărit și Apus: între Germania, Franța și Burgundia — prin trecătorile peste Munții Alpi, iar cu Bizanțul, Orientul Apropiat și Egiptul — pe mare.

Cunoștințele matematice devenite necesare se compun din rămășițe de erudiție greco-romană păstrate în mănăstiri și informații de ordin practic în spiritul agrimensorilor. Cît de coborît

[1] *Scheffel* — unitate de măsură germană pentru cereale, existentă pînă în anul 1872 și care era echivalentă cu un număr variabil de litri (între 55 și 77 l) după regiune — *N.T.*

fusese pe atunci întregul nivel cultural în Europa occidentală se vede din faptul că, într-o vreme, cărţile din mănăstiri deveniseră atît de rare, încît se păstrau legate cu lanţuri. Şi totuşi, tocmai şcolile mănăstireşti rămîn multă vreme cele mai importante centre de răspîndire a culturii şi a erudiţiei „laice".

Odată cu răspîndirea comerţului încep să se stabilească şi legături ştiinţifice cu cultura arabă, în primul rînd prin Spania şi Sicilia.

Gerbert. Călugărul Gerbert (născut între anii 930 şi 945 în Auvergne), devenit mai tîrziu papă (999—1003), sub numele de Silvestru al II-lea este unul dintre primii învăţaţi care vizitează Spania, şi anume, Catalonia.

Între anii 972 şi 982, Gerbert locuieşte la Reims, unde lucrează într-o şcoală devenită apoi celebră; el predă obiectele quadriviumului. Afară de matematică, logică şi filozofie Gerbert se ocupă şi de astronomie. În jurul anului 994 el construieşte la Magdeburg un ceas solar, pentru realizarea căruia întreprinde observaţii asupra Stelei Polare.

Lui Gerbert îi aparţin cîteva opere de matematică; nu se ştie totuşi cu exactitate dacă el este într-adevăr autorul cărţilor ce i se atribuie [186]. Aceasta se poate afirma cu mai multă certitudine cu privire la *Cartea despre împărţirea numerelor (Libellus de numerorum divisione)*, şi cu mai puţină certitudine, despre *Regulile de calcul pe abac (Regula de abaco computi)*. În orice caz, ambele lucrări (păstrate în manuscrise mai tîrzii) au un conţinut apropiat de cel original al lui Gerbert. În ambele manuscrise, numerele se exprimă prin cuvinte sau se reprezintă prin cifre romane. Influenţa romană se oglindeşte îndeosebi în cea de-a treia operă de geometrie atribuită lui Gerbert, ajunsă pînă la noi sub forma unui manuscris din secolul al XII-lea. Lucrarea conţine cele mai simple propoziţii de geometrie şi reguli de topometrie, precum şi procedee de calculul numerelor poligonale şi piramidale.

Gerbert poartă corespondenţă ştiinţifică cu unii contemporani ai săi. Cînd Adelbold din Utrecht, confundînd măsura ariei triunghiului cu aşa-numitele numere triunghiulare, îşi arată nedumerirea faţă de faptul că aria unui triunghi echilateral cu latura 7 se exprimă prin două numere diferite $21 = \frac{7 \cdot 6}{2}$ şi $28 = \frac{7 \cdot 8}{2}$, Gerbert îi explică corespondentului său eroarea comisă. Primul număr, arată Gerbert, dă aria triunghiului, deoarece într-un

triunghi echilateral înălțimea este mai mică cu o șeptime decît latura lui (în acest fel, Gerbert folosește aproximarea $\sqrt{3} = \frac{12}{7}$); iar al doilea număr exprimă geometric aria a 28 de pătrate de arie 1 (fig. 93).

Popularizînd operele lui Boethius, fragmente din *Elementele* lui Euclid și geometria practică a agrimensorilor romani, Gerbert privește critic noțiunile fundamentale ale geometriei. El arată că în realitate, nici un punct, nici o linie și nici o suprafață nu se întîlnesc altfel decît legate de un corp oarecare. Noi desprindem numai mintal punctele, liniile și suprafețele, de corp.

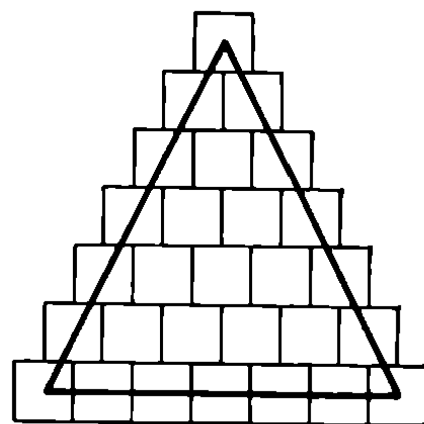


Fig. 93

Pentru nivelul scăzut al culturii matematice din acele vremuri este caracteristic următorul fapt: cînd, ca adept al mișcării din Cluny, îndreptată spre întărirea pe toate căile a bisericii și a scaunului papal, Gerbert opune puterea papală puterii feudalilor laici, el este învinuit printre altele și de faptul că posedă știința de a împărți numere oricît de mari și deci este vîndut diavolului.

Traducerile din limba arabă și greacă. După cum s-a mai spus, traducerile din limba arabă, atît ale operelor originale cît și ale celor din literatura greacă existente în limba arabă, au avut o importanță imensă pentru progresul cunoștințelor matematice din Europa. Traduceri din limba arabă s-au efectuat cu o intensitate deosebită în secolele al XII-lea—al XIII-lea, dar studiul manuscriselor arabe continuă să îmbogățească cunoștințele matematicienilor europeni pînă și în secolele al XV-lea—al XVII-lea.

La răspîndirea cunoștințelor contribuie medicii și astrologii arabi și evrei, ținuți pe lîngă curțile unor conducători din Europa apuseană. Dar principala muncă de traducere se desfășoară pe teritoriul Peninsulei Iberice, recucerit treptat de spanioli de la mauri. Odată cu cucerirea orașului Toledo în anul 1085, într-acolo pornesc în grabă oameni însetați după cunoștințe noi, și în scurt timp aici lucrează o întreagă școală de traducători și compilatori sub protecția arhiepiscopului Raymond I (1126—1151). Traduceri se fac de asemenea la Barcelona și Segovia. La această activitate participă oameni de diferite naționalități: arabi creștinați, așa-numiții *mudjeri*; spanioli, printre care și cei trecuți

înainte la mahomedanism, așa-numiții *mosarabi*; evrei spanioli, englezi, italieni, slavi și flamanzi. În cele din urmă se creează o imensă literatură științifică și filozofică în limba latină, devenită limba comună a tuturor învățaților Europei occidentale în perioada de timp ce o analizăm [187].

În timpul lui Alfonso al X-lea, rege al Castiliei și al Leonului (1226—1284), protector al științelor, supranumit și Învățatul, la Toledo se traduc în limba spaniolă o serie de opere arabe de astronomie și de științe înrudite cu aceasta. Astfel, sub denumirea comună de *Cărți de cunoștințe astronomice (Libros del saber de astronomia)* apare în limba spaniolă traducerea, în parte compilativă, a unui șir de opere arabe privind astronomia și instrumentele astronomice. Deosebit de populare devin așa-numitele tabele ale lui Alfonso, cuprinzînd mișcările diurne ale Soarelui, Lunii și planetelor, precum și noțiuni de trigonometrie, geografie, cronologie, astrologie ș.a. Aceste tabele sînt întocmite în jurul anului 1270 de Iehuda ben Moses ha-Kohen și Isaak ha-Hazzan și au la bază tabelele remarcabilului astronom arab din vest, Abu Ishak Ibrahim ibn Iahia an-Nakkaș, mai cunoscut sub numele de al-Zarkali sau, în formă latinizată, Arsacheleus (aproximativ 1030—1090), care lucrase tot la Toledo cu două secole înaintea lor. Tabelele lui Alfonso, cu unele modificări ale textului, sînt traduse în limba latină și retipărite de nenumărate ori începînd din 1483 [30, II]. Totuși, crearea literaturii științifice în limbi naționale vii, în general vorbind, rămîne o chestiune a unui viitor încă îndepărtat.

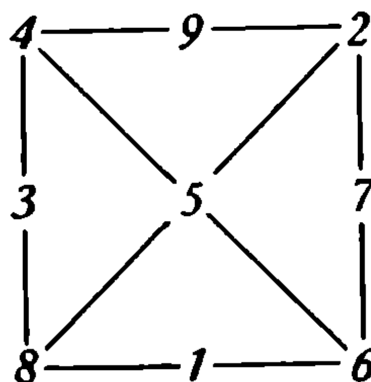
Odată cu Spania, un punct important de răspîndire a cunoștințelor orientale și grecești este Sicilia. Începînd cu anul 878, ea rămîne timp de două secole sub stăpînirea arabilor, iar în 1091 este cucerită de normanii sud-italieni. Latina, araba și în parte greaca sînt limbi folosite de mulți dintre locuitori.

Unul dintre primii traducători este marele învățat și gînditor englez Adelard din Bath. El scrie un șir de opere filozofice, în care analizează și probleme de filozofie a naturii, precum și cartea *Regulile abacului (Regulae abaci)*; mai tîrziu el apreciază după merit aritmetica pozițională. Adelard vizitează Franța, Sicilia și Orientul Apropiat. În 1126 el traduce tabelele astronomice ale lui al-Horezmi prelucrate de ad-Madjriti, făcînd cunoscute învățaților europeni noțiunile elementare de trigonometrie. O lucrare importantă a lui Adelard este traducerea din limba arabă a *Elementelor* lui Euclid, în 15 cărți. Poate că tot el a tradus și tratatul de aritmetică al lui al-Horezmi. Un alt englez, Robert

din Chester, traduce în 1145 la Segovia, tratatul de algebră al lui al-Horezmi, punînd bazele cunoștințelor algebrice ale învățaților europeni. Învățatul slav Hermann din Dalmația traduce din limba arabă *Planisferul* lui Ptolemau, al cărui text grecesc s-a pierdut, precum și o serie de alte opere de astronomie și matematică. Hermann a trăit în Spania în jurul anului 1140.

Uneori, traducători din diferite limbi lucrează împreună. Așa de pildă, filozoful spaniol Domingo Gonsalez colaborează cu Joannes din Sevilla (Toledano), care a lucrat la Toledo în secolul al XII-lea. Probabil că Joannes traducea din arabă în dialectul castilian, iar Gonsalez traducea mai departe în limba latină. Ei au tradus aproape 20 de opere, în special de astronomie și filozofie, o parte din ele tipărindu-se în secolele al XV-lea—al XVI-lea. Sub numele lui Joannes din Sevilla, după cum știm, se cunoaște importantul manuscris *Cartea Algorismului despre practica aritmeticii* [96].

Această carte este traducerea unei compilări arabe sau este o compilare proprie a lui Joannes din surse arabe. Expunerea tratatului de aritmetică al lui al-Horezmi reprezintă mai puțin de o treime din această carte, iar restul conținutului este consacrat unor probleme suplimentare de aritmetică și rezolvării a trei tipuri de ecuații de gradul al doilea; la sfîrșitul manuscrisului se dă pătratul magic



Italianul Platon din Tivoli, aflat la Barcelona în jurul anilor 1134—1145, face traduceri împreună cu matematicianul evreu Abraham bar Hiia (aproximativ 1070—1136), poreclit în literatura latină Savasorda — de la denumirea arabă *sahib al-șurta*, ceea ce înseamnă șeful pazei. Savasorda scrie în limba ebraică cîteva opere de matematică, astronomie, calendaristică etc. Cartea lui de geometrie practică *(Hibbur ha-meșiha ve-ha-tiș boret)*, întocmită în 1116, conținînd și noțiuni de algebră este tradusă în limba latină de Platon din Tivoli în 1146 sub titlul *Cartea despre*

măsurători (Liber embadorum) [188—189]. Există o legătură între această operă și lucrările celui mai mare matematician european din secolul al XIII-lea, Leonardo Pisano.

Cartea despre măsurători, avînd patru capitole, este bogată în conținut și, avînd în vedere rolul ei, vom spune cîteva cuvinte despre ea. În cap. I se dau noțiunile fundamentale de geometrie, inclusiv măsurarea ariilor figurilor dreptunghiulare, noțiunea de asemănare, precum și unele definiții aritmetice. Cap. II începe cu rezolvarea a trei tipuri de ecuații de gradul al doilea pe baza teoremelor din cartea a II-a a *Elementelor* lui Euclid; împreună cu traducerea algebrei lui al-Horezmi și opera lui Joannes din Sevilla, lucrarea lui Savasorda reprezintă prima expunere a acestor probleme în Europa. Mai departe, Savasorda arată cum se măsoară triunghiurile, în particular, prin cele trei laturi (fără demonstrație), cum se măsoară aproximativ cercul $\left(\pi = 3\frac{1}{7}\right.$, iar pentru probleme de astronomie, $\left.\pi = 3 + \frac{8\frac{1}{2}}{60}\right)$ și aria elipsei, care se ia egală cu cea a unui cerc avînd diametrul egal cu media aritmetică a celor două axe. Apoi se dă un mic tabel de coarde și se vorbește despre măsurarea poligoanelor descompuse în triunghiuri. Cap. III este consacrat împărțirii figurilor. În cap. IV — despre măsurarea volumelor — este de remarcat propoziția cu privire la lungimea diagonalei paralelipipedului dreptunghic. În încheiere, vom arăta că Savasorda, asemenea cu precursorii săi orientali — Abu Kamil ș.a., —, aplică în mod iscusit algebra la rezolvarea problemelor de geometrie. Iată un exemplu în care se determină baza b și înălțimea h a unui triunghi isoscel, fiind date latura a și aria S; îl reproducem pe scurt în notații moderne:

$$a^2 = h^2 + \frac{b^2}{4},\ 2S = bh,$$

de aceea:

$$a^2 - 2S = \left(h - \frac{b}{2}\right)^2,\ \frac{a^2 - 2S}{4} = \left(\frac{h}{2} - \frac{b}{4}\right)^2$$

și

$$\frac{a^2 - 2S}{4} + S = \frac{a^2 + 2S}{4} = \left(\frac{h}{2} + \frac{b}{4}\right)^2.$$

Mai departe, h și $\frac{b}{4}$ se găsesc prin adunare și scădere din relațiile:

$$\frac{h}{2} - \frac{b}{4} = \frac{\sqrt{a^2 - 2S}}{2}; \quad \frac{b}{2} + \frac{b}{4} = \frac{\sqrt{a^2 + 2S}}{2}.$$

Cel mai remarcabil traducător din această epocă este italianul Gherardo din Cremona în Lombardia (1114—1187). După mărturia unui elev al său, pe Gherardo îl atrage la Toledo interesul față de *Almagest*, care nu se găsea în Italia. Bogăția literaturii științifice arabe îl uimește pe Gherardo; el învață limba arabă și-și dedică întreaga viață traducerilor. Traducerile lui Gherardo cuprind logica și filozofia (în particular pe Aristotel și al-Farabi), matematica, astronomia, alchimia, fizica și medicina; numărul operelor traduse de el din limba arabă se apropie de nouăzeci. El traduce *Elementele* și *Datele* lui Euclid, *Măsurarea cercului* lui Arhimede, *Secțiunile conice* ale lui Apoloniu, *Almagestul* lui Ptolemeu, operele lui Teodosiu și Menelau, algebra lui al-Horezmi, comentariile lui an-Nairizi la primele zece cărți ale *Elementelor*, operele lui Tabit ibn Korra, ibn al-Haisam, Gabir ibn Afla etc. Unele dintre traducerile lui Gherardo au fost tipărite în secolele al XV-lea —al XVII-lea.

O traducere nouă a *Elementelor* lui Euclid în 15 cărți o dă în jurul anilor 1250—1260, matematicianul — astronom Giovani Campano din Novara (în apropierea Milanului); el folosește pentru aceasta atît sursele arabe, cît și traducerea mai veche a lui Adelard din Bath. Campano completează traducerea cu explicații și raționamente proprii, îndeosebi privitor la proprietățile unghiului de adiacență, adică ale unghiului dintre un arc de cerc și tangenta la capătul lui, precum și despre proprietățile generale ale mărimilor continue. Aceste probleme sînt analizate cu însuflețire în literatura medievală, latină. Prima ediție tipărită a *Elementelor*, apărută la Veneția în anul 1482, reproduce traducerea lui Campano.

Mult timp traducerile directe din limba greacă constituie o raritate. Una dintre cele mai vechi este traducerea latină a *Almagestului*, întocmită de un autor anonim care trăise în Sicilia în jurul anului 1160. Această traducere, ceva mai veche decît cea din arabă a lui Gherardo din Cremona, nu a căpătat probabil răspîndire și de aceea a fost refăcută de altfel mai puțin reușit, în anul 1451 de către grecul George din Trapezunt, care trăiește în Italia (1393—1486). Amintim în mod cu totul deosebit, ca pe un neobosit traducător din limba greacă, pe Willem de Merbecke din Flandra răsăriteană (aproximativ 1215—1286), care

vizitează în două rînduri Grecia și într-o vreme ocupă locul de arhiepiscop al Corintului. În afară de traduceri din Aristotel și Proclus, lui Merbecke îi aparțin traducerile operelor lui Arhimede și Heron. Lucrările lui Merbecke le folosește Tartaglia la editarea operelor lui Arhimede, apărute la Veneția în anul 1543. *Elementele* lui Euclid sînt traduse pentru prima oară din limba greacă în latină de către B. Zamberti la finele secolului al XV-lea; acest text se publică la Veneția în anul 1505.

Vom mai aminti și alte traduceri din limba arabă sau greacă. Este de observat doar că traducerile diferitelor cărți nu au avut aceeași soartă. Unele au exercitat o influență puternică și rapidă asupra progresului științei și a culturii europene. Acest lucru se referă în primul rînd la aritmetica și algebra lui al-Horezmi și la lucrările apropiate de ele, la lucrările de astronomie și trigonometrie ale lui al-Horezmi, al-Fergani, Ptolemeu, la cărțile lui Savasorda și Abu Kamil, optica lui ibn al-Haisam, *Elementele* lui Euclid (cel puțin, primele lor cărți), operele lui Aristotel și ale filozofilor arabi. Toate acestea corespundeau într-o măsură sau alta cerințelor mai largi ale vremii, erau însușite într-un fel sau altul, reprezentau un obiect de comentariu, de analiză, de discuție, de dezvoltare ulterioară. Alte traduceri au avut la început o răspîndire și o influență mai limitată. Operele lui Apoloniu și Arhimede erau prea grele iar timpul pentru asimilarea lor creatoare nu sosise încă. Totuși nu trebuie subapreciată valoarea acestor traduceri, ca o primă bază pentru cunoașterea celor mai înalte realizări ale matematicii grecești. Mai mult încă, unele dintre aceste traduceri fuseseră necesare direct învățaților care se ocupau de științele naturii. Noțiunile din teoria secțiunilor conice erau necesare de pildă pentru înțelegerea opticii lui ibn al-Haisam, precum și a lucrării de optică strîns înrudită cu ea, a fizicianului și filozofului polonez Witelo din secolul al XIII-lea (aproximativ 1225—1280). Un fragment din cartea I a *Secțiunilor conice* a lui Apoloniu, tradus probabil de Gherardo din Cremona, se întîlnește sub formă de introducere la textul latin al opticii lui ibn al-Haisam. Lui Johannes din Palermo, care trăiește un număr de ani la curtea împăratului Frederic al V-lea de Hohenstaufen (1194—1250) la Palermo, îi aparține după toate aparențele traducerea din limba arabă în latină a unei mici opere anonime despre hiperbolă. Aceste exemple nu sînt unicele.

Primele universități. Un rol important în dezvoltarea matematicii îl joacă universitățile. Cea mai veche universitate din Europa

— cea de medicină — este fondată la Salerno, cel mai tîrziu în a doua jumătate a secolului al XI-lea. În jurul anului 1100 se deschide Universitatea de la Bologna; aceasta este la început o școală unde pe baza dreptului roman se elaborează norme juridice, față de care crește interesul odată cu dezvoltarea orașelor. La sfîrșitul secolului al XII-lea, avînd la temelie cîteva școli mănăstirești, ia naștere Universitatea din Paris, unde învață mii de studenți din toate colțurile Europei; aproximativ în aceeași perioadă se înființează Universitatea din Oxford, iar în 1209 — cea de la Cambridge. În secolul al XIV-lea apar universitățile de la Praga — 1348, Cracovia — 1364, Viena — 1365, Heidelberg — 1385, apoi la Leipzig — 1409, Basel — 1459 etc. Spre deosebire de primele două, toate aceste universități nu erau școli strict profesionale, iar organizarea învățămîntului era aproximativ următoarea.

Universitatea era formată din patru facultăți — arte, teologie, drept și medicină. Studentul, de multe ori încă adolescent, intra mai întîi la facultatea de arte, unde învăța timp de 6 ani și după examene putea trece la o altă facultate. Cea mai populară și mai influentă era Facultatea de teologie, unde învățămîntul dura timp de 8 ani și se încheia cu un examen și o discuție publică. Profesorii se împărțeau în profesori inferiori (bacalaureați), magiștri și doctori. În fruntea universităților se aflau călugări teologi.

Matematica se învăța în cuprinsul quadriviumului la Facultatea de arte, iar unele probleme de mai multă finețe se expuneau la cursurile de filozofie, în special către sfîrșitul secolului al XIII-lea după consolidarea aristotelismului scolastic. Ulterior, la cursul de matematică se include expunerea primei sau a primelor două cărți din *Elemente*, o introducere în astronomia sferică, apoi lecții de noțiuni de optică, teoria mișcării planetelor, teoria proporțiilor, teoria latitudinii formelor (despre care vom vorbi mai departe). Dar timp de cîteva secole matematica rămîne doar o disciplină auxiliară pe lîngă unele catedre, iar profesori speciali de matematică nici nu există. După cum se pare, primul care se specializează numai în predarea științelor matematice este magistrul Johann din Gmunden de la Universitatea din Viena (aproximativ 1380—1442). Începînd cu anul 1412 el predă la Viena lecții despre algoritmul numerelor întregi și fracționare, adică de aritmetică, bazată pe numerație pozițională, lecții de optică, sferică, calcule calendaristice bisericești, iar mai tîrziu, un curs privind astrolabul.

Rolul auxiliar al matematicii în universități se răsfrînge negativ asupra cunoștințelor studenților, care, de pildă, în geometria teoretică nu merg mai departe de primele teoreme din cartea I a *Elementelor*. A cincea propoziție din această carte, privind egalitatea unghiurilor adiacente bazei într-un triunghi isoscel, este poreclită la sfîrșitul secolului al XIII-lea la Universitatea din Oxford „fuga infirmilor". Încă la începutul secolului al XVI-lea, la Universitatea din Paris, candidații la gradul de magistru al artelor, în locul examenului de geometrie, trebuiau să depună jurămînt că audiaseră lecțiile despre primele șase cărți ale *Elementelor*. Cu toate că în predare domină spiritul autoritar și scolastic, și cu toate că matematica are o poziție subordonată, totuși universitățile sînt centre importante de răspîndire și de dezvoltare a cunoștințelor matematice, în special în domeniile mai abstracte. În înseși străfundurile teologiei și științei scolastice se desfășoară o luptă aproape permanentă între gînditorii mai progresiști și cei ortodocși. La Universitatea din Oxford, de pildă, învață și lucrează filozofi progresiști de talia lui Robert Grossetest (1175—1253) și faimosul său elev Roger Bacon (aproximativ 1210—1295), care cere să se pună la baza științelor naturii experiența și deducția matematică. Și deși pregătirea de matematicieni nu constituia un scop în sine al universităților, totuși din ele au ieșit matematicieni vestiți, ca: Thomas Bradwardinus în Anglia, Nicole Oresme în Franța, Johann Müller — Regiomontanus în Germania, Nicolae Copernic — în Polonia.

Abacul. Un eveniment de cea mai mare importanță îl constituie introducerea și perfecționarea aritmeticii, bazată pe numerația zecimală pozițională. Această mare achiziție a civilizației fusese rezultatul unei lupte îndelungate între influențele noi orientale și tradițiile învechite romane și grecești.

În Europa occidentală medievală domnește la început fără rival numărătoarea cu cifre romane, fracțiile romane și se răspîndește abacul. Am mai vorbit despre cartea lui Gerbert consacrată acestui instrument de calcul. Descrierea amănunțită a abacului și a operațiilor efectuate cu ajutorul lui *(Liber abaci)* o face Bernelinus în secolul al XI-lea la Paris, care se pare că a fost elevul lui Gerbert [21, I]. Abacul este o scîndură netedă, pe care se presară nisip, împărțită în 30 de coloane ; trei dintre ele servesc pentru fracții, iar celelalte se grupează în cîte trei coloane, în total în nouă grupe. Uneori numărul grupelor este mai mic. Coloanele se închid la partea de sus prin niște arce, numite arce pitagoreice

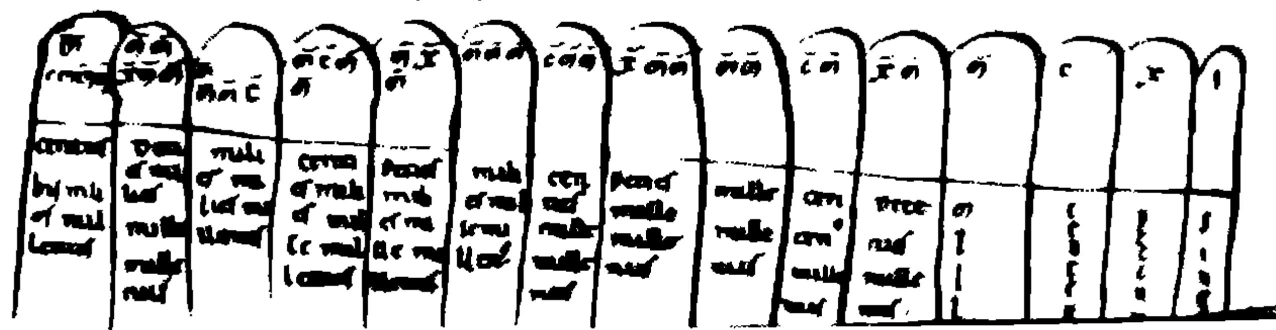


Fig. 94. Abac cu 15 coloane (dintr-un manuscris din secolul al XII-lea). Deasupra are explicația: „și fiecare arc [coloană] are numele lui [corespunde unui anumit rang]". De la dreapta spre stînga se succed rangurile unităților, zecilor etc. De exemplu, în coloana a șaptea se află $\overline{M}\overline{M}$ *mille millenus*, adică mii de mii. În coloana 11 și 13 indicii sînt greșiți.

arcus Pythagorei, fiindcă inventarea abacului i se atribuie lui Pitagora. În coloanele notate sus, de la stînga la dreapta prin literele *C* (*centum* — o sută), *D* (*decem* — zece) și *S* sau *M* (*singularis* sau grecescul *monas* — unitate), se așază sau se scriu semnele unităților rangurilor respective. Spre deosebire de formele antice ale tablei de calcul, unitățile nu se reprezintă cu ajutorul unor pietricele, ci cu ajutorul unor jetoane speciale numerotate, avînd reprezentată pe ele unitatea respectivă. Aceste unități și jetoane se numeau *apexuri*. Bernelinus spune că se pot folosi și literele alfabetului grecesc. Richer din Reims (născut între 940 și 950, decedat după 997), un elev al lui Gerbert, atribuie dascălului său inventarea jetoanelor numerotate, confecționate din corn.

Cuvîntul *apices (apices* este pluralul de la *apex)* înseamnă în limba latină, între altele, și scriere. Mult mai neclară este proveniența denumirilor diferitelor *apexuri* pentru 1,2 etc: *ighin*, *andras*, *ormis*, *arbas*, *cvimas*, *caltis*, *zenis*, *temenias*, *celentis*. Despre proveniența acestor cuvinte s-a emis o serie de presupuneri contradictorii, legîndu-le de diferite rădăcini arabe sau grecești. Probabil că nu deodată, dar totuși foarte curînd, la *apexurile* enumerate se adaugă *sipos* sub forma unui cerculeț cu un punct în interior. Cuvîntul *sipos* se trage de la grecescul *psephos*, care înseamnă pietricică sau jeton. *Sipos* nu fusese semnul lui zero, de care nu este nevoie în operațiile pe abac, ci un jeton cu destinație tehnică servind ca semn de memorie și care se mută pe de-

asupra coloanelor abacului pe măsură ce se efectuează operația respectivă (compară cu p. 373).

Înlocuirea pietricelelor sau a altor semne identice, prin apexuri, n-a prezentat avantaje din punct de vedere al comodității calculelor şi ulterior se revine la jetoane nemarcate. Dar *apexurile* avură o altă importanță în dezvoltarea matematicii: în ele vedem pe cei mai apropiați străbuni ai cifrelor moderne europene. Forma cifrelor evoluează desigur în decursul secolelor, simplificîndu-se treptat. Totuși, asemănarea lor cu cifrele este evidentă în multe cazuri, iar în altele se descoperă ușor dacă *apexul* se întoarce cu capul în jos — aceasta se referă la cifrele 2, 4 și 9. O asemenea comparație cu *apexurile* întoarse este cu atît mai justificată, cu cît acestea se puteau așeza pe abac în diferite poziții. Despre proveniența formei *apexurilor* se va vorbi mai departe.

Bernelinus descrie amănunțit procedeele pentru efectuarea operațiilor pe abac. Vom analiza operația cea mai dificilă cu numere întregi, și anume, împărțirea. Bernelinus distinge două procedee fundamentale de împărțire — cu și fără folosirea diferențelor. Procedeul fără diferențe se aseamănă cu cel obișnuit al nostru, iar cel cu diferențe reprezintă așa-numita împărțire

Fig. 95. Începutul tablei înmulțirii cu apexuri și cifre romane (manuscris din secolul al XI-lea, mănăstirea Sf. Emeran la Regensburg).

complementară, în care împărţirea printr-un număr oarecare b se înlocuieşte printr-o împărţire mai simplă la un număr „rotund“ c apropiat de b, fapt care sporeşte însă extrem de mult numărul total al operaţiilor impunînd după fiecare împărţire o înmulţire auxiliară prin diferenţa sau completarea $c - b$ (sau $b - c$) şi o adunare. Totodată, deîmpărţitul se descompune de fiecare dată în diferitele lui ranguri. Aşa de pildă — exemplul îi aparţine lui Bernelinus — numărul 668 se poate împărţi la 6 aplicînd diferenţa $10 - 6 = 4$, în felul următor:[1]
$600 : \mathit{10} = \underline{60}$, $60 \cdot 4 = 240$, $200 : 10 = \underline{\mathit{20}}$, $20 \cdot 4 = 80$, $60 + 40 + 80 = 180$, $100 : \mathit{10} = \underline{10}$, $10 \cdot 4 = 40$, $80 + 40 = 120$, $100 : 10 = \underline{10}$, $10 \cdot 4 = 40$, $20 + 40 = 60$, $60 : 10 = \underline{\mathit{6}}$, $6 \cdot 4 = 24$, $20 : 10 = \underline{2}$, $2 \cdot 4 = 8$, $8 + 4 + 8 = 20$, $20 : 10 = \underline{2}$, $2 \cdot 4 = 8$, în sfîrşit, $8 : 6$ dă la cît $\underline{1}$ şi la rest 2. Adunînd cîturile consecutive subliniate, obţinem cîtul căutat:

$$60 + 20 + 10 + 10 + 6 + 2 + 2 + 1 = 111,$$

iar restul este egal cu 2.

Operaţia descrisă vorbeşte de la sine. Pe drept cuvînt, în operele de mai tîrziu, ca de exemplu, la Adelard din Bath sau Radulph din Laon, împărţirea complementară se numeşte „de fier“ *(divisio ferrea)*, iar fără diferenţe — „de aur“ *(divisio aurea)*.

Calculul cu fracţii romane era dificil şi Bernelinus îi consacră partea de încheiere a lucrării sale.

În secolele al XI-lea — al XII-lea, despre abac se scriu o serie de opere. Să amintim un mic tratat al abatelui Hermannus Contractus (Invalidul) (1013—1054) de la mănăstirea benedictină din Reichenau, poreclit astfel deoarece avea membrele atinse de paralizie. Acest tratat arată că abacul se folosea şi fără *apexuri*. Hermannus vorbeşte numai despre cifrele romane. Construcţia abacului şi aplicarea lui le descrie în amănunt Raul sau Radulph (decedat în 1131), fost profesor la cunoscuta şcoală mănăstirească din Laon [190]. Radulph arată că abacul este absolut necesar în muzică, astronomie, topometrie (agrimensură), precum şi pentru studierea autorilor antici. El vorbeşte despre căderea în uitare a ştiinţei abacului aproape în întreaga Europă occidentală şi despre meritele

[1] Dacă deîmpărţitul se înseamnă prin $a = 10\,m + n$, atunci împărţirea se bazează pe egalitatea $\frac{a}{6} = \frac{10\,m}{10} + \frac{4m + n}{6} = m + \frac{4m + n}{6}$. În mod analog se poate împărţi prin $16 = 20 - 4$, prin $1\frac{3}{4} = 2 - \frac{1}{4}$ etc. — *N.A.*

lui Gerbert și Hermannus. El atribuie o proveniență caldeeană denumirilor celor zece *apexuri* și subliniază în mod deosebit că *siposul* nu exprimă un număr, ci este folosit de un abacist precaut — *providus abacista* — pentru a însemna rangurile, asupra cărora se efectuează consecutiv operațiile. Pentru aceasta se iau două *siposuri*, de pildă — unul pentru înmulțitor, iar celălalt pentru deînmulțit.

Abacul cu apexuri nu capătă o largă răspîndire, și principala lui sferă de utilizare rămîn școlile și chiliile mănăstirești. Mai mult încă, chiar dezvoltarea aritmeticii se realizează în continuă luptă cu folosirea unui asemenea abac. Totuși, după cum am mai spus, activitatea abaciștilor a contribuit într-o măsură oarecare la cunoașterea numerației indiene, și anume, a noilor cifre.

Răspîndirea aritmeticii poziționale. Pătrunderea cifrelor indo-arabe în Europa începe nu mai tîrziu de secolul al X-lea prin Spania, tocmai sub formă de *apexuri*. Știm că în această perioadă

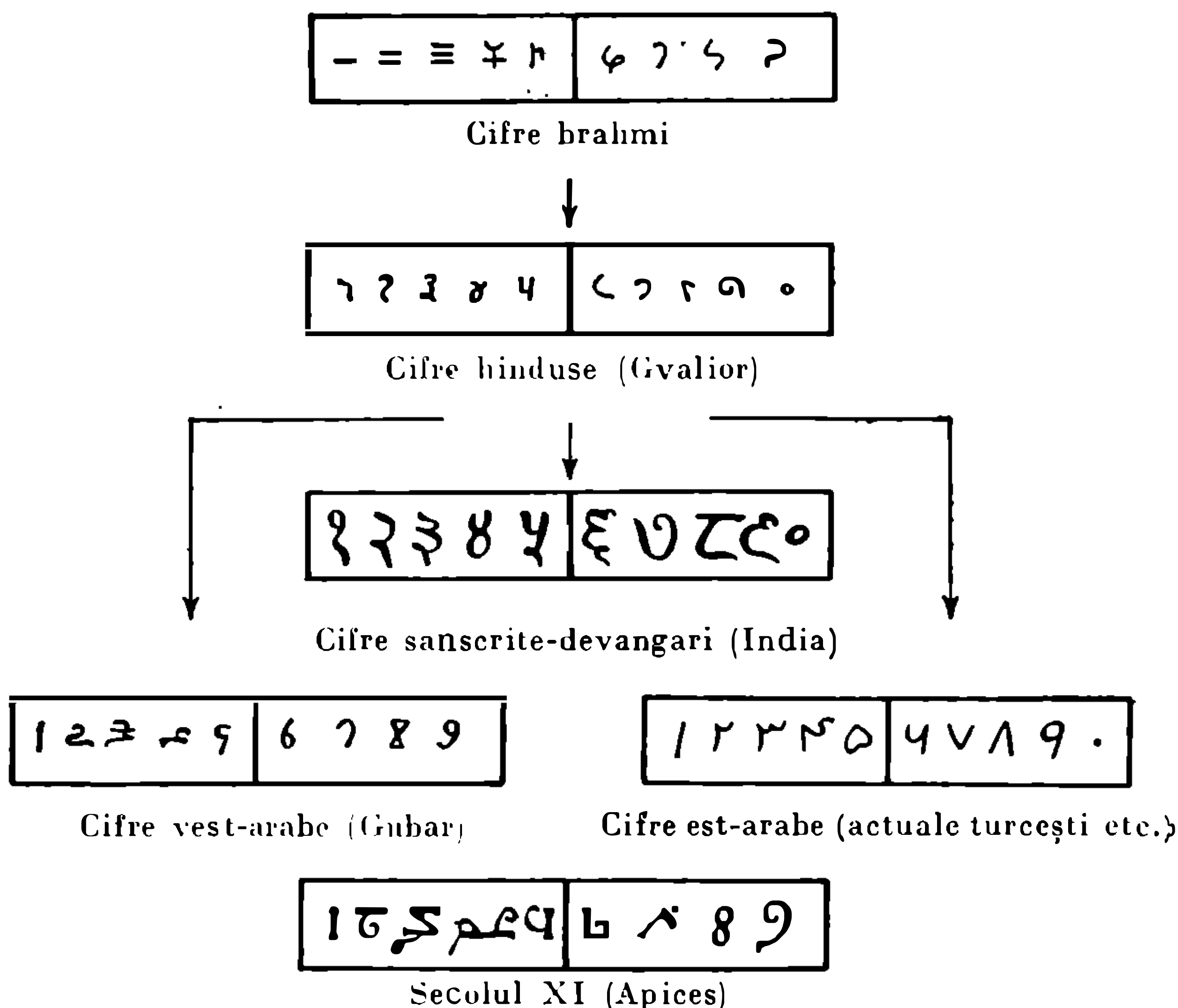


Fig. 96. Genealogia cifrelor noastre (după Menninger, Zahlwort und Ziffer)

de timp existau două varietăți principale de cifre arabe: răsăritene și apusene. Cifrele vest-arabe căpătaseră denumirea de *gubar*; în limba arabă acest cuvînt înseamnă nisip, praf, și termenul *gubar* arată că asemenea cifre se desenează pe un strat de nisip așternut pe o scîndură. E suficient să ne aruncăm o privire asupra celor două genuri de cifre pentru a observa diferențele esențiale existente între ele. Nu dispunem de o explicație certă a acestor deosebiri. Unii cercetători, convinși de proveniența indiană a ambelor forme, au încercat să urmărească în timp și spațiu deplasarea cifrelor indiene pînă în Europa occidentală [191]. Dar materialele sînt încă insuficiente pentru a demonstra aceasta. Alți istorici neagă în general originea indiană a cifrelor vest-arabe, și deci și a cifrelor noastre [192; 193; 71, p. 442].

Pare mai verosimil că cifrele *gubar* au fost aduse din Orient în țările mauritane. Există manuscrise care stau mărturie că cifrele *gubar* fuseseră cunoscute în secolele al IX-lea — al X-lea în Iran și Egipt (p 200). Sînt semnificative și inscripțiile în care se îmbină ambele forme ale cifrelor arabe. Așa de pildă, pe un papirus egiptean, în data anului hegirei, adică 260(873 și 874 e.n.), cifra 2 este de tipul *gubar*, iar 6 — de tip est-arab. Într-un manuscris din Șiraz în Iran, cu o sută de ani mai tîrziu, cifrele 6, 7 și 8 sînt est-arabe, iar celelalte sînt *gubar*. Cifra 9 este asemănătoare în ambele forme. La toate acestea mai trebuie adăugat că asemănarea cifrelor *gubar* cu cele indiene nu este mai mică decît cu a celor est-arabe.

Pare cel mai sigur [29, II] că cifrele *gubar* ar fi ajuns în Spania mauritană mulțumită comerțului cu Orientul, fiind întrebuințate în calculele comerciale pe abac. Mai întîi ele se folosesc fără semnul lui zero; în inscripțiile scrise, deasupra cifrelor se pune un anumit număr de puncte corespunzător rangului. Mai tîrziu se adaugă semnul lui zero sub forma unui cerculeț. Cifrele *gubar* trec pe jetoanele abacului european sub formă de *apexuri*.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Manuscris din anul 976	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
Manuscris de la începutul sec. XII	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Manuscris din anul 1442, operele lui Sacrobosco	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Cifrele lui A Dürer, 1525	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
Din opera tipărită a lui Vidmann, 1489.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Fig. 97. Evoluția cifrelor moderne.

Cel mai vechi manuscris european cu cifre noi păstrat provine de la mănăstirea Albelda din apropierea orașului Logrono în Spania de nord, din anul 976; semnul lui zero lipsește aci. Ulterior, cifrele noi apar în diferite manuscrise din secolul al XI-lea şi următoarele, forma lor fiind foarte variată. Cititorul poate căpăta din fig. 97 o oarecare imagine despre evoluția formei cifrelor noastre.

Cuvîntul propriu-zis de „cifră" este de origine arabă și provine de la *as-şifr* (vezi p. 133), după cum a fost numit semnul zero în literatura arabă [1]. Tocmai în acest sens, cuvîntul *ciffre* este folosit în anul 1143 în manuscrisul lucrării *Cartea introducerii Alhorismului în arta astronomiei, întocmită de magistrul A.* Aproximativ în aceeași perioadă de timp se întîlnește și forma „cifra". La începutul secolului al XIII-lea, Leonardo Pisano numește semnul lui zero — *cephirum* (de unde provine italienescul *zéro*). Maximus Planudes la sfîrșitul aceluiași secol scrie τξιφτα — *tzifra* (vezi p. 352). Mult timp, chiar pînă în secolul al XVII-lea, acest cuvînt se folosește îndeosebi în sens de zero, și chiar în *Aritmetica* lui L. F. Magnițki (1703) zero se numește „cifră sau nimic". În limba engleză *cipher* își păstrează trei sensuri: cifră, cifru și zero. Dar încă în secolele al XIV-lea — al XV-lea, cuvîntul „cifră" începe să se folosească destul de mult pentru denumirea tuturor semnelor 0, 1, ..., 9, cu toate că unii pedanți se opun categoric unei asemenea folosiri „ignorante" a cuvintelor. În Franța, cînd cuvîntul *chiffre* capătă acest nou sens, pentru zero se introduce termenul *zéro*, după modelul italian.

În manuscrisele latinești din secolele al XII-lea — al XIII-lea, zero se mai numește și *circulus* (cerculeț), *nihil* (nimic) sau *figura nihili* (imaginea, semnul nimicului). Poate că încă de pe atunci apare și termenul *nullus*, adică „nici unul", care se răspîndește în graiul vorbit al matematicienilor din secolul al XV-lea și

[1] Cuvîntul arab *as-şifr* a pătruns în Europa prin Italia și prin Spania. După constatările romanistice, limba spaniolă este singura limbă romanică în care sunetul „f" cade în cuvintele de împrumut. *As-şifr* a devenit în spaniolă *cero* (citeşte sero) de unde a trecut în alte limbi sub forma zero. În italiană, „f" s-a menţinut și astfel s-au păstrat formele latinizate *cephirum*, *cifera* alături de unele forme popularizante ca *Zevero*, *zefiro*... cîtă vreme *cifera* însemna *as-șifr* (adică sanscritul *sunya*), celelalte 9 simboluri erau numite *figuri*. Printr-un interesant fenomen semantic, termenul *cifera* începe a denumi toate cele zece simboluri iar pentru *as-șifr* se folosește denumirea spaniolă, zero.

Extrem de interesant este faptul că Anfilochie în cartea amintită foloseşte termenul de *cifra* sau *ţifra*, pentru zero (în ciuda faptului că modelul italian foloseşte numai termenul zero sau *nulla*) — ***I.P.***

apare la sfîrşitul acestui secol în literatura italiană, germană şi franceză. Sub formă de substantiv de gen feminin, adică *nulla*, acest termen se întîlneşte într-o aritmetică italiană anonimă, tipărită la Treviso în anul 1478, în manualul tipărit de aritmetică a lui P. Borghi din 1484, precum şi într-un manuscris german de aritmetică din 1488. Învăţatul francez N. Chuquet scrie în 1484 despre zero, că el în sine nu înseamnă nimic, dar locul pe care-l ocupă dă valoare altor semne, din care cauză se şi numeşte „cifră sau zero sau semne de valoare zero" *(chiffre ou nulle ou figure de nulle valeur)* [241, p. 41]. O asemenea concepţie despre zero o foloseşte Shakespeare în *Regele Lear*; bufonul îi spune regelui care-şi împărţise domeniile: „Acum eşti un fel de zero fără cifră *(a cipher without figure)*. Chiar şi eu sînt mai bun decît tine. Eu sînt bufon, iar tu — nimic".

Cărţi despre algorism. O importanţă hotărîtoare pentru adoptarea numerotaţiei poziţionale şi a noilor cifre în Europa o are cunoaşterea, începînd cu secolul al XII-lea, a traducerilor latineşti a cărţilor arabe de aritmetică, şi în primul rînd a aritmeticii lui al-Horezmi. Odată cu această traducere, un rol important îl joacă traducerea lucrării *Cartea algorismului despre practica aritmeticii* a lui Joannes din Sevilla, *Cartea introducerii algorismului în arta astronomiei*, întocmită de magistrul A [194, 195], şi traducerea latinească a operei *Cartea despre măsurători* a lui Savasorda, în care se foloseşte numeraţia indo-arabă. Informaţiile despre noua numeraţie se răspîndesc destul de repede la distanţe mari; chiar la mijlocul secolului al XII-lea ea devine cunoscută în Germania şi Austria. Ceva mai tîrziu, în jurul anului 1200 se întocmeşte o carte similară *Cartea algorismului (Liber algorismi)*, păstrată timp îndelungat la mănăstirea Salem de pe Bodensee (lacul Boden) [196].

În afară de Spania, un important centru de răspîndire a noii aritmetici este Italia, unde încă în anul 1202 Leonardo Pisano scrie remarcabila *Carte a abacului* [212, II], o lucrare foarte completă de aritmetică şi algebră avînd la bază sistemul poziţional zecimal.

Apariţia *Cărţii abacului* este un eveniment semnificativ. Primele opere europene despre aritmetica poziţională fuseseră scrise sau traduse de specialişti legaţi de mănăstiri sau de şcoala superioară. Prin naştere şi după felul ocupaţiei, Pisano este strîns legat de cercurile comerciale, şi acest fapt îşi pune amprenta asupra conţinutului cărţii sale, unde aritmetica comercială ocupă un rol important. Apariţia *Cărţii abacului* prevesteşte pentru

un viitor apropiat succesul numerației și metodelor indo-arabe, cu mult în afara cercului restrîns al învățaților din mănăstiri și universități. Titlul cărții nu trebuie să ne inducă în eroare. În ea nu este de loc vorba despre calculul pe abac. Titlul înseamnă doar că pentru Leonardo, termenul de „abac" este sinonim cu aritmetica — folosit de italieni în același sens și mai tîrziu. Vom mai reveni la Leonardo Pisano și la lucrările lui.

Nisba lui Muhammed ibn Musa al-Horezmi în formele ei latinești — cele mai frecvente fiind *Algorithmus* sau *Algorismus*, dar și *Aghoarismus*, *Alkauresmus*, *Alchocharithmus* etc. [1] — se transformă în denumirea aritmeticii noi, în algoritm sau algorism [2]. Ultimul termen există la Leonardo Pisano. Aproximativ tot atunci începe să se vorbească despre „algoritmiști" [3], adică adepți ai aritmeticii algoritmiste în opoziție cu „abaciștii", așa cum îi numește încă Gerbert pe calculatorii la abac. Numărul lucrărilor despre algorism crește rapid, ele apar în diferite țări, la început în limba latină, iar mai tîrziu și în graiurile vii naționale. Bibliografia în acest domeniu este vastă și vom cita doar cîteva opere.

Devine foarte cunoscut *Algorismul vulgar (Algorismus vulgaris)* sau *Tratatul despre arta socotitului (Tractatus de arte numerandi)* a englezului John Halifax sau Holywood (decedat în 1256), care studiase la Oxford, iar în jurul anului 1230 se mută la Paris, unde predă la universitate cursul de astronomie și matematică [197]. Numele său latinizat sub care e cunoscut este Sacrobosco. În cartea lui Sacrobosco se prezintă, fără demonstrații, reguli și exemple de operații cu numere întregi: numerație, adunare, scădere, înjumătățire, dublare, înmulțire, împărțire, progresii (se are în vedere sumarea șirului de numere naturale și a șirului de numere fără soț) și extragerea rădăcinii pătrate și cubice.

---

[1] *Nisba* lui al-Horezmi a fost descoperită sub acești termeni latinești de către orientologul J. Reinaud în 1849 — *N.A.*

[2] Mai tîrziu, termenul de algoritm începe să însemne orice proces regulat de calcul, care dă soluția unei grupe de probleme într-un număr finit de etape. O asemenea folosire a cuvîntului se găsește în lucrările de calcul diferențial ale lui G.W. Leibniz (1684 și urm.) și într-un sens mai restrîns (aritmetic) la K. Rudolf (1525) — *N.A.*

[3] Despre algoritmiști se vorbește de pildă în *Cartea algorismului* de la mănăstirea Salem — *N.A.*

Pentru memorizare, Sacrobosco prezintă unele reguli sub formă de versuri, ca de pildă:

> Subtrahe aut addis a dextris vel mediabis;
> A leva dupla, divide multiplicaque;
> Extrahe radicem semper sub parte sinistra[1].

Despre succesul acestei opere, dar și despre progresul lent al culturii aritmetice în genere, stă mărturie ediția acestei lucrări tipărită la Strasburg în 1488, adică aproape la două secole și jumătate după scrierea ei; ea se retipărește și mai tîrziu chiar, pînă în 1582. După cartea lui Sacrobosco își ține cursul la Viena, în secolul al XV-lea, Johannes din Gmunden, amintit mai înainte. Să observăm că danezul Peter Ingvarsen sau Petru de Dacia [197] scrie la Paris în jurul anului 1290 un comentariu la algorismul lui Sacrobosco, remarcabil în ceea ce privește calitățile lui științifice. Se pare că el este primul care propune pentru extragerea rădăcinii cubice dintr-un număr cu mai multe cifre, procedeul modern de găsire a cifrei curente a rădăcinii, prin împărțire la triplul pătratului părții găsite.

Aproape simultan cu algorismul lui Sacrobosco este compusă și *Explicarea algorismului (Demonstratio de algorismo)* a lui Jordanus Nemorarius [198], de care se apropie foarte mult *Algoritmul* sau *algorismul explicat (Algorithmus demonstratus)* păstrat în numeroase copii din secolul al XIII-lea și următoarele [199]. Ultima operă i se atribuie adesea lui Nemorarius, deși într-unul din manuscrise autorul se intitulează magistrul Gherhard, iar celelalte manuscrise sînt anonime. În *Algoritmul explicat* sînt descrise operațiile cu numere întregi, inclusiv dublarea și înjumătățirea; înmulțirea și împărțirea se verifică reciproc (proba prin nouă nu se amintește în general); sînt incluse și operațiile cu fracții. Odată cu chestiunile mai complicate, cum este extragerea rădăcinii pătrate și cubice, aici se poate întîlni înmulțirea suplimentară, cînd unul din factori, b, este cuprins între 5 și 10:

$$ab = 10a - (10 - b)\ a\ *.$$

---

[1] Scade sau adună, precum și înjumătățește de la dreapta;
De la stînga dublează, împarte și înmulțește;
Rădăcina extrage-o totdeauna din partea stîngă.

* Această regulă există și la Sacrobosco și într-un manuscris mai vechi de la mijlocul secolului al XII-lea [195]. În manuscrisul de la Salem, din jurul anului 1200 [196], există o regulă pentru înmulțirea a două numere cuprinse între 5 și 10:

$$ab = 10[a - (10 - b)] + (10 - a)(10 - b).$$

Compară cu cele spuse la p. 271 despre Abu-l-Vafa — *N.A.*

Ordinea sistematică de expunere se încalcă uneori. Așa de exemplu, între extragerea rădăcinii pătrate și cubice din numere întregi se intercalează o propoziție despre proprietatea de comutativitate a înmulțirii. *Algoritmul explicat* se tipărește la Nürnberg în 1534, iar în limba franceză, la Paris, în 1570; cartea conține — în prima ediție — doar 57 de pagini.

Matematicianul Alexandre de Villedien din Normandia (decedat în jurul anului 1240) expune algorismul numerelor întregi în versuri — 284 de hexametri. Cartea lui *Cîntul despre algorism (Carmen de algorismo)* se traduce în limbile franceză, engleză și islandeză [30, II]. Traducerea islandeză îi aparține lui Gaukr Erdlandson (aproximativ 1264—1334). Să mai amintim un mic manuscris algoritmic anonim franțuzesc din a doua jumătate a secolului al XIII-lea, vechiul algorism englezesc *Arta socotitului* (*Crafte of Nombrynge* aproximativ 1300), și prima carte cunoscută despre algorism în limba italiană *(Tractatus algorismi)*, întocmită de un oarecare Giacobo din Florența în anul 1307 (ea conține și noțiuni de algebră, rezolvarea ecuațiilor liniare și de gradul al doilea) [200].

Noua numerație se consolidează cu greutate. La început ea este un apanaj al unui număr restrîns de învățați și pătrunde

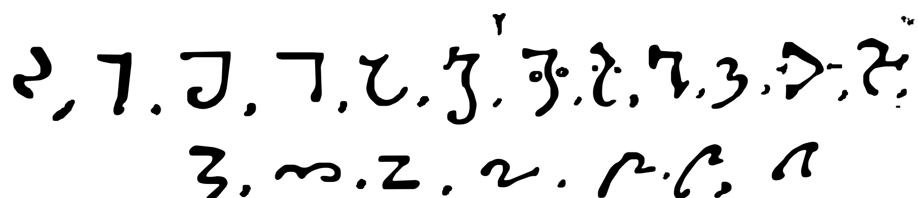


Fig. 98. Diferite forme ale cifrei 2 în manuscrise medievale.

foarte lent în cercurile mai largi ale populației. Avantajele ei atrag interesul acelor oameni care aveau cel mai des nevoie de ea în calcule importante — negustori, vistiernici —, dar lipsa unor cifre standardizate, fapt care ușurează falsurile și înșelăciunile în scriere, împiedică recunoașterea ei unanimă. Este caracteristic faptul că în 1299 la Florența se interzice negustorilor să folosească în contabilitate noile cifre și se propune ca numerele să se scrie prin cuvinte. Cît de mult a variat forma cifrelor scrise se poate aprecia după un bilanț al felului de scriere a cifrei 2 (fig. 98). Totuși, avantajele noii scrieri fuseseră atît de mari, încît spre secolul al XVI-lea algoritmiștii obțin o victorie hotărîtoare asupra abaciștilor nu numai în mediul oamenilor

de știință, ci și în școli și în viața de toate zilele. La aceasta contribuie folosirea și ieftinirea din ce în ce mai mare a hîrtiei, a cărei fabricare începe în Europa în secolul al XII-lea; ea ușurează concurența calculelor scrise față de cele efectuate pe abac. Ca un exemplu interesant al victoriei ideilor noii numerații servește scrierea cu cifre romane și cu semnul zero după principiul valorii locului ocupat. Așa procedează în secolul al XII-lea Nicolaus Ocreatus, probabil, un fost elev a lui Adelard din Bath.

La răspîndirea noii aritmetici contribuie apariția unor școli pur laice unde se instruiește tineretul, pentru ca apoi să lucreze în comerț sau finanțe. Se pare că primele școli de acest fel apar în Italia. În 1338, la Florența există 6 școli de abac (acest cuvînt, după cum s-a mai spus, începuse să însemne aritmetica în ansamblu), fiecare dintre ele avînd pînă la 1 200 de elevi; după terminarea cursurilor, elevii efectuează practica la cîte un negustor. În secolul următor, școli de aritmetică apar în bogatele orașe comerciale și industriale din Germania de sud, apoi și în alte țări. Organizarea instrucțiunii laice o preiau administrațiile orașelor interesate. Apar dascăli urbani, care în anumite zile și ore predau tinerilor interesați științele fundamentale, printre care se numără matematica și contabilitatea. În acest timp, în mediul comercial se elaborează un sistem din ce în ce mai vast de aritmetică comercială (polițe, procente compuse etc.). Aportul cel mai important îl aduc niște italieni anonimi, creatorii așa-numitului sistem de contabilitate în partidă dublă, pe care îl întîlnim aplicat pentru prima oară la Genova, la mijlocul secolului al XIV-lea.

În sfîrșit, o imensă importanță pentru victoria definitivă a aritmeticii noi și, mai mult chiar, pentru întreaga răspîndire a cunoștințelor matematice o are tipărirea cărților, care, împreună cu busola, praful de pușcă și ceasul automat, reprezintă realizări capitale ale tehnicii. Curînd după ce se înlocuiește tipărirea de pe plăci de lemn gravate, prin tiparul cu litere mobile, inventat din nou în Europa, în jurul anului 1430, de către J. Guttenberg (decedat în 1468), apar primele cărți de matematică tipărite, mult mai ieftine și mai numeroase decît cele scrise de mînă. Cel mai vechi manual tipărit de matematică, și anume de aritmetică, apare aproximativ în anul 1475 la Trento, localitate aparținînd pe acele vremuri Germaniei, în prezent — Italiei. În acest manual se descriu operațiile de socotit pe linii (vezi mai departe) și se mai folosesc cifrele romane. Dar în alte patru aritmetici germane tipărite la sfîrșitul secolului al XV-lea se folo-

sesc cifrele și procedeele noi ale aritmeticii poziționale. Aceasta se referă îndeosebi la o aritmetică anonimă descoperită de curînd, scrisă în limba germană, tipărită între anii 1460 și 1482 după plăci de lemn gravate, și care este probabil cea mai veche carte de matematică tipărită în Europa[1]. Același lucru se poate spune și despre prima aritmetică tipărită în limba italiană, în 1478 la Treviso, localitate situată în Italia de nord-est [201] (vezi fig. 99). În calendare și alte cărți, cifrele noi apăruseră și mai înainte, dar în mod neregulat.

Iată și alte cîteva informații despre răspîndirea cifrelor noi. Primele monede cu aceste cifre apar în 1424 în Elveția, în 1458 — în Germania, în 1478 — în Suedia, în 1485 — în Franța, în 1539 — în Scoția, în 1551 — în Anglia[2]. Pe lespezile mortuare aceste cifre apar și mai devreme: la Pforzheim (Baden) în 1371, iar la Ulm — în 1388.

Dezvoltarea numerației în Rusia. În timp ce în țările Europei occidentale se folosește numerația romană, în vechea Rusie, aflată ca și alte țări slave într-un strîns contact cultural cu Bizanțul, se răspîndește o numerație alfabetică asemănătoare cu cea grecească. În numerația veche rusă, numerele de la 1 la 9, iar mai departe zecile și sutele se reprezentau prin literele consecutive ale alfabetului slavon (și anume prin așa-numita *ciriliță*, introdusă în secolul al IX-lea, vezi fig. 100). Există cîteva excepții de la această regulă generală: cifra 2 nu se însemna prin a doua literă din alfabet, și anume prin *buki*, ci prin a treia literă — *vedi*, deoarece litera β (în antichitate *beta*, la bizantini *vita*), se transmite în vechea limbă rusă prin sunetul *v*. *Fita*, aflată la sfîrșitul alfabetului slavon, însemna ca și ϑ grecească (antica *teta*, bizantina *fita*) numărul 9, iar 90 se însemna prin litera *cerv* (grecii folosesc pentru acest scop litera *kappa*, inexistentă în alfabetul grecesc viu. Unele litere, ca „*b*“ și „*j*“, rămîn nefolosite. Miile se înseamnă adăugînd la literele alfabetului, în stînga jos, semnul ҂. În text, numerele se disting prin semnul ~ pus deasupra cifrelor.

În Rusia, prima operă cu conținut matematic, cunoscută nouă, o scrie în 1136[3] călugărul învățat Kirik din Novgorod (născut

[1] Aceste informații le datorăm amabilității prof. K. Vogel — *N.A.*

[2] În timpul regelui normand Roger al II-lea, în Sicilia se bate o monedă avînd chipul lui Cristos pe avers, iar pe revers o inscripție în limba arabă. În cifre est-arabe este scris anul hegirei 533, adică 1138 — *N.A.*

[3] O cunoaștem după copii din secolele al XVII-lea — al XVIII-lea — *N.A.*

e quante miglia hauera fatto ciascheduno di loro.
Fa segondo la riegula cosi.

7
9
16 partitore

1
35
63 | 3
+ 6 zorni.

Unde in zorni .3.e $\frac{15}{16}$ se scontrerano.

Se tu vuol sapere quãta miglia hauera fatto ciascheduno fa per la riegula del .3. dicendo
E primo per quellui da Roma.

$\frac{112}{7} \times \frac{250}{1}$ — $\frac{63}{16}$

250
63
750
500
15750

16) +
457
+ 5 7 5 0 | 140
+ + 2 2 2
+ + +
+

Quellui che vien da Roma hauera fatto miglia .140.e $\frac{5}{8}$ Poi mettila riegula per el corriero da Venezia.

$\frac{144}{9} \times \frac{250}{1}$ — $\frac{63}{16}$

45 16)
+ 3 9 4
+ 5 7 5 9 | 109
+ 4 4 4 4
+ 4 4
+

Fig. 99. Calcule într-o aritmetică italiană tipărită în 1478. Rezolvarea unei probleme în care se cere să se afle timpul şi locul întîlnirii a doi curieri, ştiind că unul dintre ei parcurge distanţa de 250 de mile de la Roma la Veneţia în 7 zile, iar celălalt — de la Veneţia la Roma — în 9 zile.

în 1110); ea este consacrată chestiunilor de cronologie și pascalii și poartă titlul: *Ucenie imje vedati celoveku cisla vseh let (Învățătura prin care omul va ști să socotească toți anii)*; Kirik se folosește de numerația alfabetică slavonă [202]. Aceleași cifre se folosesc și în monumentul juridic *Russkaia pravda (Adevărul rusesc)*, din secolele al XIV-lea — al XV-lea. Lipsa de material nu permite să se urmărească pătrunderea treptată a numerației poziționale în Rusia evului mediu: din secolele al XV-lea — al XVI-lea nu s-a păstrat nici un manuscris cu conținut matematic. Dar în numeroasele manuscrise ruse de aritmetică din secolul al XVII-lea se aplică numerația nouă pozițională, iar cea veche, alfabetică, se folosește de regulă numai pentru primul contact cu cifrele noi: numerația slavonă se învăța împreună cu scrierea, înainte de a trece la studiul aritmeticii [203].

1	2	3	4	5	6	7	8	9
а̃	в̃	г̃	д̃	є̃	ѕ̃	з̃	и̃	ѳ̃

10	20	30	40	50	60	70	80	90
ı̃	к̃	л̃	м̃	н̃	ѯ̃	о̃	п̃	ч̃,ч̃

100	200	300	400	500	600	700	800	900
р̃	с̃	т̃	ѵ̃	ф̃	х̃	ѱ̃	ѡ̃	ц̃

1000	10000
҂а	ⓐ

Fig. 100. Cifrele slavone (cirilița).

În cărțile tipărite rusești, cifrele noi apar la numerotarea paginilor *Psaltirei*, publicate în localitatea Eviu în apropiere de Vilnius, în anul 1638. În cartea *Ucenie i hitrost ratnogo stroenia peșih liudei (Instrucția și istețimea rînduirii ostășești a pedestrimii)*, apărută la Moscova în 1647, toate cifrele de pe desene și din referirile din text la aceste desene sînt arabe. Dar și mai tîrziu, în cărți se dau atît „numere rusești", cît și „cifre". Despre marea popularitate a numerației alfabetice stă mărturie publicarea unor table de înmulțire pînă la 100 × 100 în această numerație, purtînd titlul *Scitanie udobnoe, kotorîm vseakii celovek, kupuiușcii ili prodaiușcii zelo udobno izîskati mojet cislo vseakia veșci* (M. 7190, adică 1682) *(Socoteală comodă cu ajutorul căreia orice om care cumpără sau vinde poate afla cu foarte multă ușurință numărul oricăror lucruri)*. Cu toate acestea, numerația alfabetică își trăiește ultimii ani. Trecerea definitivă la numerația nouă pozițională se produce sub Petru cel Mare. Ea se aplică în *Kratkoe i poleznoe rukovedenie vo aritmetîku (Scurt și folositor îndreptar de aritmetică)* al lui I. F. Kopievski (sau Kopievici), tipărit la Amsterdam în 1699 [204], iar mai tîrziu într-un mare manual enciclopedic de matematică al lui L. F. Magnițki (1669—

Fig. 101. Cifre moderne și slavone într-un manuscris rusesc de aritmetică din secolul al XVII-lea.

1739), apărut la Moscova în 1703, sub titlul *Arifmetika, sireci nauka cislitelnaia (Aritmetica, adică ştiinţa calculului)*, deşi anii de pe copertă şi numerele paginilor la Magniţki mai sînt daţi în numeraţie alfabetică slavă [205]. În 1714, la Petersburg se retipăresc tablele de înmulţire amintite mai sus, în noua numeraţie şi cu un titlu ceva mai diferit: *Kniga scitania udobnogo. Ko upotrebleniu vseakomu hoteaşcimu bez truda poznati ţenu, ili meru kakia veşci (Cartea socotitului comod. Spre a fi folosită de oricine doreşte să afle cu uşurinţă costul sau măsura diferitelor lucruri)*.

În 1654 au fost emise primele monede ruseşti cu cifre noi. Acestea sînt de aur, avînd valoarea de $\frac{1}{4}$ de cervoneţ[1], nefiind destinate spre a servi ca monedă de schimb, ci ca decoraţii şi daruri. Imediat după aceasta, pe talerii — *efimki* — vest-europeni care circulau în Rusia se ştanţează data 1655. În timpul lui Petru I, cifrele moderne înlocuiesc definitiv pe cele slavone de pe monede, acestea fiind scrise pentru ultima oară pe monede de aramă în anul 1718 [2].

Ce este numeraţia? se întreabă Magniţki la începutul *Aritmeticii* sale şi tot aici răspunde: „numeraţia este numărătoarea în care absolut toate numerele se numesc prin cuvinte şi tot ele sînt conţinute sau reprezentate în zece semne sau reprezentări: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0" [205, p. 20]. Odată cu numeraţia scrisă se perfecţionează şi cea orală.

Am văzut (p. 196) cît de greoaie şi incomodă pentru înţelegere fusese denumirea numerelor mari la al-Horezmi, care nu dispunea de nume speciale pentru numere mai mari de o mie. Din mii de mii sau sute de mii de mii etc. îşi alcătuiseră denumirile numerelor mari şi matematicienii europeni pînă în secolul al XVI-lea inclusiv, însemnînd uneori pentru claritate în scriere rangurile respective prin puncte: miile — cu un punct, milioanele — cu două etc. Dar încă din secolul al XV-lea, în manualele italiene de aritmetică, printre care se numără şi cel de la Treviso din 1478, intră în uz cuvîntul milion, folosit şi mai înainte de pildă, de vestitul călător Marco Polo (1254—1323) şi poate chiar de la

---

[1] Monedă veche de aur de 5 sau 10 ruble — *N.T.*

[2] Aceste date ni le-a comunicat în scris I.G. Spasski — *N.A.*

mijlocul secolului al XIII-lea [1]. Matematicianul N. Chuquet, într-o operă manuscrisă din 1484, merge mai departe și pentru a însemna pătratul și puterile următoare ale milionului, adică 10^{12}, 10^{18}, 10^{24} etc., introduce termenele bilion, trilion, cvadralion etc.; aceste numerale apar în *Aritmetica (Larismethique)* tipărită a lui Etienne de la Roche, publicată în 1520 la Lyon. În același sens, acești termeni se folosesc și astăzi în Germania, Anglia și alte cîteva țări; în Franța, începînd cu mijlocul secolului al XVII-lea, ele încep să reprezinte puterile miilor următoare milionului, adică 10^9, 10^{12}, 10^{15}; același sens îl au ele în prezent în U.R.S.S. și în S.U.A. În *Aritmetica (L'arithmetique)* lui Jaques Peltier (1515 — 1582), publicată la Poitiers în 1549, găsim cuvîntul miliard (în sensul de milion de milioane).

Numerale originale pentru rangurile zecimale superioare existaseră și în vechea Rusie. În calculele lui Kirik din Novgorod, un iscusit aritmetician, se întîlnesc numere mari. De pildă, plecînd de la era bizantină, conform căreia de la „facerea lumii" și pînă la nașterea lui Cristos au trecut 5 508 ani, el găsește că numărul de ore de zi (12 pe zi) ce s-au scurs pînă în anul 1136 este de 29 120 652. Denumind sutele de mii *nesvedie*, Kirik exprimă numărul milioanelor astfel: „două sute nesvedii și nouăzeci nesvedii". Mai tîrziu se creează denumiri și notații pentru unitățile rangurilor zecimale superioare. Un sistem dezvoltat de numărătoare zecimală ne este cunoscut din manuscrisele rusești din secolul al XVII-lea, dar el apăruse de mai înainte [203].

În acest sistem, 10 000 se numește *tima*, 10 tima — *leghion*, 10 leghioane — *leodr*, 10 leodri — *vran*, 10 vrani — *koloda*. În acest fel *koloda* corespunde lui 10^8. De altfel, numărătoarea mergea numai pînă la leodri inclusiv și de exemplu, într-un manuscris, numărul 9 876 543 210 se citește astfel: „Nouă mii de leodri și opt sute de leodri și șaptezeci de leodri și șase leodri și cinci leghioane și patru tima și trei mii și două sute și zece". Pentru a însemna rangul tima, literele care exprimă numerele de la 1 pînă la 9 se înconjurau cu un cerculeț (а), (в) etc., pentru leghioane — printr-un cerculeț punctat ⁝а⁝, pentru leodri — printr-un cerculeț de linioare ⁞а⁞ : existau semne și pentru vrani și kolode, dar ele se întrebuințau foarte rar.

---

[1] În limba italiană sufixul *one* întărește valoarea substantivelor, așa încît *millione* înseamnă un fel de „mie mare", sau „multe mii". Poate că Marco Polo, vorbind despre un milion, avusese în vedere de asemenea tocmai „multe mii" — *N.A.*

Odată cu acest sistem numit *maloe cislo* (număr mic), mai exista unul — *velikoe cislo* (număr mare), în care *tima* înseamnă o mie de mii, adică 10^6, ***leghionul*** — *tima tem*, adică 10^{12}, *leodr* — 10^{24}, *voron* — 10^{48}, dar *koloda* era 10 *vrani*. Rangurile intermediare se alcătuiau din cele fundamentale, de pildă 10^{23} era o sută de mii *tima leghioane*.

Această numărătoare iese din uz la începutul secolului al XVIII-lea. Magnițki folosește numărătoarea vest-europeană în milioane și puteri ale lor.

Fracții sexagesimale și zecimale. Împreună cu sistemul pozițional zecimal al numerelor întregi, aritmetica algoristică aduce în Europa și fracțiile sexagesimale folosite în calculele de astronomie. Încă al-Horezmi și Joannes din Sevilla (vezi p. 202) dăduseră descrierea operațiilor cu fracții sexagesimale, iar apoi acestea intră în operele de algorism ale autorilor europeni. Uneori algorismul fracțiilor *(Algorismus de minutiis)* în care intră și cele sexagesimale prezintă un curs special universitar.

După cum am văzut, în țările Islamului se elaborase un sistem sexagesimal unitar de numere întregi și fracționare. Încercări în acest sens se fac și în Europa, dar ele nu fuseseră consecvente și de aceea n-au fost aprobate unanim. O mărturie asupra interesului timpuriu față de sistemul sexagesimal o alcătuiesc tabelele sexagesimale de înmulțire pînă la 49·49 întocmite de Peter Ingvarsen. Johan din Gmunden, în lucrarea *Tratat despre fracții fizice* [1] *(Tractatus de minutiis physicis)* reunește 60 de unități într-un rang deosebit, *signum physicum*, arătînd că așa se procedase încă la întocmirea tabelelor lui Alfonso; 144°36′45″ el le transcrie astfel: .2.24.36.45 [206].

Totuși, la extragerea rădăcinilor pătrate, Johan din Gmunden, la fel cum proceda și Joannes din Sevilla, efectuează operațiile mixt, în sistem sexagesimal și zecimal, transformînd fracția dată în unitățile rangului inferior (în mod obligatoriu par!), adăugînd apoi la numărul zecimal obținut un anumit număr par de zerouri și, după extragerea rădăcinii, transformînd rezultatul iarăși în fracții sexagesimale.

Calculul sexagesimal îl descrie pe larg învățatul francez Oronce Fine, sau latinizat Fineus (1494—1555), care în 1532 este primul profesor de matematică la Paris, la Collège de France. În lucrarea sa *Protomatematica (Prothomathesis)*, publicată la Paris în 1532

---

[1] Fracțiile sexagesimale (astronomice) se mai numeau și „fizice“ sau „filozofice“ — *N.A.*

și conținînd în 15 cărți cursul de aritmetică, geometrie, astronomie și gnomonică, el scrie numerele sexagesimale sub forma 64 = 1,4 și în mod similar 169 = 2,49 etc.

Folosirea unui sistem sexagesimal regulat de fracții este una dintre premisele introducerii fracțiilor zecimale în Europa. Avantajele legate de fracții, care reprezintă sume ale puterilor consecutive ale unei baze date, sînt remarcate încă în cartea lui Joannes din Sevilla, în *Explicarea fracțiilor (Demonstratio de minutiis)* a lui Jordanus Nemorarius, în *Algorismul fracțiilor (Algorismus de minutiis)* într-o lucrare anonimă din secolul al XIV-lea etc. În *Algorismul fracțiilor* se arată că în locul bazei 60, comodă datorită numărului mare de divizori, se poate lua baza 12 sau 10.

O altă cale care duce la fracții zecimale este calculul prin aproximări al rădăcinilor pătrate iraționale, despre care am vorbit mai sus. În sfîrșit, în același sens acționează și calculele de astronomie și trigonometrie. Georg Peurbach, un astronom și matematician vienez din prima jumătate a secolului al XV-lea, îmbină în niște tabele nepublicate ale sinusurilor principiul de calcul sexagesimal cu cel zecimal. După cum știm, în tabelul de coarde a lui Ptolemeu, raza cercului fusese luată egală cu 60, iar coardele se exprimau cu ajutorul fracțiilor sexagesimale. Peurbach ia raza cercului egală cu 600 000, dar sinusurile le exprimă prin numere întregi în sistem zecimal. Johann Müller (Regiomontanus), elev al lui Peurbach, pășește la început pe aceeași cale, mărind doar raza la 6 000 000, dar mai tîrziu părăsește cu totul sistemul sexagesimal. În 1467 el întocmește primele tabele trigonometrice pur zecimale, și anume tabelele tangentelor pentru raza 10^5 (*Opus tabularum directionum*, Augsburg, 1490), subliniind într-o problemă comoditatea unui calcul zecimal cu o asemenea alegere a razei. Bineînțeles că el obține valorile tangentelor sub formă de numere întregi și nu de fracții zecimale; în mod analog se prezintă lucrurile și în alte tabele, cu raza de la 10^5 pînă la 10^{15}.

Dar de aici nu mai este departe pînă la adevăratele fracții zecimale. La ele se ajunge în esență în tabelele sale trigonometrice, publicate pentru întîia oară la Paris în 1579 *(Canon mathematicus seu ad triangula cum adpendicibus)* de François Viète, care scrie uneori numărătorul fracției zecimale fără numitor. Un asemenea numărător el îl evidențiază prin cifre mărunte și subliniere sau îl separă printr-o linie verticală. De pildă, alegînd raza egală cu $100,000\underline{000,00}$, Viète arată că lungimea semicer-

12 S. STEVINS

VERCLARINGHE.

ALS 3 ① 7 ② 5 ③ 9 ④, dat is te ſeggen 3 *Eerſten*, 7 *Tweeden*, 5 *Derden*, 9 *Vierden*, ende ſoo mochtmen oneyndelick voortgaen. Maer om van hare weerde te ſegghen, ſoo is kennelick dat naer luyt deſer Bepalinge, de voornoemde ghetalen doen $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{100}$, $\frac{5}{1000}$, $\frac{9}{10000}$, t'ſamen $\frac{3759}{10000}$. Alſoo oock 8 ⓪ 9 ① 3 ② 7 ③, ſijn weert 8, $\frac{9}{10}$, $\frac{3}{100}$, $\frac{7}{1000}$, dat is t'ſamen 8 $\frac{937}{1000}$ ende ſoo met allen anderen dier ghelijcke. Het is oock te anmercken, dat wy inde THIENDE nerghens ghebroken ghetalen en ghebruycken: Oock dat het ghetal vande menichvuldicheyt der Teeckenen, uytghenomen ⓪, nummermeer boven de 9 en comt. By exempel, wy en ſchrijven niet 7 ① 12 ② maer in diens plaetſe 8 ① 2 ②, want ſy ſoo veel weert ſijn.

IIII. BEPALINGHE.

De ghetalen der voorgaender tweeder ende derder bepalinghe, noemen wy int gemeen THIENDETALEN.

EYNDE DER BEPALINGHEN.

Fig. 102. Pagina 12 din opera lui S. Stevin, *De Thiende*, 1585.

cului este cuprinsă între $314{,}159\underline{^{265,35}}$ și $314{,}159\underline{^{265,37}}$, unde virgulele servesc pentru a grupa rangurile trei cîte trei. Într-un alt caz el scrie valoarea sinusului de 60° sub forma 86,602/540,37. Asemenea notații nu sînt însă sistematice la Viète și el scrie deseori atît numărătorul cît și numitorul fracției zecimale.

Prima încercare de a introduce în mod sistematic fracțiile zecimale o face în a doua jumătate a secolului al XIV-lea Immanuel ben Iacob Bonfis din Tarascon, care face parte din școala de astronomi și matematicieni evrei, înfloritoare în acele timpuri în sudul Franței [207]. Într-un mic tratat *Calea împărțirii (Derek hilluk)*, scris în vechea ebraică, Bonfis construiește un sistem de fracții, în care unitatea se împarte în 10 prime, prima — în 10 secunde etc., pînă la infinit. Pentru aceste fracții el formulează regulile de înmulțire și împărțire și, desigur, se dispensează de ceea ce numim noi exponenți negativi. Bonfis nu prezintă exemple. După cum se pare, tratatul lui n-a avut răspîndire.

În decursul secolelor al XIV-lea — al XVI-lea, fracțiile zecimale apar în mod izolat în diferite cazuri. De pildă, matematicianul francez Jean de Mer, un contemporan al lui Bonfis, scrie că $\sqrt{2}$ se poate prezenta sub forma 1 414, dacă prima unitate se consideră număr întreg, următoarele patru — drept zecimi etc. În Germania, Krišt'an Rudolf (1530), calculînd într-o problemă de procente numărul $375\left(1+\frac{5}{100}n\right)$ pentru $n = 1,2,\ldots,$ 10, separă printr-o linie verticală partea întreagă a rezultatului, de partea fracționară zecimală, de pildă, pentru $n = 3$, sub forma 434/109 375.

Spre sfîrșitul secolului al XVI-lea, ideea fracțiilor zecimale plutea, s-ar putea zice, în aer. Matematicienii și calculatorii de tabele se apropie de ea în mod independent în diferite țări. Dar meritul de a fi introdus pentru prima oară în Europa un sistem consecvent de fracții zecimale, de a fi descris superioritatea și avantajele unităților de măsură zecimale îi revine lui Simon Stevin, un negustor olandez devenit mai tîrziu inginer, matematician și mecanician. El s-a născut în orașul Brügge (1548—1620) și a publicat în 1585, la Leyda, o mică broșură în limba flamandă *Zecimea (De Thiende)*, pe care o anexează în traducere franceză *(La Disme)* la cartea publicată de el tot atunci sub titlul *Practica aritmeticii (La Pratique d'Arithmétique)* [208]. Activitatea lui Stevin depășește cu mult perioada de timp pe care o analizăm. Legat de aceasta, vom mai observa cîteva chestiuni. Notațiile lui Stevin, legate de simbolurile lui algebrice,

sînt incomode. Numărul 8,937 el îl scrie sub forma 8⓪9①3 ②7③; uneori, mai rar, el notează doar ultimul rang, scriind de pildă 2,8 sub forma 28① La operații, indicatorii rangurilor îi scrie astfel:

```
        ④ ⑤ ⑥
        3  7  8
           5  4 ②
      ------------
     1  5  1  2
  1  8  9  0
  ----------------
  2  0  4  1  2
  ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧
```

adică, 0,000 378.0,54 = 0,000 204 12. Curînd după aceasta, inventatorul logaritmilor, John Neper (1550—1617), propune să se despartă printr-o virgulă sau un punct partea întreagă de partea zecimală (1616—1617), procedeu care se încetățenește în cursul secolului al XVII-lea[1] [209]. În literatura rusă, fracțiile zecimale apar într-o expunere oarecum arhaică — în *Aritmetica* lui L.F. Magnițki, care prezenta și folosirea fracțiilor sexagesimale („astronomice").

Operațiile aritmetice. Operațiile asupra numerelor întregi și fracționare se efectuează inițial în aritmetica algoritmică la fel ca și în operele lui al-Horezmi și Joannes din Sevilla. Apariția și răspîndirea hîrtiei aduc mari schimbări în tehnica calculului. Pe hîrtie cifrele nu se pot șterge într-una, ca pe o scîndură acoperită cu nisip sau prin mutarea jetoanelor abacului. La început, calculele scrise sînt greoaie. Nici un fel de rezultate intermediare nu se țin în minte, iar ștergerea cifrelor se înlocuiește prin scrierea tuturor calculelor intermediare, ca, de exemplu, a diferitelor resturi la împărțire, repetînd împărțitorul ce se mută consecutiv etc.

Mai tîrziu se folosește tăierea cifrelor folosite (vezi fig. 99). Uneori matematicienii se străduiau să imprime distribuției cifrelor o formă, după părerea lor, elegantă, așezîndu-le sub forma unei corăbii cu pînze, ceea ce face ca întreaga scriere a calculelor

---

[1] Ceva mai înainte, în 1592, folosirea virgulei zecimale se întîlnește la astronomul G. Maggini (1555—1617) din Bologna, iar a punctului zecimal, în 1593, la Christophorus Clavius (Schlüssel, 1537—1612) — *N.A.*

să fie extrem de greoaie și complicată. Timp de trei secole, matematicienii europeni lucrează la simplificarea și perfecționarea tehnicii calculului. Operațiile speciale, cum fuseseră dublarea și înjumătățirea, se elimină treptat și dispar complet în manualele foarte răspîndite ale lui L. Pacioli (1494) și J. Widmann (1489), despre care vom vorbi mai departe. Deși în literatura de specialitate se păstrează și mai tîrziu o mare varietate în procedeele de a efectua operațiile aritmetice, totuși chiar în opera *Tratat de algorism foarte util și necesar (Algorismi tractatus perutilis et necessarius)* a lui Prosdocimo de Beldomandi (1380—1428) din Padua, publicată postum în 1483 la Padua și retipărită la Veneția în 1540, dispoziția calculelor capătă în esență forma ei modernă.

Tot atît de treptat se dezvoltă și teoria fracțiilor ordinare. În această privință ne vom limita doar la cîteva informații. Termenul de fracție apare în literatura europeană de specialitate ca o traducere a cuvîntului arab *kasr*, de la *kasara* — adică a sparge, a rupe (încă babilonienii vorbeau la scădere sau împărțire despre o „rupere“ a unui număr dintr-altul). În traducerea aritmeticii lui al-Horezmi, fracția se numește *fractio*, de la *frangere* — a rupe, a sparge, a fărîmița. Odată cu aceasta, Leonardo Pisano folosește de exemplu cuvîntul *ruptus* de la *rumpere* — a rupe, a despica, a frînge, dar el utilizează și termenul *fractus* și latinescul *minuta* — mărunțit; după cum am mai văzut, cuvîntul *minutia* se întîlnește des în cărțile algoritmiștilor. Originea termenelor franțuzești *nombre rompu* sau *fraction*, a celui englezesc — *fraction* și a celui german — *Bruch* (de la *brechen* — a sparge) este evidentă. În manuscrisele rusești din secolul al XVII-lea, fracțiile se numesc *doli* (părți), la L.F. Magnițki — *lomanîe cisla* (numere frînte), iar termenul modern *drobi* intră în uz în secolul al XVIII-lea. Notația modernă a fracțiilor este în esență de origine indiană (vezi p. 136). Linia orizontală care desparte numitorul de numărător apare la Leonardo Pisano în 1202, și aproximativ în aceeași perioadă de timp — la învățatul vest-arab al-Hassar.

Printre operațiile cu fracții, un interes deosebit îl prezintă aducerea la același numitor, înmulțirea și împărțirea. Timp de mulți ani, toți matematicienii europeni iau ca numitor comun la adunarea și scăderea fracțiilor, produsul tuturor numitorilor, reducînd uneori rezultatul. Abia Leonardo Pisano atrage atenția în mod special asupra cazului în care numitorii au un divizor comun. El avertizează în mod deosebit să nu se întocmească numi-

torul comun ca produs al numitorilor daţi şi formează cel mai mic multiplu comun în mod succesiv, mai întîi pentru numitorii a două fracţii, apoi la suma acestora o adaugă pe cea de-a treia etc. Leonardo rămîne mult timp fără imitatori; asemenea lui încep să procedeze abia matematicienii din secolul al XVI-lea: Niccolò Tartaglia (1500—1557) în lucrarea sa *Tratat general despre numere şi măsurători (General trattato di numeri et misure)*, apărut la Veneţia între anii 1556 şi 1560, Cr. Clavius în *Scurtă expunere a aritmeticii practice (Epitome arithmeticae practicae)* apărut la Roma, în 1583, iar după ei şi alţii. Noul procedeu se înrădăcinează în secolul al XVII-lea.

Teoria fracţiilor prezintă dificultăţi deosebite, întrucît în operaţiile cu ele dispar unele însuşiri obişnuite ale numerelor întregi. Aceste dificultăţi se oglindesc în zicala germană *in die Bruche geraten*, adică să „dai de fracţii", în sensul de a ajunge la un impas. Provoca mirare, de pildă, faptul că prin înmulţire cu o fracţie, un produs care în cazul unui înmulţitor, întreg diferit de 1, era mai mare decît deînmulţitul, apare mai mic decît el. Dimpotrivă, la împărţirea printr-o fracţie, cîtul poate rezulta mai mare decît deîmpărţitul. Mulţi autori încercară să explice dificultăţile legate de înmulţirea fracţiilor, dar toate interpretările au rămas prea puţin inteligibile şi elevii n-aveau în cele din urmă nimic altceva de făcut decît să înveţe regula şi să se obişnuiască cu ea.

Legătura dintre împărţire şi înmulţire se cunoştea din vechime, dar regula împărţirii printr-o fracţie se încerca să se explice independent, plecînd de la o analogie oarecare. De pildă, prin analogie cu numerele concrete se socotea că pentru împărţirea fracţiilor cu numitor comun trebuie să se împartă pur şi simplu numărătorul deîmpărţitului prin numărătorul împărţitorului, şi la aceasta se reducea chestiunea în cazul general:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}:\frac{bc}{bd}=ad:bc.$$

Aşa se procedase în Grecia şi Bizanţ, aşa procedaseră Muhammed al-Horezmi şi Djemşid al-Kaşi, Leonardo Pisano şi mulţi alţi matematicieni de mai tîrziu. Alţii, ca de pildă Jordanus Nemorarius, transpuneau la împărţire regula înmulţirii fracţiilor, spunînd că la împărţire trebuie împărţit numărătorul la numărător, iar numitorul la numitor. Dar deoarece aceste amîndouă împăr-

ţiri, în general vorbind, nu sînt posibile fără rest, împărţirea fracţiilor se efectua după regula:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{acd:c}{bcd:d}.$$

Simplificarea care pare că se impune de la sine, şi anume formularea regulii împărţirii printr-o fracţie, ca o înmulţire cu inversul ei (formulare cunoscută din vechime în China, şi mai tîrziu în India, vezi p. 32), apare abia în *Aritmetica completă (Arithmetica integra)* a lui Michael Stiefel apărută la Nürnberg, în 1544 [33, I; 210].

Calculul instrumental. Scioturile ruseşti. Calculul scris nu a eliminat calculul instrumental. De la sfîrşitul secolului al XV-lea, în Germania, Franţa, Anglia, Olanda şi apoi în Rusia devine foarte popular calculul „pe linii", descris în numeroase opere de aritmetică sau cărţi speciale de genul *Algoritmului liniar (Algorithmus linealis)* publicat la Leipzig în 1490. Calculul se face cu ajutorul unor jetoane speciale, numite în limba germană *Rechenpfennige* — pfennigi de calcul, în franceză — *jetons*, în engleză — *counters*, — adică fişe de calcul; în Rusia ele poartă numele de *peniazi* sau *peniaghi* (de la cuvîntul german *Pfennig*) şi concurează fişele locale — *kostociki* [1] (de unde provine termenul rusesc „calculul cu kosti sau peniazi").

Primele descrieri ale „calculului liniar", adică ale calculului pe linii, apar în literatura din mijlocul secolului al XV-lea, dar este posibil ca el să fi apărut cu mult mai înainte. Despre aceasta par să stea mărturie exemplarele mărcilor de calcul, ajunse pînă în zilele noastre, din Franţa — de la mijlocul secolului al XIII-lea, din Belgia — de la sfîrşitul secolului al XIII-lea, din Germania — de la sfîrşitul secolului al XIV-lea etc. Lipsa oricăror informaţii despre calculul pe linii în literatura algoritmistă pînă la sfîrşitul secolului al XV-lea indică în acest caz că el fusese folosit în cea mai mare parte de oameni străini de cercurile învăţaţilor, şi anume de oamenii de finanţe ai magistraţilor orăşeneşti şi ai statului, de negustori, meseriaşi, şi în viaţa de toate zilele. Regulile simple de calcul puteau fi învăţate şi aplicate chiar de oameni analfabeţi. E posibil totuşi ca acest calcul pe linii să fi fost elaborat cu puţin înainte de a fi apărut descrierile lui, iar jetoanele mai vechi să se fi folosit pe

[1] *Kostociki* este diminutivul de la *kost* — adică os — *N.T.*

alte feluri de abacuri, de genul tablei asemănătoare cu cea de șah, întrebuințate în Anglia în secolul al XIV-lea. Nu se cunoaște proveniența calculului pe linii. El diferă considerabil de abacul din secolele al X-lea — al XII-lea, dar a putut proveni din el prin simplificare și adaptare la noua aritmetică.

Tipărirea cărților contribuie la răspîndirea continuă a calculului liniar, cu atît mai mult cu cît în acest timp crește foarte mult nevoia de diferite feluri de calcule. Fabricarea unor jetoane metalice frumoase, inclusiv pentru export, înflorește îndeosebi la Nürnberg în secolele al XVI-lea — al XVII-lea. Calculul pe linii se distinge prin așezarea orizontală a liniilor pe care se așază jetoanele marcate și prin jetoane avînd valoarea a cinci unități, ceea ce amintește despre calculul în baza 5. Pe o tablă sau o masă se trasează cu creta, de jos în sus niște linii drepte orizontale — pentru unități, zeci, sute etc. Pe fiecare linie se așază pînă la patru jetoane sau oase; un jeton așezat între două linii înseamnă cinci unități de rangul celei mai apropiate linii de jos. Afară de aceasta, tabla se împarte în sens vertical în cîteva coloane servind pentru diferiții termeni ai adunării sau factori etc., precum și pentru rezultat. Iată de exemplu schema înmulțirii 66×96 $(= 36 + 540 + 360 + 5400) = 6336$, luată dintr-un manuscris rusesc de la mijlocul secolului al XVII-lea (fig. 103).

Cu ajutorul jetoanelor se pot efectua și operații cu fracții. De pildă, pentru a calcula conținutul de aur dintr-un aliaj de

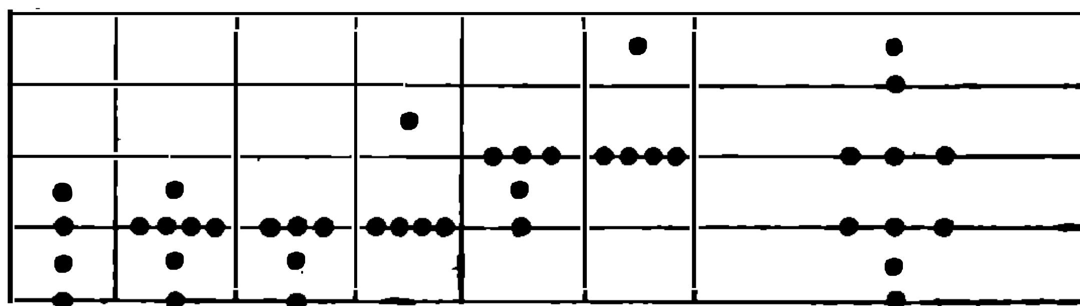


Fig. 103. Înmulțirea $60 \times 96 = 6\,336$ efectuată pe linii.

aur și argint, se consideră că unele diviziuni ale tablei corespund la 1 „lot"[1], la $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ etc. și pînă la $\frac{1}{256}$ dintr-un lot. Unele variante de tablă de calcul fuseseră adaptate la particularitățile

[1] Măsură de greutate egală cu 12,8 g în Rusia veche — *N.T.*

diferitelor sisteme monetare. În acest caz, fîșiile se marcau prin anumite semne, indicînd valoarea jetoanelor respective [29, II].

Calculul pe linii a fost extrem de răspîndit pînă la sfîrșitul secolului al XVII-lea, fiind amintit în operele lui Shakespeare și ale lui Molière; chiar și Leibniz îl folosește, preferîndu-l calculului scris. Regelui Frederic al II-lea al Prusiei i se atribuie un catren spiritual în limba franceză, pe care-l dăm în traducere:

Obișnuiții curții sînt jetoane,
A căror valoare atîrnă de locul ocupat;
Curteanul favorit înseamnă milioane,
Și zero înseamnă cel dizgrațiat.

În Rusia capătă o mare popularitate „calculul pe tablă" *(doșceanoi sciot)*, cu ajutorul unui dispozitiv din care în secolul al XVIII-lea au apărut scioturile rusești actuale. Sciotul rusesc în forma lui inițială apare aproximativ în jurul anului 1600. La început el este mai puțin perfecționat, dar permite încă de pe atunci să se efectueze ușor și repede calcule complicate. Calculul pe tablă este răspîndit printre topometri (agrimensori) și funcționari — din diferite instituții de stat, economi de la mănăstiri, negustori, vînzători etc. S-ar părea că acest calcul pe tablă apare în Rusia în legătură cu așa-numita *soșnoe pismo*, după denumirea impunerii fiscale a pămînturilor din secolele al XVI-lea — al XVII-lea. Impozitul se percepea în funcție de suprafața și calitatea lotului de pămînt, care se transforma în unități convenționale — *soha* [1], după niște coeficienți care depindeau nu numai de calitatea pămîntului, ci și de proprietar, fiind cei mai avantajoși pentru biserică, apoi pentru moșieri, și cei mai nefavorabili pentru țărani. De măsurarea pămînturilor, de transformarea lor în *soha* și de calculul impozitelor se ocupau nenumărați funcționari speciali, pentru care se întocmise un îndrumător special *Carte pentru calculul sohalelor (Kniga soșnomu pisimu)* *Soha* se împart în părți după doimi sau treimi, adică după fracții de forma $\frac{1}{2}$ sau $\frac{1}{3 \cdot 2^n}$. Alte părți de *soha* se reprezintă prin sume sau diferențe între aceste fracții fundamentale.

[1] Unitate de măsură agrară în vechea Rusie — *N.T.*

Vechile *şcioturi* ruseşti sînt alcătuite din patru „cîmpuri“, legate perechi în două cutii (fig. 104). În fiecare cîmp se întind paralel 14 sfori sau sîrme. Pentru calculul cu numere întregi se înşiră pe sfoară cîte 9 sau 10 bile de os; există de asemenea şi nişte şiruri pentru calculul fracţiilor de *soha*, unele conţinînd

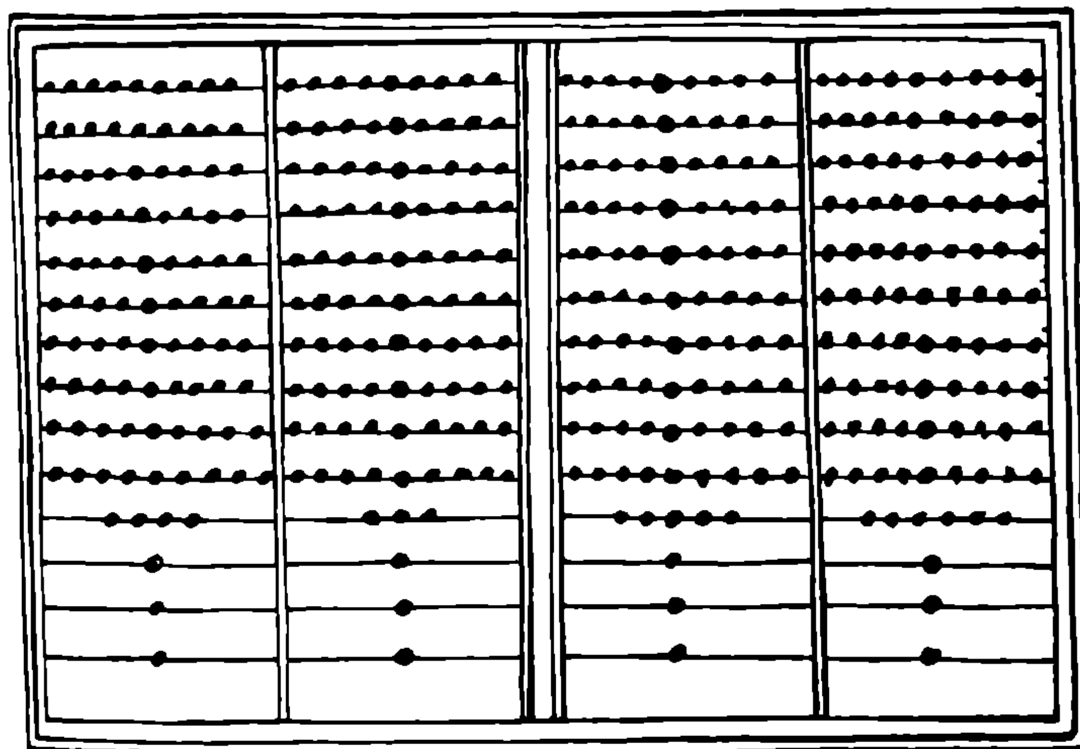


Fig. 104. „Sciotul din scînduri“ cu patru cîmpuri de calcul (manuscris rusesc din anul 1691).

cîte 3 şi 4 bile, altele — cîte una. Aceste şiruri sînt comode şi pentru unităţi de greutate, fiindcă 1 pud = 40 funţi, iar 1 funt = = 32 loţi = 96 zolotnici. Unele scioturi au pentru calcul monetar nişte sfori cu cîte şase bile de os, avînd în vedere unităţile monetare curente: 1 altîn = 3 kopeici = 6 denghi = 12 poluşki. Adunarea a două fracţii de *soha* dă fracţia superioară cea mai apropiată, iar pe şcioturi îi corespunde trecerea la bila cea mai apropiată, aşezată mai sus. În *Cartea pentru calculul sohalelor* se descriu în amănunt procedeele de adunare, cu exemple şi tabele în care figurează atît cifrele slavone cît şi cele noi.

Spre sfîrşitul secolului al XVII-lea, calculul sohalelor iese din uz, fiindcă impozitul pe pămînt se înlocuieşte prin impozitul „după curţi“ (gospodării), iar apoi pe cap de locuitor. Dar scioturile fiind utile se păstrează modificîndu-şi doar forma. Rămîne un singur cîmp şi se scot sîrmele de prisos, care folosiseră pentru

operațiile cu doimi și treimi. Dar pentru calculul monetar în denghi și polușki, precum și în „poltinî“ și „cetvertaki“, se păstrează două șiruri a cîte patru bile. Scioturile rusești sînt foarte răspîndite pînă-n ziua de azi în viața de toate zilele și în calculele financiare și statistice mai puțin complicate [211].

Am urmărit căile de dezvoltare ale aritmeticii zecimale poziționale în decurs de cîteva secole, ieșind chiar întrucîtva din perioada de timp analizată. Acum revenim la istoria matematicii în Europa în secolele al XIII-lea — al XIV-lea, ocupîndu-ne de creația a patru matematicieni remarcabili din această perioadă — Leonardo Pisano, Jordanus Nemorarius, Thomas Bradwardinus și Nicole Oresme; fiecare dintre aceștia a dezvoltat într-un sens sau altul moștenirea dobîndită din Orient sau de la cei antici.

Leonardo Pisano și opera sa Cartea abacului. În secolele al XII-lea — al XIII-lea, orașele italiene Pisa, Milano, Veneția, Genova și Florența ocupă primul loc în Europa în ceea ce privește dezvoltarea meșteșugurilor, a comerțului, a cametei și a schimbului de bani. Negustorii acestor orașe întreprind, asemenea lui Marco Polo, călătorii lungi, străduindu-se să-și însușească știința și arta altor popoare. Odată cu micile ateliere meșteșugărești, în orașe se nasc primele manufacturi. Se construiesc canale, baraje, porturi. Succese mari înregistrează construcția de corăbii și arta navigației. Începe construcția catedralelor monumentale gotice, ceea ce necesită planuri, calcule și mașini de construcție. Desele ciocniri militare între orașele ce se concurează pentru acapararea piețelor de desfacere și a coloniilor duc la perfecționarea întăriturilor cetăților și, ceva mai tîrziu, la apariția balisticii. Apar ceasurile de turn și lupa. Crește nevoia de arhitecți, pictori, dascăli, contabili, medici și juriști; treptat ia naștere intelectualitatea burgheză.

Spre sfîrșitul secolului al XII-lea, orașul Pisa are colonii comerciale la Alexandria, în Asia Mică, la Constantinopol și pe litoralul nordic al Africii. Aceste din urmă colonii se întind de la Bougie (astăzi în Algeria) spre vest și pînă la Sfax (în Tunisia) spre est. Acestea sînt niște factorii — birouri comerciale, depozite de mărfuri, vămi și locuințe ale funcționarilor. Un notar, care lucrează în decada a 9-a din secolul al XII-lea la Bougie, poreclit Bonaccio (blîndul), are un fiu, Leonardo, care intră în istoria științei sub numele de Leonardo Pisano sau Fibonacci (fiul lui Bonaccio).

Leonardo se naşte la Pisa în jurul anului 1170; în anii adolescenţei, după dorinţa tatălui său, el pleacă la Bougie pentru a învăţa procedeele de aritmetică. Pregătirea lui Leonardo însă iese cu mult din cadrul cunoştinţelor necesare unui negustor sau funcţionar. Mai tîrziu el îşi extinde cunoştinţele de matematică în timpul unor călătorii în Egipt, Siria, Bizanţ, Sicilia şi Provenţa; el moare după anul 1240. În 1202, Leonardo scrie *Cartea abacului (Liber abaci)* şi o prelucrează considerabil în 1228. Această remarcabilă carte alcătuieşte unul dintre cele mai importante mijloace de răspîndire a noii aritmetici şi a altor cunoştinţe în Europa. Leonardo sistematizează în această carte un număr imens de informaţii, luate din lucrări arabe, şi adaugă, după cum afirmă el însuşi, cîte ceva din arta geometriei lui Euclid, de fapt din întreaga moştenire a antichităţii, şi pe lîngă toate cele de mai sus mai asociază probleme şi metode proprii. În cele din urmă el realizează o lucrare care uimeşte chiar prin volumul său: în ediţia tipărită, *Cartea abacului* conţine 459 de pagini [212, I]. Leonardo expune aritmetica şi algebra ecuaţiilor liniare şi de gradul al doilea atît de complet şi de profund, încît nu este întrecut de nimeni altul pînă la el, şi multă vreme după aceea. Cele spuse se referă atît la literatura de specialitate latină, cît şi la cea arabă.

Am mai remarcat că titlul lucrării lui Leonardo, *Cartea abacului,* trebuie înţeles ca *Aritmetica* şi că în ea nu este de loc vorba despre abacul lui Gerbert şi al urmaşilor lui. Din primele rînduri, Leonardo se vădeşte un adept hotărît al metodelor numite de el indiene, în comparaţie cu care „arcele lui Pitagora“, adică, procedeele abaciştilor (vezi p. 370), îi apar ca o abatere de la calea cea dreaptă. Cartea conţine în total 15 capitole. Primele cinci sînt consacrate aritmeticii numerelor întregi, bazată pe noua numeraţie. Pentru a arăta cititorului avantajele ei, Leonardo prezintă un tabel cuprinzînd unele numere scrise în cifre romane şi, alături de ele, în cifre indiene (aşa le consideră el):

MI	MMMXX	MCXI
1001	3020	1111
MMXXIII	MMMMDC	MCCXXXIIII
2023	4600	1234
MMMXXII	MMM	MMMMCCCXXI
3022	3000	4321

Înmulţirea se recomandă să se facă prin cele două procedee amintite în capitolul despre aritmetica indienilor (vezi p. 136). Leonardo verifică înmulţirea prin nouă. El demonstrează necesitatea condiţiei respective sub formă generală, însemnînd numerele prin litere, de genul *a. b.*; *b. g.* etc., adică, prin literele finale ale segmentelor ce reprezintă nişte numere (punctele se pun pentru a deosebi numerele de cuvinte).

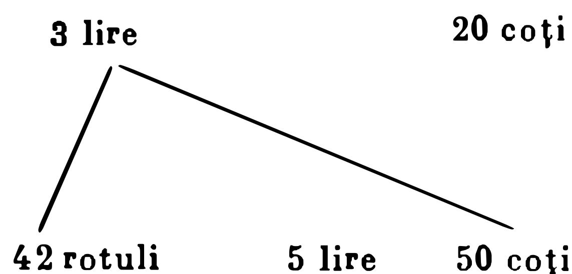
Necunoscînd tradiţia greacă, conform căreia mărimile se exprimă prin litere majuscule, Leonardo foloseşte primele litere ale alfabetului arab: *alif*, *ba*, *djim* (în Africa de nord — *ghim*), *dal*, *ha*, alfabetul arab neavînd litere majuscule. Este cazul să observăm că „proba", adică restul ce rezultă din împărţirea prin 9 a sumei cifrelor numărului dat, la Leonardo poate fi şi zero, care în felul acesta apare ca un adevărat număr. În capitolul despre împărţire el consideră descompunerea numerelor în factori primi, vorbeşte despre criteriile de divizibilitate prin 2, 3, 5, 9 şi introduce proba prin şapte şi unsprezece. În capitolele VI şi VIII, Leonardo prezintă operaţiile asupra numerelor mixte şi fracţionare, scriindu-le în maniera arabă, la stînga, de partea întreagă a numărului. Am mai vorbit despre perfecţionarea adusă de Leonardo la procedeul de aducere la acelaşi numitor a fracţiilor prin formarea celui mai mic multiplu comun. Să mai adăugăm că tot el indică o serie de procedee pentru descompunerea fracţiei într-o sumă de două sau mai multe fracţii cu numărător unitatea; asemenea fracţii, după cum ştim, le folosiseră pe larg oamenii de afaceri din ţările Islamului.

În capitolele următoare (VIII—X), el expune procedeele de rezolvare a problemelor de aritmetică comercială bazată pe proporţii. Regula de trei (acest termen nu există însă în *Cartea abacului*) se propune sub forma unei scrieri standardizate, pe care o vom lămuri pe un exemplu de problemă: dacă 100 de rotuli (unitate de greutate din Pisa) costă 40 de lire, cît costă 5 rotuli? Problema se rezolvă scriind:

40 lire 100 rotuli
\
5 rotuli

Numerele legate prin linie se înmulţesc între ele, iar rezultatul se împarte la numărul liber de deasupra. Problemele în care se cere să se găsească anumite mărimi legate prin mai multe proporţii, ca de pildă un schimb de mărfuri sau valute, ale căror costuri sînt legate prin cîteva rapoarte date, se rezolvă

de asemenea prin intermediul unei reţete standard. De exemplu, dacă 20 de coţi de stofă costă 3 lire, iar 42 de rotuli de bumbac costă 5 lire, cîţi rotuli de bumbac se pot obţine pentru 50 de coţi de stofă? Numerele date se aşază după schema:



şi, în conformitate cu ea, se înmulţesc numerele legate prin linii, iar rezultatul se împarte la produsul celorlalte numere. Această regulă, denumită în secolul al XVIII-lea „regula în lanţ", Leonardo o numeşte *figura cata* sau *chata* şi în legătură cu ea aminteşte *Almagestul* lui Ptolemeu şi cartea lui Ahmed despre rapoarte, spunînd că el analizase 18 combinaţii posibile ale acestei figuri. Aici este vorba despre matematicianul egiptean Abu Djafar Ahmed ibn Iusuf al-Misri (decedat în jurul anului 912), a cărui operă *De proportione et proportionalitate* se cunoaşte în traducerea latină a lui Gherardo din Cremona [21, II, p. 16]. Leonardo foloseşte termenul *figura cata* în legătură cu combinaţiile rapoartelor compuse, care participă în aşa-numita regulă a celor şase mărimi sau teorema lui Menelau a patrulaterului complet numit în literatura matematică arabă *şakl al-kita* sau figura secantelor (vezi pp. 318 şi 320). În alte probleme, Leonardo introduce pînă la nouă mărimi date.

Tratarea problemelor rezolvabile prin regulile de trei, cinci etc., directă şi inversă din *Cartea abacului* este similară cu cea din literatura arabă. Asemănător cu precursorii săi orientali, care la rîndul lor îl urmaseră pe Euclid, Leonardo notează fiecare termen arbitrar al rapoartelor printr-o literă. El analizează mai amănunţit regula celor cinci mărimi sub formă generală. Pentru toate cele şase mărimi, inclusiv cea căutată, are loc o egalitate între produsele *.a.e.c.* şi *.d.b.f.*, exact la fel ca şi în cazul celor şase segmente din teorema secantei. Raportul dintre fiecare mărime din primul grup de trei şi oricare din mărimile celui de-al doilea grup de trei se poate exprima în două feluri prin rapoartele compuse ale celor două perechi de mărimi rămase, şi în felul acesta se obţin 18 combinaţii. Leonardo nu aminteşte alte 18 combinaţii posibile, corespunzătoare mărimilor din

al doilea grup de trei. Nasireddin at-Tusi enumerase în întregime cele 36 de combinaţii în capitolul despre rapoartele compuse din opera sa *Tratat despre patrulaterul complet* [169, p. 36]. La Leonardo se înrudesc desigur, cu acest cerc de probleme, problemele rezolvabile prin „regula asociaţiei", adică problemele de împărţire a unei sume oarecare de bani proporţional cu părţile participanţilor etc.

În capitolul XI se analizează problemele de amestecuri, rezolvarea lor fiind dată sub formă de reţete. Într-o grupă de probleme se cere să se determine titlul unui aliaj, compus din cantităţi cunoscute de aliaje de compoziţie dată, într-o altă grupă de probleme trebuie aflat raportul între cantităţile unor aliaje date, care împreună alcătuiesc un aliaj cu un titlu dat. Printre aceste probleme se găseşte şi o variantă a problemei despre păsări, întîlnită mai înainte (p. 244): 30 de păsări costă 30 de monede; potîrnichile costă 3 monede bucata, porumbeii — 2 monede bucata, iar perechea de vrăbii — o monedă; se întreabă cîte păsări sînt din fiecare fel? Leonardo o tratează la fel ca o problemă de aliaje $\left(\text{un aliaj de titlu } 30:30 = 1 \text{ trebuie să fie alcătuit din cantităţi întregi cu titluri } 3,\ 2,\ \frac{1}{2}\right)$ şi prezintă unica soluţie întreagă 3, 5 şi 22. Analiza completă a problemei păsărilor cu alte date numerice, Leonardo o expune mai tîrziu într-o scrisoare către magistrul Theodor de la curtea împăratului Frederic al II-lea.

Capitolul XII conţine un mare număr de diferite probleme. Vom prezenta cîteva din ele. În primul rînd să remarcăm sumările de serii: progresia aritmetică şi geometrică, seria pătratelor şi, pentru prima oară în istoria matematicii, sumarea unei serii recurente. Un exemplu interesant de problemă hazlie, care a făcut ocolul multor ţări, este problema celor 7 bătrîne plecate spre Roma, avînd fiecare cîte 7 catîri, pe fiecare catîr sînt cîte 7 saci, cu cîte 7 pîini fiecare, pe lîngă fiecare pîine sînt 7 cuţite, fiecare cuţit fiind băgat în cîte 7 teci. Cîte obiecte sînt cu totul? (137 256). O problemă asemănătoare se întîlneşte în Egiptul antic: pe de altă parte, aceeaşi problemă într-o enunţare puţin diferită apare şi în unele manuscrise ruseşti medievale [213, p. 314]:

«Merg pe drum şapte babe:	7
Fiecare babă are şapte toiege:	49
Pe fiecare toiag sînt şapte noduri:	343

Pe fiecare nod se află șapte traiste:	2 401
În fiecare traistă sînt șapte plăcinte:	16 807
În fiecare plăcintă sînt șapte vrăbii:	117 649
Fiecare vrabie are șapte pipote:	823 543
Și cu totul sînt	960 799»

Seria recurentă apare în problema înmulțirii iepurilor de casă. Se întreabă cîte perechi de iepuri se vor naște într-un an dintr-o pereche de iepuri, dacă fiecare pereche aduce lunar o nouă pereche, capabilă la rîndul său să se reproducă după o lună de la naștere, și dacă nici o pereche nu moare. Răspunsul se obține prin sumarea seriei $1 + 2 + 3 + 5 + ... + 377$, unde fiecare termen, afară de primii doi, este egal cu suma celor doi precedenți, $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$. Astăzi, acest șir se numește șirul lui Fibonacci și reprezintă un caz particular al clasei șirurilor recurente, ai căror termeni se exprimă prin combinații liniare ale cîtorva termeni precedenți[1]. Termenul de șir recurent îi aparține lui A. Moivre (publicat în 1724). Să mai remarcăm o problemă foarte importantă și devenită ulterior foarte populară care apare pentru prima oară la Leonardo; se cere să se determine numărul cel mai mic de greutăți cu care se pot cîntări toate greutățile întregi, mai mici decît una oarecare dată. Răspunsul lui Leonardo 1, 3, 9, 27, ... se bazează pe faptul că orice număr întreg poate fi reprezentat sub forma unei sume sau diferențe a diferitelor puteri ale numerelor 3 și 1.

Un loc important îl ocupă la Leonardo diferite probleme reductibile la ecuații liniare și pentru a căror rezolvare el aplică diferite procedee: metoda falsei poziții, soluții algebrico-verbale ducînd sub forma unei inducții incomplete la formularea regulilor de rezolvare a sistemelor de un anumit tip special, și, în sfîrșit, regula celor două false poziții, expusă în cap. XIII. Multe probleme sînt de origine orientală sau greacă antică, la fel ca și procedeele lor de rezolvare; în elaborarea lor, Leonardo merge totuși mai departe. În cap. XII prin procedeul falsei poziții el rezolvă o problemă în care se cere să se calculeze înălțimea unui

[1] Probabil că primele șiruri de numere, legate prin relații liniare recurente, fuseseră numerele lui Teon din Smirna $u_n = u_{n-1} + 2v_{n-1}$, $v_n = v_{n-1} + u_{n-1}$, care pentru $u_1 = v_1 = 1$ dau aproximări raționale $\frac{u_n}{v_n}$ care tind spre $\sqrt{2}$ (vezi p. 161). — *N. A.*

arbore din care $\frac{1}{3}$ și $\frac{1}{4}$ alcătuiesc 21 de șchioape și se află sub pămînt. Ca falsă poziție el ia numărul 12 și subliniază în mod deosebit că trebuie ales orice număr divizibil prin numitorii fracțiilor din coeficienți.

Leonardo aplică procedeul falsei poziții și într-o problemă unde se cere să se determine cîți bani are fiecare din cei doi oameni, problemă întîlnită de noi încă în lucrarea arabă *Carte despre mărire și micșorare*, unde ea se rezolvă cu ajutorul a două false poziții (vezi p. 222). După cum spune însuși Leonardo, această problemă îi fusese propusă de un dascăl la Constantinopol. Leonardo expune și un alt procedeu de rezolvare, numindu-l regulă directă *(regula recta)*, spunînd că îl aplică arabii și că merită laude deosebite, deoarece cu ajutorul lui se poate rezolva o infinitate de probleme. Regula directă este soluția algebrică, dată de Leonardo similar cu matematicienii orientali, fără simboluri. Necunoscuta se numește aici *res*, adică obiect (traducerea termenului arab *șai*). Problema sună astfel: dacă primul om va căpăta de la cel de-al doilea 7 dinari, atunci el va fi de cinci ori mai bogat decît al doilea; dacă al doilea om va primi de la primul 5 dinari, el va fi de șapte ori mai bogat decît primul. Cîți bani are fiecare? Leonardo ia avutul celui de-al doilea ca obiect și 7 dinari; atunci primul om, conform condiției, trebuie să aibă 5 obiecte fără 7 dinari. Dacă primul îi va da celuilalt 5 dinari, atunci primul va rămîne cu 5 obiecte fără 12 dinari, iar al doilea va avea un obiect și 12 dinari. În acest fel, suma unui obiect cu 12 dinari este de șapte ori mai mare decît cinci obiecte fără 12 dinari, de unde 34 de obiecte fac 96 de dinari, un obiect este $2\frac{14}{17}$ dinari etc. Mai departe, el rezolvă probleme cu mai mult de doi participanți. El are exemple speciale de „probleme insolubile", ale căror condiții conduc la contradicții.

Leonardo aplică rezolvarea algebrică și la o altă grupă de probleme populare în evul mediu, în care se cere să se determine avutul cîtorva oameni, fiecare dintre ei putînd să cumpere un obiect oarecare doar dacă adună ceea ce posedă el cu diferite părți din capitalurile celorlalți [214]. În cap. XII al *Cărții abacului* sînt culese 29 de asemenea probleme. În afară de una singură, costul obiectului nu se arată, așa încît restul de 28 de probleme sînt nedeterminate; această nedeterminare se înlătură,

întrucît se cere ca soluţia să se găsească în cele mai mici numere întregi. Leonardo începe cu cazul a doi participanţi:

$$x + \frac{1}{3} y = s,$$

$$y + \frac{1}{4} x = s$$

şi dă mai întîi reţeta soluţiei:

$$x = (3 \quad - 1) 4 = 8,$$
$$y = (4 \quad - 1) 3 = 9,$$
$$s = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = 11.$$

După aceasta, el fundamentează regula cu ajutorul unor calcule algebrice, care se pot scrie în mod adecvat prin transformările:

$$x + \frac{1}{3} y = y + \frac{1}{4} x;$$

$$x + \frac{1}{3} y - \frac{1}{3} y = y + \frac{1}{4} x - \frac{1}{3} y, \quad x = \frac{2}{3} y + \frac{1}{4} x;$$

$$x - \frac{1}{4} x = \frac{2}{3} y + \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} x, \quad \frac{3}{4} x = \frac{2}{3} y.$$

Mai departe, Leonardo se bazează pe „regula proporţiilor", explicată de el ceva mai sus, obţinînd $x = \frac{2}{3} N$, iar $y = \frac{3}{4} N$, unde $N = 12$, atunci

$$s = x + \frac{1}{3} y = \frac{2}{3} N + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} N = \frac{11}{12} N = 11.$$

Scriind sistemul sub forma:

$$x + \frac{a_1}{b_1} y = s,$$

$$y + \frac{a_2}{b_2} x = s,$$

soluţia lui Leonardo se poate exprima într-un fel mai general:

$$x = \frac{b_1 - a_1}{b_1} N, \quad y = \frac{b_2 - a_2}{b_2} N, \quad s = \frac{b_1 b_2 - a_1 a_2}{b_1 b_2} N,$$

unde N este cel mai mic multiplu comun al numerelor b_1 şi b_2.

După aceasta Leonardo dă soluţia algebrică a problemei cu trei participanţi; în problema cu patru necunoscute el formulează în cuvinte un procedeu general, regulat, pentru rezolvarea unor asemenea probleme. Nu vom prezenta această regulă a lui Leonardo, de altfel foarte succintă şi clară; în ea se vorbeşte despre operaţiile asupra numărătorilor şi a numitorilor ce se succed în ordinea coeficienţilor necunoscutelor. Ne vom limita doar să scriem expresia primei necunoscute prin parametrul s, pentru un sistem cu patru necunoscute:

$$x = \frac{[((b_1 - a_1)\, b_2 + a_1 a_2)\, b_3 - a_1 a_2 a_3]\, b_4}{b_1 b_2 b_3 b_4 - a_1 a_2 a_3 a_4}\, s.$$

Leonardo ia pe s egal cu numitorul şi de aceea nu se mai pune decît chestiunea găsirii numărătorului. Acest algoritm al lui Leonardo este o realizare remarcabilă a secolului al XIII-lea. În comparaţie cu metoda antică chineză *fan-cen*, algoritmul lui Leonardo se deosebeşte în mod avantajos prin formularea regulii definitive de exprimare a necunoscutelor. Totuşi Leonardo se limitează aici doar la analiza unui sistem de un tip foarte special:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + \frac{a_1}{b_1} x_2 &= s, \\ x_2 + \frac{a_2}{b_2} x_3 &= s, \\ \dots\dots&\dots\dots \\ x_n + \frac{a_n}{b_n} x_1 &= s, \end{aligned}\right\}$$

în timp ce *fan-cen* este un algoritm pentru rezolvarea unui sistem canonic de ecuaţii liniare cu orice coeficienţi.

Mai departe problemele se complică. Astfel, Leonardo rezolvă o problemă ce se poate exprima prin ecuaţiile:

$$\left.\begin{aligned} x + \frac{a_1}{b_1}(y + z) &= s, \\ y + \frac{a_2}{b_2}(x + z) &= s, \\ z + \frac{a_3}{b_3}(x + y) &= s. \end{aligned}\right\}$$

Soluţia se obţine foarte inteligent, cu ajutorul unei necunoscute auxiliare S:

$$x + y + z = S.$$

Scăzînd ecuaţiile date din ultima, se obţine:

$$\frac{b_1 - a_1}{b_1}(y + z) = \frac{b_2 - a_2}{b_2}(x + z) = \frac{b_3 - a_3}{b_3}(x + y)$$

şi în conformitate cu regula proporţiilor:

$$y + z = \frac{b_1}{b_1 - a_1} Nf,$$

$$x + z = \frac{b_2}{b_2 - a_2} Nf$$

$$x + y = \frac{b_3}{b_3 - a_2} Nf,$$

unde N este cel mai mic multiplu comun al diferenţelor $b_1 - a_1$ etc., iar f este un coeficient ce se introduce pentru comoditatea calculelor ce urmează. Adunînd egalităţile din urmă şi luînd $f = 2$, Leonardo găseşte:

$$x + y + z = S = \sum_{k=1}^{3} \frac{b_k}{b_k - a_k} N,$$

determinînd apoi uşor toate necunoscutele în numere întregi. Să observăm că după informaţia lui Iamblic, încă matematicianul grec Thimaridos din Paros (secolul al V-lea î.e.n.) rezolvase o problemă ce se reduce la un sistem de ecuaţii de tip mai particular:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_n &= a \\ x_1 + x_2 &= a_1, \\ x_1 + x_3 &= a_2, \\ \dots\dots\dots\dots&\dots\dots\dots \\ x_1 + x_n &= a_{n-1} \end{aligned}\right\}$$

pentru valori concrete ale lui n.

Leonardo aplică metoda descrisă mai sus şi la o problemă complicată din punct de vedere al calculului, ce-i fusese propusă,

după cum scrie el, de un dascăl foarte experimentat din Constantinopole, după nume Musc:

$$\left.\begin{aligned} x + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right)(y + z + u + v) &= s, \\ y + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{480}\right)(z + u + v + x) &= s, \\ z + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{688}\right)(u + v + x + y) &= s, \\ u + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{420}\right)(v + x + y + z) &= s \\ v + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{27} + \frac{1}{810}\right)(x + y + z + u) &= s. \end{aligned}\right\}$$

Sursa acestei grupe de probleme a lui Leonardo este cel puţin în parte matematica Bizanţului, după cum reiese clar din propriile-i afirmaţii. La rîndul său, în Bizanţ aceste probleme puteau să fi ajuns din Alexandria, de pildă din operele lui Diofant. Problema lui Leonardo

$$\left.\begin{aligned} x + \frac{1}{3}(z + y) &= s, \\ y + \frac{1}{4}(x + z) &= s, \\ z + \frac{1}{5}(x + y) &= s \end{aligned}\right\}$$

coincide exact cu problema 24 din cartea I a *Aritmeticii* lui Diofant; problema imediat următoare şi asemănătoare cu precedenta, avînd patru necunoscute în fiecare ecuaţie, se deosebeşte la Leonardo de problema 25 a lui Diofant numai prin unii coeficienţi: în primul caz avem $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, iar în al doilea: $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$. Ultima problemă există şi la al-Karadji şi nu este exclus ca Leonardo s-o fi luat din *Al-Fahri*, deşi în ansamblu această grupă de probleme el o întîlneşte incontestabil în Bizanţ. Oricum ar fi, Leonardo elaborează independent procedee noi algebrice pentru rezolvarea lor.

De studiul ecuaţiilor liniare se leagă un alt merit remarcabil al matematicianului italian. Analizînd unele probleme imposibile de acest gen, el ajunge — primul în Europa — la ideea introducerii numerelor negative şi a interpretării lor ca datorii.

Rezolvînd prin primul procedeu descris o problemă cu șapte necunoscute

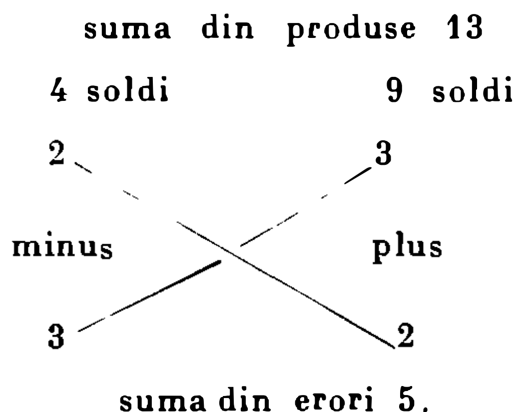
$$\left.\begin{array}{l} x + y + z + \frac{1}{2}(u + v + w + t) = s, \\ y + z + u + \frac{1}{3}(u + w + t + z) = s, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ t + x + y + \frac{1}{8}(z + u + v + w) = s, \end{array}\right\}$$

Leonardo obține pentru necunoscute valorile $x = 507$, $y = 171$, $z = 4\,029 - 4\,038$, $u = 1\,347$, $v = 451$, $w = 131$ și $t = 1\,431$. Acolo unde noi am fi scris -9, el vorbește despre „datoria 9“ *(debitum 9)*. Problema dată, explică Leonardo, este insolubilă, dar ea devine solubilă dacă se consideră că a treia persoană are o datorie. Acesta nu este unicul exemplu unde Leonardo ajunge la ideea numărului negativ și la interpretarea lui ca datorie sau ca lipsă de avere. O altă problemă similară mai există în *Cartea abacului*, iar a treia — într-o altă operă a sa, *Floarea (Flos)* [212, II]. Poate că aici Leonardo urmează un exemplu al lui Abu-l-Vafa, luat la rîndul său din matematica indiană. Să subliniem că la fel ca și în Orient, numerele negative apar prin extinderea aplicării unui algoritm oarecare.

Mai amintim în mod deosebit încă două probleme din cap. XII, care dovedesc existența unor legături între matematica orientală și cea occidentală. Acestea sînt: problema în care se cere să se determine un număr multiplu de 7, care împărțit prin 2, 3, 4, 5, și 6 să dea la rest 1, întîlnită mai înainte la ibn al-Haisam (p. 248), și problema unde se cere să se determine un număr care împărțit prin 3, 5 și 7 dă, respectiv, resturile 2, 3, și 2, precum și alte probleme similare cu aceasta. Nu ne putem îndoi cîtuși de puțin de faptul că Leonardo a luat cunoștință de această ultimă problemă la Bizanț, unde ea se întîlnește ceva mai tîrziu într-un manuscris (aproximativ din anul 1300) și unde ajunsese după toate probabilitățile din China (vezi p. 98).

În cap. XIII, după cum am mai spus, problemele ce se reduc la ecuații liniare se rezolvă cu ajutorul regulii celor două false poziții, numită de Leonardo la fel ca la arabi, *elhatain (elchatayn*, adică, *al-hatain)* și o demonstrează în amănunt pentru toate cele trei cazuri aparte; deducerea are în esență un caracter algebric general, iar numerele sînt reprezentate prin segmente. Vom remarca doar schema de prezentare a calculelor pe un exem-

plu de problemă: 100 de rotuli costă 13 livre (o livră = 20 soldi, 1 soldi = 12 dinari), cît costă 1 rotul? Prima poziţie: 3 soldi dau un surplus (prisos) de 2 livre; a doua poziţie: 2 soldi dau o lipsă de 3 livre. Calculul urmează după schema:



adică $x = \frac{3 \cdot 3 + 2 \cdot 2}{3 + 2} = 2$ soldi $7\frac{1}{5}$ dinari. Această schemă mecanică (cu variantele respective pentru alte două cazuri ale regulii) intră apoi trainic în literatura europeană de aritmetică. Aici apar pentru prima oară cuvintele „minus" (mai puţin) şi „plus" (mai mult), dar încă nu în sensul operaţiilor de scădere şi de adunare, ci în sensul lipsei şi prisosului. Mai departe, minusul îi serveşte lui Leonardo pentru a însemna scăderea.

Ultimele capitole din *Cartea abacului* sînt consacrate extragerii rădăcinilor şi algebrei. În cap. XIV, Leonardo explică pe exemple numerice procedeele pentru extragerea aproximativă a rădăcinii pătrate şi cubice. În primul caz el se foloseşte uneori de înmulţirea prealabilă a numărului de sub radical cu 10^{2n}, alteori aplică algoritmul de iteraţie, despre care am mai vorbit de mai multe ori mai înainte (vezi de exemplu p. 258). Ca şi precursorii săi, Leonardo se opreşte la cea de-a treia aproximare.

După extragerea rădăcinilor pătrate urmează problema de operaţii cu iraţionale pătratice, fapt care arată că Leonardo stăpînea bine materialul din cartea a X-a a *Elementelor*. Leonardo prezintă regula de extragere a rădăcinii cubice prin aproximarea

$$\sqrt[3]{a^3 + r} \approx a + \frac{r}{3a(a+1)+1},$$

ca o descoperire proprie a sa. Dar noi ştim că nu are el prioritate în această chestiune (vezi p. 256). În cazul rădăcinilor

cubice, Leonardo se limitează la această a doua aproximare, care adesea asigură o bună precizie. De exemplu:

$$\sqrt[3]{900} \approx 9 + \frac{171}{271},$$

adică $\approx 9{,}631$, unde Leonardo mai înlocuiește și $\frac{171}{271}$ prin $\frac{2}{3} \approx$ $\approx 0{,}667$; valoarea exactă cu trei zecimale fiind 9,655.

În sfîrșit, în cartea a XV-a sînt adunate o serie de probleme de geometrie unde se aplică teorema lui Pitagora și un număr mare de exemple de ecuații de gradul al doilea rezolvabile cu ajutorul „algebrei și almukabalei". Aici, Leonardo se bazează substanțial pe literatura arabă de matematică. El analizează aceleași șase forme canonice de ecuații ca și al-Horezmi; de la acesta vine de altfel — printr-o serie de verigi de legătură — și unul din modelele de ecuații alcătuite de Leonardo, și anume $x^2 + 10\,x = 39$. Multe probleme sînt luate din *Cartea măsurătorilor* a lui Savasorda și îndeosebi din tratatul de algebră al lui Abu Kamil, dar Leonardo propune și probleme proprii [33, III, p. 80; 100].

Expunerea lui Leonardo este făcută în cuvinte, dar în text se strecoară notații printr-una sau două litere a unor segmente, reprezentînd mărimile date și căutate sau combinații ale lor. Pătratul necunoscutei se numește *census* — avere, stare, cens, *quadratus* — pătrat, *res* — obiect, lucru sau *radix* — rădăcină, numărul dat — *numerus* sau *denarius* — toate acestea fiind traduceri latinești ale termenelor arabe: *mal*, *murabba*, *șai*, *dșizr*, *adad*, *dinar*.

Prezentăm formularea unei probleme, pe care noi am fi scris-o sub forma sistemului:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 10 \\ x\left(10 + \frac{x}{y} + \frac{x}{y}\right) &= 114 \end{aligned}\right\}$$

Leonardo spune: „Împarte iară pe 10 în două părți și împarte pe aceea prin aceasta și pe aceasta prin aceea, iar rezultatele împărțirilor adună-le cu 10 și ceea ce se obține înmulțește cu una din părți și va rezulta 114" [215, p. 384]. Una din părți el o ia drept obiect, adică drept x, și o reprezintă prin segmen-

tul a; pe o dreaptă aparte înscrie segmentele $.b.g. = 10$ și $.g.d.$, $.d.e.$, care sînt cîturile rezultate din împărțirea părților una prin alta $\frac{y}{x}$ și $\frac{x}{y}$ (fig. 105).

„Fiindcă din $.a.$ prin $.b.e.$ se obțin 114, înseamnă că din $.a.$ prin $.b.g.$ și prin $.g.d.$ și prin $.d.e.$ se va obține în rezultat tot 114., și dacă de aici vom scădea ceea ce se obține din $.a.$ prin $.b.g.$, adică produsul [*multiplicatio*] obiectului prin 10., vor rămîne 114. [minus] 10 · obiecte pentru înmulțirea numărului $.a.$ prin $.g.e.$ și dacă vei scădea din aceasta produsul lui $.a.$ prin $.g.d.$, adică, prin ceea ce se obține din împărțirea celeilalte părți prin $.a.$, în care înmulțire apare partea ce se împarte și care este 10. minus obiectul, vor rămîne 104. minus 9. obiecte pentru produsul lui $a.$ prin $.d.e.$". Ajungînd astfel pînă la egalitatea:

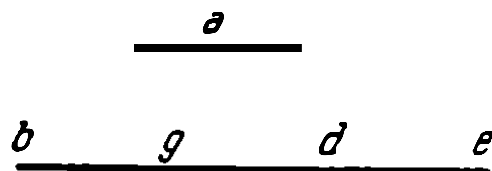


Fig. 105

$$104 - 9\,x = x\frac{x}{10 - x},$$

Leonardo continuă:

„Produsul $.a.$ prin $.d.e.$ este egal cu împărțirea pătratului [*quadrat*] numărului: $.a.$ prin cea de-a doua parte, adică prin 10. minus obiectul. De aceea, din înmulțirea lui $.a.$ prin el însuși apare o avere, la împărțirea căreia prin 10. minus obiectul apar 104. minus 9. obiecte; de aceea, dacă vei înmulți pe 10. minus un obiect prin 104. minus 9. obiecte, se obțin 1 040. și 9. averi, micșorate cu 194. obiecte, egale cu o avere, de aceea restabilește [*restaura*] obiectele ce se scad și extrage [*extrahe*] cîte o avere din ambele părți și vor rămîne 8. averi și 1 040 de dinari, egali cu 194. obiecte, de aceea împarte toate acestea la numărul averilor și se va obține o avere și 130. dinari, egali cu $24\frac{1}{4}$ obiecte" [215, p. 385], adică:

$$x^2 + 130 = 24\frac{1}{4}\,x,$$

de unde, conform regulii,

$$x = 8,\ 10 - x = 2.$$

Exemple de ecuații de gradul al doilea și de sisteme cu două necunoscute, luate de Leonardo de la Abu Kamil, sînt date mai

sus la pp. 213, 215 și 216. Merită atenție și exemplele proprii ale învățatului italian. Astfel, obținînd pentru rădăcina ecuației

$$x^2 = \sqrt{6x}\,\sqrt{5x} + 10x + 20$$

valoarea irațională

$$x = 5 + \sqrt{7\frac{1}{2} + \sqrt{52\frac{1}{2} + \sqrt{750}}},$$

Leonardo consideră necesar să indice că ea este aproximativ egală cu $16\frac{2}{3}$ (cu o exactitate pînă la sutimi $x = 16{,}68$). Ecuația

$$\left(\frac{1}{3}x^2 + 1\right)\left(\frac{1}{4}x^2 + 2\right) = x^2 + 13$$

se reduce la una de gradul al doilea cu ajutorul unei necunoscute auxiliare $x^2 = z$, numind această „avere" din nou „obiect" ($z = 12$). Printre sistemele cu două necunoscute pe care le rezolvă Leonardo, sînt destule noi, ca de pildă sistemul:

$$x + y = 10,$$

$$\frac{xy}{x - y} = \sqrt{6},$$

$$x = 5 - \sqrt{6} + \sqrt{31},\quad y = 5 + \sqrt{6} - \sqrt{31}$$

Dar deosebit de interesantă este noua rezolvare a sistemului

$$x + y = 10,$$

$$\frac{10}{x} + \frac{10}{y} = 6\frac{1}{4},$$

existent și la Abu Kamil. Ambii autori au multe elemente comune în analiza acestei probleme. De exemplu, amîndoi fundamentează în amănunt egalitatea produsului și a sumei cîturilor rezultate din împărțirea oricărui număr în două părți, adică $\frac{a}{x}\cdot\frac{a}{y} = \frac{a}{x} + \frac{a}{y}$ pentru $a = x + y$. Dar Abu Kamil, înlocuind în a doua ecuație pe 10 prin $x + y$, reduce chestiunea la o ecuație de gradul al doilea în raport cu y/x, în timp ce Leonardo presu-

pune o parte egală cu $2 - z$, așa încît cealaltă este $8 + z$; atunci:

$$(2 - z)(8 + z) = 16.$$

„Acționează conform algebrei [*secundum algebra*] — spune Leonardo — și vei găsi că obiectul este zero [*invenies rem esse nihil*], așa încît una din cele două părți va fi 2, iar cealaltă, 8" [215, p. 470]. Se pare că acesta este primul caz din istoria matematicii, în care se ia în seamă o rădăcină egală cu zero, fapt la care se va ajunge din nou abia după secole întregi. Leonardo neglijează bineînțeles cea de-a doua rădăcină negativă —6. Este interesant că cu această problemă și cu variantele ei numerice se încheie atît tratatul de algebră al lui Abu Kamil, cît și *Cartea abacului*.

Cartea abacului se ridică foarte mult deasupra întregii literaturi de aritmetică și algebră a secolelor al XII-lea — al XIV-lea prin varietatea și vigoarea metodelor, bogăția problemelor și prin expunerea demonstrativă. În prefața operei sale, Leonardo scrie că și-a compus lucrarea, pentru ca „neamul latinilor" să nu mai rămînă în neștiința lucrurilor expuse în ea. Dar de fapt, această lucrare nu era de loc destinată școlarilor și nici acelor care așteptau de la matematică doar niște reguli pentru rezolvarea unor probleme standard din domeniul comercial etc. *Cartea abacului* este în parte, la nivelul învățaților contemporani, dar și mai mult, la cel al celor de mai tîrziu.

Matematicieni din secolele următoare au cules din plin din ea atît probleme cît și metode de rezolvare, care au pătruns în secolele al XV-lea — al XVI-lea în nenumărate manuscrise și cărți tipărite italienești, germane, franțuzești, englezești și rusești. Probleme ale lui Leonardo trec din unele opere într-altele și pot fi întîlnite pînă și în vestita *Algebră* a lui Euler (1768) și chiar mult mai tîrziu.

Practica geometriei și **Cartea pătratelor.** Pentru dezvoltarea matematicii au avut o mare importanță și alte lucrări ale lui Leonardo. În 1220 el scrie *Practica geometriei (Practica geometriae)* [212, II], o carte, care, contrar titlului său, nu este un manual special de geometrie aplicată, de agrimensură, ci conține diferite teoreme (cu demonstrații) referitoare la măsurarea diferitelor mărimi, la aritmetică, planimetrie și stereometrie. Afară de rezultatele cunoscute din vechime, există și altele aparținînd personal lui Leonardo sau prevăzute cu demonstrații originale. De exemplu, el nu prezintă pur și simplu afirmația că cele trei mediane ale unui triunghi se intersectează într-un punct (fapt

cunoscut încă lui Arhimede), ci o demonstrează. Să prelungim mediana bz (fig. 106) pînă la intersecția ei i cu o dreaptă dusă prin a paralelă cu bg. Atunci $\Delta\, aiz \sim \Delta\, gbz$ și deoarece $az = gz$, ambele triunghiuri sînt egale, adică $ai = gb = 2\, eb$. Mai departe, $\Delta aid \sim \Delta ebd$ și deci, dat fiind că $ai = 2eb$, $ad = 2ed$, adică punctul de intersecție al medianelor le împarte într-un raport de 2 : 1, de aceea este unic. La Euclid nu se întîlnește (dar există la Savasorda) teorema lui Leonardo cu privire la pătratul diagonalei paralelipipedului dreptunghic. În ultimul capitol (al șaptelea) al cărții expunerea unor procedee de agrimensură se împletește cu propoziții de fapt geometrice. Tot aici, Leonardo arată cum se determină distanțele și înălțimile cu ajutorul unui cadran gradat într-un anumit fel. Nu sînt uitate nici problemele de diviziune a figurilor (vezi p. 291). Cartea în ansamblu poartă amprenta atît a influenței literaturii grecești, cît și a celei arabe. La determinarea lui π, Leonardo folosește poligoane regulate înscrise și circumscrise cu 96 de laturi și capătă inegalitățile:

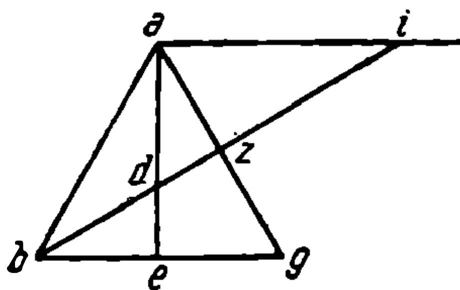


Fig. 106

$$\frac{1440}{458\frac{4}{9}} < \pi < \frac{1440}{458\frac{1}{5}}.$$

Media aritmetică a lui $\frac{4}{9}$ și $\frac{1}{5}$ este $\frac{29}{90}$, sau aproape $\frac{1}{3}$, și pentru π se ia valoarea $\frac{1440}{458\frac{1}{3}} = \frac{864}{275}$, ceea ce este egal cu 3,1418...

Vom mai aminti și problemele de geometrie, rezolvabile cu ajutorul algebrei, și anume prin reducere la ecuații de gradul al doilea; asemenea probleme se întîlnesc și în alte opere ale lui Leonardo. Unele chestiuni (de exemplu, înscrierea unui pentagon regulat într-un pătrat și într-un triunghi echilateral sau isoscel) se înrudesc nemijlocit cu lucrarea lui Abu Kamil despre pentagon și decagon amintită mai înainte. Rădăcinile iraționale ale ecuațiilor de gradul al doilea ce apar în acest caz, Leonardo le calculează cu un înalt grad de aproximare în fracții sexagesimale (pînă la cvarte).

Cu totul aparte apare la sfîrșitul *Practicii geometrice* problema găsirii unui număr al cărui pătrat, sumat cu numărul 5, să dea

un pătrat perfect; de această problemă se ocupaseră mai de mult matematicienii din țările Islamului.

În jurul anului 1225 Leonardo scrie *Cartea pătratelor (Liber quadratorum)* conținînd probleme cu ecuații nedeterminate de gradul al doilea [212, II]. Într-o problemă ce-i fusese propusă de magistrul Johannes din Palermo, filozoful împăratului Frederic al II-lea, chiar în prezența împăratului, i se cere să găsească un pătrat (rațional) care, fiind mărit sau micșorat cu 5, să dea din nou niște pătrate (raționale). Probabil că Leonardo avusese cunoștință de alte exemple de rezolvare a unor asemenea probleme din literatura arabă de matematică (vezi p. 246), dar el aplică în acest caz un procedeu personal, plecînd de la faptul că orice număr pătrat n^2 este suma primelor n numere impare și utilizînd în mod elegant formulele obținute de el pentru sumarea pătratelor naturale pare și impare consecutive. El stabilește din nou că sistemul

$$\left.\begin{aligned} x^2 + a &= y^2, \\ x^2 - a &= z^2 \end{aligned}\right\}$$

este rezolvabil în numere întregi cu condiția ca $a = 4\,mn\,(m + n)\,(m - n)$ unde m și n sînt numere întregi (atunci $x = m^2 + n^2$). Dacă se pot alege m și n în mod corespunzător, atunci problema este rezolvată, și chiar în numere întregi. Mai departe, Leonardo demonstrează că numerele de forma $4mn(m^2 - n^2)$ se împart prin 24. De aceea, dacă, în cazul dat, a, nu se împarte prin 24, atunci ecuația trebuie înmulțită cu un asemenea pătrat întreg, încît noul termen liber să fie divizibil prin 24 și să poată fi prezentat sub forma produsului indicat; după soluțiile întregi ale noii ecuații se vor putea găsi atunci soluțiile raționale ale celei date. Pentru $a = 5$, cel mai mic factor care satisface condițiile este 12^2 și avem:

$$5 \cdot 12^2 = 720 = 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot (5 + 4) \cdot (5 - 4),$$

așa încît $m = 5$, $n = 4$, $m^2 + n^2 = 41$. Prin urmare,

$$41^2 + 5 \cdot 12^2 = 49^2,$$
$$41^2 - 5 \cdot 12^2 = 31^2$$

și după împărțire prin 12^2,

$$\left(3\,\frac{5}{12}\right)^2 + 5 = \left(4\,\frac{1}{12}\right)^2,$$

$$\left(3\,\frac{5}{12}\right)^2 - 5 = \left(2\,\frac{7}{12}\right)^2.$$

Într-o altă problemă se cere să se găsească numerele x, y și z, astfel încît fiecare din sumele $x + y + z + x^2$, $x + y + z + x^2 + y^2$, $x + y + z + x^2 + y^2 + z^2$ să fie un pătrat. El dă soluția $x = \frac{16}{5}$, $y = \frac{48}{5}$, $z = \frac{144}{5}$. Această lucrare a lui Leonardo este unica lucrare europeană valoroasă de teoria numerelor din perioada de timp ce o examinăm.

Johannes din Palermo îi mai propusese lui Leonardo o problemă dificilă: să rezolve ecuația de gradul al treilea:

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20,$$

despre care este vorba în tratatul *Floarea* [212, II]. Mai întîi se demonstrează că x nu poate fi un număr întreg (pozitiv), deoarece din $x + \frac{x^2}{5} + \frac{x^3}{10} = 2$ rezultă că x este mai mic decît 2, iar $1^3 + 2 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 = 13 < 20$. Dar x nu poate fi nici o fracție (rațională) și nici rădăcina pătrată a unui număr rațional. În ultimul caz, întrucît ecuația noastră se poate transcrie sub forma:

$$x = \frac{20 - 2x^2}{10 + x^2},$$

numărul irațional x ar fi egal cu un număr rațional. Apoi, Leonardo arată că x nu poate avea de asemenea forma nici uneia din iraționalele ce se întîlnesc la Euclid și prezintă soluția aproximativă:

$$x = 1^{\circ}22^{I}7^{II}42^{III}33^{IV}4^{V}40^{VI}$$

(tot în fracții sexagesimale), fără să arate totuși procedeul folosit pentru obținerea ei. Acest rezultat remarcabil prin exactitatea lui este doar cu $1\frac{1}{2}$ sexte, adică cu $3 \cdot 10^{-11}$, mai mare decît valoarea reală a rădăcinii. Demonstrația imposibilității de a rezolva o ecuație cubică cu ajutorul iraționalelor pătratice, deși este incompletă și particulară, reprezintă totuși primul pas înainte în studiul rezolvării ecuațiilor de gradul al treilea prin radicali.

Fără a ne mai opri și asupra altor tratate mai mici și scrisori ale lui Leonardo, vom observa faptul că pentru el este caracteristică tendința nu numai de a rezolva o anumită problemă, ci și de a crea o metodă de rezolvare a unui grup pe cît posibil mai mare de probleme similare ei.

După cum s-a mai spus, lucrările lui Leonardo Pisano se ridică atît de mult deasupra nivelului de cunoștințe matematice ale

contemporanilor săi, încît ele au putut influența pe matematicieni în modul cuvenit cu mult mai tîrziu, peste două secole, de la moartea lui. Foarte cunoscute sînt și operele de matematică ale contemporanului său, Jordanus Nemorarius, deși, în ceea ce privește originalitatea și conținutul, ele sînt cu mult mai prejos decît operele lui Leonardo Pisano.

Jordanus Nemorarius. Despre identitatea lui Jordanus nu există nici un fel de informații. Poate că el este acel Jordanus din Saxonia — al doilea general, în ordinea succesiunii, al ordinului călugărilor dominicani. Născut în Germania, el locuiește într-o vreme la Paris și moare în anul 1237. Jordanus Nemorarius este un eminent mecanician și matematician, autor al unui șir de opere de aritmetică, algebră și geometrie.

Am arătat mai sus că Jordanus scrie o carte populară la vremea sa, cuprinzînd expunerea aritmeticii algoritmiste (p. 379).

În *Aritmetica expusă în zece cărți (Arithmetica decem libris demonstrata)*, Jordanus urmează în esență tradițiile antice tîrzii (Nikomah—Boethius), expunînd proprietățile generale ale numerelor [216]. O particularitate interesantă a acestei lucrări este aplicarea literelor în locul numerelor concrete, avînd ca scop generalizarea prezentării. Procedeul în sine nu era nou, dar Jordanus Nemorarius îl aplică mai sistematic decît precursorii săi. În formularea propozițiilor sau a soluțiilor problemelor, el nu exprimă mărimile cu ajutorul unor segmente sau dreptunghiuri și de aceea simbolul literal apare la el ca semn pur aritmetic al unui număr oarecare. Încă la Leonardo Pisano, notația literală se referea în cea mai mare parte simultan la o mărime și la imaginea ei geometrică și trecea, de fapt, de la cea de-a doua, la prima. Mai departe, Jordanus notează cu regularitate fiecare mărime printr-o literă și nu mai oscilează între a folosi cînd o singură, cînd deodată două litere (două capete ale unui segment sau vîrfuri ale unui dreptunghi), cum se întîmpla la Leonardo. Totuși, la Nemorarius lipsesc, la fel ca și la înaintașii săi, semnul egalității și al operațiilor algebrice (doar în locul lui $a + b$ al nostru, el scrie $.a.b.$), din care cauză el este nevoit să folosească noi notații literale pentru rezultatele fiecărei operații în parte.

După cum vom vedea imediat, Jordanus aplică același procedeu în algebra sa. Algebra lui Jordanus, opera *Despre numerele date (De numeris datis)*, constă din patru cărți și conține 115 probleme cu ecuații liniare și de gradul al doilea, precum și sisteme de astfel de ecuații [216 a, 217].

Unele probleme ale lui Nemorarius coincid cu cele ale lui Leonardo Pisano, dar în ansamblu algebrele lor diferă atît prin componența problemelor, cît și prin procedeele de rezolvare. Nemorarius face abstracție de conținutul concret al problemelor, care la el sînt toate numai exemple cu numere abstracte; el lasă de o parte orice fel de aplicații la geometrie, aritmetică comercială ș.a. Tratatul *Despre numere date* este un fel de curs universitar de algebră abstractă din secolul al XIII-lea, construit pe baza unor exemple dispuse metodic, care se rezolvă mai întîi în formă generală, iar apoi se exemplifică prin modele numerice. Titlul operei se datorește faptului că în exemple, deoarece că se iau anumite numere cunoscute, rezultă altele care depind de cele dintîi.

În cartea I a tratatului sînt reunite probleme de gradul al doilea cu două necunoscute. Punctul de pornire îl constituie sistemele

(nr. 1) $\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b, \end{cases}$ (nr. 3) $\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases}$ și (nr. 5) $\begin{cases} x - y = a \\ xy = b, \end{cases}$

ale căror reguli de rezolvare sînt formulate în cuvinte. Ultimele două sisteme nu se reduc la o ecuație de gradul al doilea, ci cu ajutorul unor transformări evidente se reduc la primul sistem, care este liniar. La aceste trei sisteme se reduc mai departe și altele în care, afară de suma sau diferența numerelor căutate, se dau diferite combinații ale pătratelor lor, ale rapoartelor etc. Problema nr. 7, care se exprimă direct prin ecuația de gradul al doilea $x^2 + ax = x(x + a) = b$, se reduce aici la sistemul nr. 5. În multe exemple numerice, prima condiție este $x + y = 10$ ca și la al-Horezmi, Abu Kamil și Leonardo Pisano. Dar mersul rezolvării este altul la Jordanus: toți autorii citați reduc asemenea sisteme la o ecuație de gradul al doilea. Problemele din cartea a II-a, exprimate îndeosebi prin proporții, reprezintă ecuații liniare, începînd cu cele mai simple și terminînd cu sisteme cu patru necunoscute. Unele procedee de eliminare a necunoscutelor vor părea ciudate pentru un cititor de astăzi. Așa de pildă, Jordanus rezolvă problema nr. 20, cu exemplul:

$$x + 6 = \frac{5}{3} y,$$

$$y + 4 = 2z,$$

$$z + 2 = \frac{5}{7} x,$$

formînd proporţii şi evitînd scăderile. Adăugînd la ambele părţi ale primei ecuaţii cîte $4 \cdot \frac{5}{3} = 6 \frac{2}{3}$, el obţine:

$$\frac{x + 12 \frac{2}{3}}{y + 4} = \frac{5}{3},$$

de unde cu ajutorul celei de-a doua ecuaţii:

$$\frac{x + 12 \frac{2}{3}}{z} = \frac{10}{3}$$

şi mai departe, în mod analog:

$$\frac{x + 19 \frac{1}{3}}{z + 2} = \frac{10}{3},$$

aşa încît, pe baza celei de-a treia ecuaţii:

$$\frac{x + 19 \frac{1}{3}}{x} = 2 + \frac{2}{7} + \frac{2}{21} \text{ sau } 19 \frac{1}{3} = \left(1 + \frac{8}{21}\right) x$$

şi $x = 14$. Aici, ca şi aproape în toate celelalte cazuri, numerele date sînt astfel alese, încît soluţiile să fie întregi şi pozitive.

Este interesantă problema nr. 25 din cartea a II-a, cu exemplul:

$$x + \frac{y}{2} = 119, \qquad z + \frac{u}{4} = 119,$$

$$y + \frac{z}{3} = 119, \qquad u + \frac{x}{5} = 119,$$

diferită de problema lui Leonardo Pisano, amintită la p. 407 doar prin unii coeficienţi, şi prin aceea că Jordanus dă de la început termenului liber o valoare numerică. În legătură cu această problemă, Leonardo formulează o regulă generală pentru determinarea necunoscutelor prin intermediul coeficienţilor pentru întreaga clasă a problemelor de acelaşi tip cu mai multe necunoscute. Nemorarius nu merge atît de departe. El descrie doar

procesul eliminării consecutive a necunoscutelor, și anume el exprimă pe rînd pe x sub forma:

$$x = \frac{z}{6} + 59\frac{1}{2}, \quad x + \frac{u}{24} = 79\frac{1}{3}, \quad x = \frac{x}{120} + 74\frac{9}{24}, \text{ de unde } x = 75;$$

după aceasta se determină imediat celelalte necunoscute.

Problema nr. 27 coincide cu una dintre problemele lui Leonardo, existentă de asemenea la Diofant (I, 25) și al-Karadji (p. 409). Deosebirea constă și aici doar în aceea că Jordanus ia de la început termenul liber egal cu 37, ceea ce Leonardo obține în cursul rezolvării. Jordanus formulase problema precedentă sub formă generală și o rezolvase prin eliminarea necunoscutelor cu ajutorul comparării lor și prin substituiri. Dar la nr. 27 el mai propune un alt procedeu, atribuindu-l arabilor și în care se obțin mărimi, numite de arabi, după cum spune el, „falsă poziție". Leonardo elaborase și în acest caz un algoritm de calcul direct al necunoscutelor și al unor mărimi auxiliare.

La analiza unor probleme analoge, Leonardo ajunsese la valori negative ale unor necunoscute. Jordanus operează numai cu soluții pozitive, dar în problema nr. 28 el analizează condițiile de posibilitate a problemelor nr. 26—27: coeficienții celui de-al doilea termen din membrul stîng trebuie să fie cu toții fie mai mari, fie mai mici decît unitatea.

În cartea a III-a, se analizează probleme cu proporții, iar în cartea a IV-a, printre altele, se dau la nr. 8—10 regulile de rezolvare a trei tipuri de ecuații de gradul al doilea cu ajutorul completării pînă la un pătrat. Este caracteristic faptul că și aici, problemele nr. 21—22 pentru sistemele $\begin{cases} x \pm y = a \\ x^2 y^2 = b, \end{cases}$ se reduc prin extragerea rădăcinii pătrate la cele de la nr. 3 și 5 din cartea I, și nu la ecuații de gradul al doilea. Spre a caracteriza stilul lui Nemorarius, vom da formularea lui pentru rezolvarea ecuației de gradul al doilea $x^2 + px = q$ [216, p. 124]. „Fie că pătratul este *.a.*, rădăcina sa *.b.* fie că se înmulțește cu *.c.d.*, știind că *.c.* și *.d.* sînt jumătățile ei, fie că *.b.* prin *.c.d.* va fi *.e.* și fie că *.a.e.* este dat. Deoarece *.b.c.d.*, fiind înmulțite cu *.b.* dă *.a.e.*, după ce se adaugă la *.a.e.* pătratul *.d.* va fi *.a.e.f.*, ceea ce se obține din înmulțirea lui *b.c.* prin el însuși. Dacă *.a.e.f.* este dat, atunci și *.b.c.* va fi dat. Dacă se scade *.c.*, rămîne dat *.b.* și prin urmare va fi dat și *.a.*". Este necesar un efort considerabil pentru a memora sensul și legăturile dintre toate aceste sim-

boluri. Lăsăm în grija cititorului transpunerea acestei deducții în limbaj contemporan. Trebuie ținut seama că $x^2 = a$, $x = b$, $c = d = \frac{p}{2}$, $\cdot c \cdot d \cdot\ = c + d = p$ etc. După cum se vede, lipsa semnelor operațiilor duce la o aglomerare extraordinară de litere nelegate între ele prin formule vizibile; Jordanus n-a creat un calcul algebric.

Patru cărți din opera *Despre triunghi (De triangulis)* [218] sînt consacrate geometriei. La început ele conțin definiții ale unor noțiuni; caracterul acestor definiții se poate urmări pe următorul exemplu: continuitatea este imperceptibilitatea limitelor împreună cu posibilitatea de delimitare. Aceste cuvinte alcătuiesc o oarecare variantă a definiției date cîndva de Aristotel în *Fizica*. În primele două cărți sînt expuse teoremele despre deosebirile dintre triunghiurile dreptunghice, ascuțite și obtuze, după rapoartele lungimii laturilor opuse și medianelor, despre împărțirea segmentelor și a figurilor limitate de linii drepte; de exemplu, se dă un procedeu original de împărțire a unui triunghi în alte trei triunghiuri egale, ceea ce echivalează cu construirea centrului lui de greutate etc. În lucrare este vizibilă influența surselor grecești și arabe. Pentru calculul laturii unui poligon regulat, înscris într-un cerc dat, Nemorarius dă o regulă întîlnită în literatura matematică arabă (vezi p. 289); autorul o numește indiană. La duplicarea cubului, el întrebuințează procedee cunoscute încă grecilor, dar pășește mai departe decît cei antici în problema trisecțiunii unghiului, folosind în fapt concoida de cerc— cea a lui Nicomede este concoidă de dreaptă. Nemorarius prezintă unele semne că ar fi cunoscut oarecum problemele izoperimetrice.

În sfîrșit, și lui Nemorarius i se atribuie o operă despre planisferie, în care, ceva mai amănunțit decît la Ptolemeu, sînt analizate proprietățile proiecției stereografice.

Cîteva probleme din ***Elemente*.** În a doua jumătate a secolului al XIII-lea și începutul secolului al XIV-lea apare un șir de lucrări teoretice, care dezvoltă diferite probleme importante ale matematicii.

Să amintim în primul rînd că în jurul anului 1260 apare o nouă traducere latină a *Elementelor*, cuprinzînd și cărțile a XIV-a — a XV-a, precum și multe comentarii și completări prețioase. Această traducere, care a avut o mare influență asupra dezvoltării ulterioare a matematicii, îi aparține lui Giovanni Campano. În completările la cartea I, Campano pune pentru prima oară

problema studiului poligoanelor neconvexe, și anume al celor stelate (vezi p. 429). De propoziția 16 din cartea a III-a se leagă raționamentele lui Campano cu privire la unghiul de tangență și la continuitate.

În propoziția amintită se demonstrează că unghiul dintre circumferință și o tangentă este mai mic decît oricare unghi rectiliniu ascuțit. Acceptînd integral aceasta, Campano presupune că unghiul de tangență are totuși o valoare ne nulă, probabil prin analogie cu concepția despre partea unui plan din vecinătatea vîrfului unui asemenea unghi. De aici rezultă (fig. 107) că unghiul unui semicerc *CAB* cu diametrul *AC*, fiind diferit de unghiul drept *CAD* și mai mic decît el, este cu toate acestea mai mare decît oricare unghi rectiliniu de felul unghiului *CAE*. Campano folosește toate acestea la analiza cvadraturii cercului, atribuită matematicianului grec Bryzon. Un rol important în argumentația lui Bryson îl joacă principiul că o mărime continuă, pentru a trece de la o valoare mai mică la alta mai mare, parcurge toate valorile intermediare. Campano combate acest principiu în cadrul concepției sale. Dacă diametrul *AC* se rotește în jurul lui *A* pînă la o poziție tangentă *AD*, atunci unghiul rectiliniu *CAE* crește pînă la un unghi drept *CAD*, dar totuși nu ia o valoare egală cu unghiul dintre semicircumferința *ABC* și diametrul *AC*, deși acest ultim unghi este mai mic decît un unghi drept [133, II].

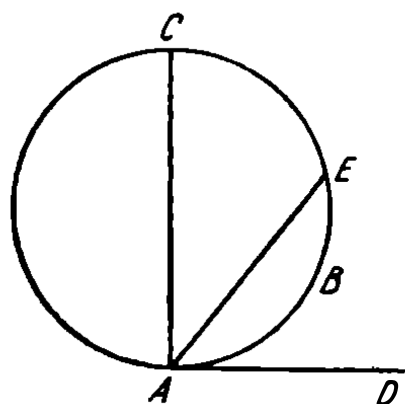


Fig. 107

Problema unghiurilor de contact îi preocupă extrem de mult pe matematicienii medievali, începînd cu Campano și Nemorarius. Unii îl urmează pe Campano, alții consideră că asemenea unghiuri sînt de un gen aparte și nu pot fi comparate cu cele rectilinii. Controversele au durat cîteva secole. Matematicianul francez J. Peltier (1515—1582), în studiul său asupra *Elementelor* (1557), insistă asupra faptului că unghiul de tangență este egal cu zero.

C. Clavius, interpretînd *Elementele* (prima sa ediție apare în 1574), se opune acestei idei, în schimb F. Viète (1593) o sprijină. De unghiul de tangență și de însușirile infiniților mici legate de acesta se ocupă mai tîrziu J. Wallis, G.W. Leibniz ș.a.; toate acestea contribuie la formarea și dezvoltarea noii analize. Totuși, o analiză riguros logică a acestei probleme depășea posibilitățile

științei acelor vremuri. Acum se știe că determinînd în mod convenabil măsura unghiurilor de contact, ele pot servi ca exemplu de mărime nearhimediană.

Lăsînd de o parte alte completări interesante ale lui Campano la *Elemente*, vom spune cîteva cuvinte despre prima încercare din Europa de a demonstra postulatul dreptelor paralele. Această încercare o face matematicianul și astronomul evreu Levi ben Gherșon sau Lev Gherșonide (1288—1344), care trăiește în sudul Franței. Gherșonide se naște la Bagnols [francezii îl numesc *maître* (maestrul) Leon de Bagnols], locuiește la Orange și Avignon. Lui îi aparțin o serie întreagă de opere în limba veche ebraică, o parte dintre ele devenind foarte cunoscute în traducere latinească. Cele spuse se referă, de exemplu, la lucrările de astronomie în care ele fac o încercare de a înlocui sistemul lui Ptolemeu printr-un anumit sistem de sfere neconcentrice. Traducerea latină a trigonometriei lui Gherșonide (1342), care descoperă din nou teorema sinusurilor (vezi p. 326) în legătură cu rezolvarea triunghiurilor rectilinii, contribuie la dezvoltarea acestei științe în Europa; Regiomontanus cunoaște această lucrare. Instrumentul simplu inventat de Gherșonide pentru măsurarea unghiurilor, denumit din eroare *Jakobstab*, adică „toiagul lui Iacov", capătă o popularitate deosebită. Acest instrument este alcătuit dintr-un baston gradat, cu o traversă mobilă așezată perpendicular pe el. În *Lucrarea calculatorului* (*Sefer ma'ase hoșeb*, 1321), Gherșonide se ocupă de combinări. La deducerea proprietății fundamentale a permutărilor $P_{n+1} = (n + 1)\ P_n$, el exprimă pentru prima oară în mod explicit principiul inducției complete matematice, aplicat de fapt încă de greci [33, VI, pp. 43—44].

Demonstrația postulatului V care ne interesează pe noi se găsește în lucrarea *Comentarii la introducerile cărții lui Euclid (Beiur ptihat sefer Iklidus)* vezi [219]. Să observăm că pînă la această dată, *Elementele* fuseseră traduse în două rînduri în limba ebraică veche. Demonstrația lui Gherșonide se înrudește cu demonstrația lui ibn al-Haisam (vezi pp. 295—299) (ale cărui comentarii la lucrarea lui Euclid fuseseră de asemenea traduse în limba ebraică veche), precum și ale lui Ommar Khayyam și at-Tusi (vezi pp. 300—305). La fel ca și Khayyam, Gherșonide pleacă de la două axiome: axioma lui Arhimede (folosită la demonstrațiile lor atît de ibn al-Haisam cît și de at-Tusi) și o axiomă echivalentă cu postulatul V: „linia oblică se apropie de acea parte de care se formează unghiul ascuțit", analogă cu postulatele de la care plecaseră Khayyam și at-Tusi. Deducția lui

Gherșonide se bazează pe demonstrația imposibilității existenței unui dreptunghi avînd toate unghiurile ascuțite sau obtuze. După cîte se știe, comentariile lui Gherșonide la *Elemente* nu au ieșit în afara cercului de matematicieni evrei din acele vremuri, și o nouă încercare de a demonstra postulatul dreptelor paralele o face abia Cr. Clavius în secolul al XVI-lea.

Ceva mai departe de linia fundamentală de dezvoltare a matematicii, undeva la limita dintre ea și filozofie și după cum se părea pe atunci, chiar dincolo de această limită, se află creația gînditorului spaniol Raymond Lull (aproximativ 1235—1315 sau 1316). Lull fusese în primul rînd un fruntaș al catolicismului, iar în filozofie un idealist extremist. În jurul anului 1274, el ajunge la ideea de a crea un procedeu special atotcuprinzător și aproape automat de descoperire a adevărurilor, pe care-l numește marea sau generala artă, *ars magna* sau *ars generalis*. El consacră cîteva zeci de opere acestei chestiuni. Totodată, Lull descrie o mașină alcătuită din cercuri concentrice, purtînd pe ele diferite noțiuni și semne. Rotirea cercurilor și combinarea termenilor trebuie să dea naștere în mod mecanic la noi adevăruri. Eroarea fundamentală a lui Lull constă însă în convingerea că lumea poate fi cunoscută într-un mod pur logic și rațional; el nu ține seama de importanța observației și a experienței. Concepțiile lui sînt confuze, iar mașina — absolut primitivă și infructuoasă. Dar într-un înveliș mistic și într-o formă universalizată la extrem, Lull exprimă unele idei, a căror importanță științifică începe să se lămurească de-abia mult mai tîrziu. În secolul al XVII-lea vederile lui Lull capătă o dezvoltare mai rațională în concepția *Caracteristicii generale* a lui Leibniz; acest mare filozof și matematician absolutizează și el posibilitățile de automatizare a procesului de cunoaștere. Astăzi putem întrezări, în inspirația lui Lull, prima anticipare foarte vagă a însăși posibilității logicii matematice și a teoriei mașinilor matematice.

Thomas Bradwardinus. Teoria continuității. În timpul secolelor al XIII-lea și al XIV-lea, un loc important ocupă în universitățile din Anglia și Franța elaborarea problemelor de fizică; ca punct de plecare serveau pentru acestea operele de filozofie a naturii aparținînd lui Aristotel și ale succesorilor săi din Orient. Pe de o parte, o atenție deosebită atrage mecanica, iar pe de altă parte — unele proprietăți ale fenomenelor termice, optice și de altă natură.

Unul dintre pionierii acestui curent este filozoful și învățatul englez Robert Grossetest (adică, cu capul mare) sau Robert din Lincoln, numit astfel după orașul în care fusese episcop (aproximativ 1175—1253). Robert își capătă educația la Oxford și poate la Paris, iar apoi este rector și prim cancelar al Universității din Oxford. Un alt lider și mai vestit al acestui curent este Roger Bacon (aproximativ 1214—1294), elev al lui Grossetest, educat la Oxford și Paris și profesor la ambele universități. Ambii învățați au o erudiție extrem de bogată, inspirată îndeosebi din operele autorilor greci și arabi, și cunosc în profunzime opera lui Aristotel. Activitatea lui Grossetest și Bacon îmbrățișează întregul ansamblu al cunoștințelor. Ei scriu despre astronomie, optică (pe atunci cea mai importantă ramură din domeniul fizicii) și despre calendar, subliniind necesitatea reformei acestuia — ceea ce de altfel s-a efectuat cu mult mai tîrziu. *Opera principală (Opus majus)* a lui Bacon (1266—1267), împreună cu cele două anexe ale ei, este o adevărată enciclopedie a științelor din secolul al XIII-lea cuprinzînd și geografia, alchimia ș.a.

Concepția lui Grossetest și Bacon despre lume este limitată, fiindcă ei subordonează filozofia dogmelor religiei; ei introduc totuși cu îndrăzneală un spirit nou de cercetare mai liberă, o atitudine mai critică față de autoritățile recunoscute ale filozofiei naturii. Către sfîrșitul vieții, Bacon a plătit cu ani grei de închisoare toate acestea, ca și îndrăzneala de a fi demascat moravurile putrede ale preoțimii și ale înaltei nobilimi. Grossetest și cu o vigoare și mai mare Bacon au luptat pentru acea idee nouă în timpurile lor, conform căreia cunoașterea lumii fizice trebuie să se bazeze pe observație și experiență, și nu pe texte aprobate de biserică. În sfîrșit, ambii gînditori au dat o înaltă apreciere matematicii, ca cel mai important ajutor al fizicii. Anticipînd pe Galilei, Grossetest scrie: „Toate cauzele acțiunilor naturale trebuie să fie redate prin intermediul liniilor, unghiurilor și al figurilor“ [220, p. 293]. În partea a IV-a a *Operei principale*, avînd un titlu caracteristic *Despre folosul matematicii*, Bacon preamărește această știință, numind-o poarta și cheia altor științe. Din lucrările lui Bacon se vede că el cunoscuse *Elementele* și *Optica* lui Euclid, *Optica* și *Almagestul* lui Ptolemeu, o serie de rezultate obținute de Arhimede, Apoloniu, Zenodor ș.a.

Dar lucrările nu se limitează numai la simpla declarație. Lui Bacon îi aparține, de exemplu, regula ce exprimă gradul de intensitate al amestecului a două cantități cu diferite intensități, coincizînd formal cu formula calorimetrică găsită din nou și veri-

ficată experimental în secolul al XVIII-lea de G.W. Richman [221]. Probleme mai complexe de matematică își găsesc aplicație în optică, fiind bazate pe traducerea vestitei lucrări a lui ibn al-Haisam (compară cu p. 272). Aceasta se vede îndeosebi din optica învățatului polonez Witelo care-și face studiile la Paris în jurul anului 1250 și este prieten cu traducătorul Merbecke amintit mai înainte. Atenția față de teoria infinitului și a continuului o atrag problemele atomisticii, căreia i se rezervă un loc atît de important în operele lui Aristotel și pe care se bazează ibn al-Haisam în optica sa. Și în acest domeniu, unul dintre inițiatori în Europa medievală este Grossetest, situat el însuși pe pozițiile atomismului matematic. El pune de exemplu chestiunea comparației diferiților infiniți, de genul sumelor celor mai simple serii divergente [220].

Baza experimentală a fizicii în secolul al XIII-lea este infimă. Ideea lui Bacon despre o știință experimentală — se pare că însuși termenul *scientia experimentalis* îi aparține lui — a putut fi realizată la o scară ceva mai mare abia cu mult mai tîrziu. După secole întregi au fost elaborate bazele aparatului matematic al noii cunoașteri a naturii. Cu toate acestea, încercările timpurii de a matematiza fizica condiționează dezvoltarea unor teorii matematice, ca de exemplu, teoria rapoartelor, teoria continuului, și foarte originala teorie a latitudinii formelor. În toate aceste direcții se obțin rezultate ce merită atenție. În teoria continuului, obține rezultate eminentul gînditor și magistru englez Thomas Bradwardinus (născut aproximativ în 1290, decedat în 1349), care studiază la Oxford, devenind apoi profesor la aceeași universitate, iar spre sfîrșitul vieții ajunge arhiepiscop de Canterbury [222]. Lui Bradwardinus îi aparțin trei opere de matematică și una de mecanică. Cea mai puțin interesantă este *Aritmetica teoretică (Arithmetica speculativa)*, care e o prescurtare a aritmeticii lui Boethius. Mai originală este *Geometria teoretică (Geometria speculativa)* alcătuită din patru capitole, fiecare din ele începînd cu definițiile corespunzătoare. În primul capitol se analizează poligoanele stelate, obținute din poligoane regulate convexe (începînd cu hentagonul), prin prelungirea laturilor lor pînă ce ele se intersectează. Din aceste poligoane stelate de ordinul întîi (începînd cu heptagonul), Bradwardinus formează poligoane stelate de ordinul doi etc., mărind de fiecare dată numărul de vîrfuri cu două. Suma unghiurilor primului poligon stelat de orice ordin este egală cu două unghiuri drepte și crește cu cîte două unghiuri drepte o dată cu apariția fiecărui vîrf nou în plus. Studiul poligoa-

nelor stelate este un aport independent și personal al lui Bradwardinus în știință. Suma unghiurilor pentagonului stelat fusese găsită mai înainte de Giovani Campano.

În al doilea capitol, Bradwardinus se ocupă de proprietățile izoperimetrice ale poligoanelor, ale cercului și sferei, urmînd o traducere anonimă latinească a unei lucrări arabe, bazată pe lucrarea lui Zenodor. Cap. III este consacrat teoriei proporțiilor. Aici se vorbește despre iraționalitatea lui $\sqrt{2}$, ca un raport între diagonala pătratului și latura lui; se amintește *Măsurarea cercului* a lui Arhimede ca o operă în care abundă locuri grele și complicate; din această lucrare el prezintă teoremele privind egalitatea cercului cu un triunghi dreptunghic avînd laturile egale cu o semicircumferință și un semidiametru, precum și aproximarea $\pi \approx \frac{22}{7}$. În cap. IV se vorbește despre existența a numai cinci poliedre regulate și se analizează, cu referire la Averoes chestiunea umplerii spațiului cu diferite corpuri regulate congruente (Averoes arătase că o asemenea umplere este posibilă nu numai cu ajutorul cuburilor, ci și cu ajutorul tetraedrelor); unele propoziții privind cercurile de pe sferă se înrudesc cu cele ale lui Teodosiu.

În cap. II, un loc important din *Geometria teoretică* îl ocupă analiza problemei unghiului de tangență. Pentru Bradwardinus, la fel ca și pentru Campano, unghiul de tangență este o mărime aflată într-un raport oarecare, irațional, față de unghiurile rectilinii, dar caracterul acestui raport este diferit de raportul irațional dintre diagonala și latura pătratului.

Geometria teoretică a lui Bradwardinus este foarte apreciată de matematicienii din secolele al XIV-lea — al XV-lea. Ea apare tipărită după aproape un secol și jumătate de la moartea lui, în anul 1495, și e reeditată în scurt timp încă de două ori. Manualul de aritmetică al lui Bradwardinus se tipărește de 12 ori începînd cu anii 1495—1496.

În *Tratatul despre proporții sau despre proporțiile vitezelor în timpul mișcării (Tractatus proportionum seu de proportionibus velocitatum in motibus)* din 1328, cel mai mare interes îl prezintă încercarea lui Bradwardinus de a exprima matematic dependența dintre viteza v, forța F care produce mișcarea și rezistența R [223]. Învățatul englez critică principiul peripateticilor, conform căruia, vorbind în limbaj modern, viteza este proporțională cu raportul dintre forța care produce mișcarea și rezistența. Vom lăsa de o parte argumentele ingenioase care anticipează argumentația de

mai tîrziu a lui Galilei, precum şi faptul că însăşi noţiunea de viteză şi de forţă rămîne foarte neclară. Esenţial este că Bradwardinus ajunge la o nouă lege a mişcării, interpretînd în felul său textul lui Aristotel. După Aristotel, prin dublarea, triplarea etc. a raportului $\frac{F}{R}$ se va dubla, tripla etc. în mod respectiv şi viteza v. Bradwardinus consideră că aici e vorba despre formarea unui raport compus — dublu, triplu etc. — cu alte cuvinte, că $\frac{F}{R} = n$". Legat de analiza fenomenului mecanic se expune în amănunt teoria rapoartelor compuse, în cadrul căruia Bradwardinus se apropie de ideea exponenţilor fracţionari. În timp ce în vechea teorie a rapoartelor se opera cu rapoarte duble, triple şi alte rapoarte întregi, corespunzătoare cu ridicarea la pătrat, la cub etc., Bradwardinus introduce raportul „înjumătăţit", corespunzător lui $\sqrt{a} : \sqrt{b}$. El nu ştia că în această privinţă avusese un precursor îndepărtat în persoana lui Arhimede, care vorbise despre raportul de „o dată şi jumătate" de forma $\sqrt{a^3} : \sqrt{b^3}$. Sub influenţa lui Bradwardinus, teoria rapoartelor fracţionare capătă curînd o mare dezvoltare la N. Oresme.

Tratatul despre continuu (Tractatus de continuo), scris între anii 1328 şi 1335, este consacrat teoriei despre continuum şi despre discret, aflîndu-se la limita dintre fizică, matematică şi filozofie [224]. Învăţaţii europeni cunosc prin lucrările lui Aristotel şi ale filozofilor arabi diferitele puncte de vedere asupra structurii continuului. Bradwardinus enumeră cinci concepţii răspîndite înainte şi pe timpul său.

„Unii, — scrie el — ca Aristotel, Averoes şi majoritatea celor de astăzi, afirmă că continuul nu este alcătuit din atomi, ci din părţi divizibile fără sfîrşit. Alţii spun însă că el este compus din părţi indivizibile, dar în două feluri, fiindcă Democrit presupune continuul alcătuit din corpuri indivizibile, iar alţii — din puncte. Şi aceştia din urmă se împart în două, fiindcă Pitagora, capul acestui curent, Platon şi contemporanul nostru Walter presupun continuul alcătuit dintr-un număr finit de indivizibili, iar alţii — dintr-un număr infinit. Şi aceştia din urmă se împart în două, fiindcă unii, de felul contemporanului nostru Henry, afirmă că continuul este alcătuit dintr-un număr infinit de indivizibili, legaţi nemijlocit unii de alţii, iar alţii ca Robert de Lincoln — dintr-un număr infinit al lor, legaţi între ei prin intermediul cuiva" [224, pp. 402—403].

Contemporanii amintiţi de Bradwardinus sînt englezii Walter Ketton (decedat în 1342), învăţatul de la Oxford — Henry Harkley (decedat în 1317) şi Robert Grossetest. Roger Bacon se ocupă şi el de aceste probleme, fiind de partea peripateticilor. Împotriva părerii că continuul este alcătuit din părţi indivizibile, el emite, urmîndu-i pe cei antici, următorul considerent. Dacă planul este alcătuit din puncte, atunci diagonala pătratului este egală cu latura lui, fiindcă ambele sînt alcătuite dintr-un număr egal de puncte. Dar diagonala nu este egală cu latura, şi deci planul nu este format din puncte.

Bradwardinus susţine şi el concepţia lui Aristotel. Argumentaţia lui este amănunţită şi în multe privinţe originală. Cartea începe cu o serie de definiţii, după care urmează presupuneri şi concluzii, demonstrate ca nişte teoreme. Continuul este o cantitate ale cărei părţi sînt legate reciproc între ele. Separat se defineşte continuul existent şi felurile lui — corpul (ca un continuu existent şi avînd lungime, lăţime şi adîncime), suprafaţa şi linia. Timpul este un continuu consecutiv care măsoară succesiunea. Se prezintă definiţia punctului ca un indivizibil avînd o poziţie, precum şi definiţia momentului. Mişcarea este trecerea continuului spaţial într-unul de timp. Se face diferenţierea între felurile de infiniţi: categorematic şi sincategorematic. Dacă facem abstracţie de unele nuanţe ale gîndirii, atunci primul din ele este infinitul inaccesibil, actual, transfinit, iar al doilea este un infinit potenţial, provenit dintr-o mărime finită printr-o creştere nesfîrşită, similar cu felul cum cresc numerele naturale consecutive.

Bradwardinus îşi formulează poziţia prin cuvintele: „Afirmaţia care presupune că continuul este alcătuit dintr-un număr finit de indivizibile este contrară tuturor ştiinţelor, le combate pe toate şi de aceea ele toate o resping în unanimitate" [224, p. 411]. Din mulţimea de argumente împotriva concepţiei atomistico-finite, vom arăta unul dintre ele, avînd caracter experimental. Dacă ne vom imagina că numărul punctelor de pe diametrul unei circumferinţe este finit, de exemplu 10, atunci tot atîtea puncte vor exista şi pe semicircumferinţă, ceea ce este clar dacă ridicăm cîte o perpendiculară din fiecare punct al diametrului. Se obţine astfel că lungimea circumferinţei este de două ori mai mare decît diametrul. Pentru a contrazice aceasta, Bradwardinus emite argumente teoretice, dar nu se limitează la aceasta şi se referă la dulgheri, zidari şi tot felul de alţi meşteri, a căror experienţă arată falsitatea unei asemenea concluzii.

Criticînd concepția atomisto-infinită, Bradwardinus se străduiește să arate că din ea decurg consecințe contradictorii. El construiește exemple în care se stabilește o corespondență biunivocă între elementele unor mulțimi infinite. Astfel, de exemplu, el ia totalitatea punctelor a două segmente diferite *c* și *f*, $c > f$ care sînt parcurse (cu viteze diferite) în același timp *h*. Atunci fiecărui moment îi va corespunde cîte un punct de pe fiecare segment și prin urmare fiecare segment conține același număr de puncte. Dacă însă segmentul *c* va fi parcurs în același timp *h*, iar *f* — într-un interval de timp mai mare *k*, se va obține că în *f* sînt mai multe puncte decît în *c*. În mod identic se poate demonstra că în *f* sînt mai puține puncte decît în *c*.

Analizînd acest paradox și altele similare, Bradwardinus se apropie de formularea unor probleme de teoria mulțimilor. În alte cazuri, găsim la el o anticipare a ideilor metodei indivizibilelor a lui B. Cavalieri (1635) și ale argumentelor adversarilor acestei metode. Așa de exemplu, după părerea lui Bradwardinus, din teoria criticată de el decurge următorul paradox: o arie finită poate depăși în orice raport finit o altă arie echivalentă cu ea. Într-adevăr, se știe că paralelogramul este echivalent ca mărime cu un dreptunghi de aceeași înălțime și bază. În paralelogramul *cgke* (fig. 108) să ducem din toate punctele bazei *ce* „toate dreptele" spre punctele bazei opuse *gk*, paralel cu *cg*. Numărul acestor drepte va fi același cu numărul perpendicularelor corespunzătoare din dreptunghiul *c a f e*, iar ca lungime ele vor întrece aceste perpendiculare într-un raport egal cu *cg*: *ca*. Dacă

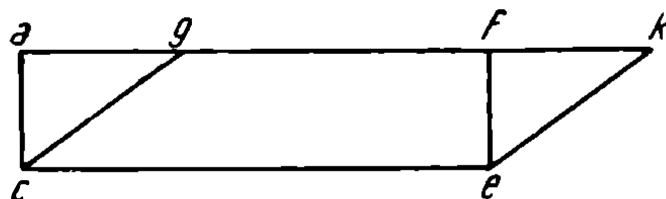


Fig. 108

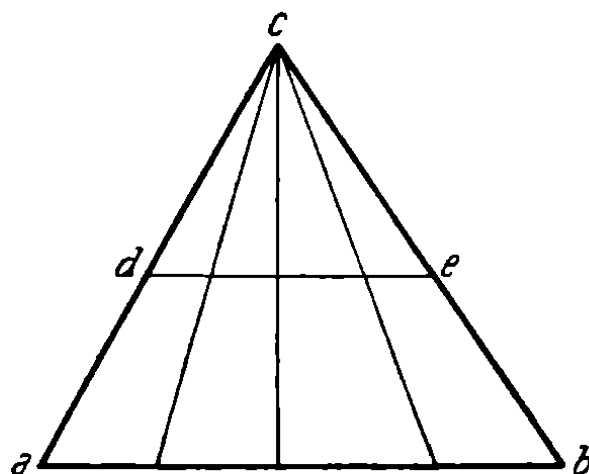


Fig. 109

suprafața este alcătuită din linii, atunci se obține că paralelogramul este mai mare de *cg* : *ca* ori decît dreptunghiul egal cu el.

În mod analog se poate arăta că triunghiul *d e c* a cărui bază împarte în două laturile unui triunghi echilateral *a b c*, egal deci ca arie cu un sfert din ultimul, are în același timp aria egală și cu jumătatea acestuia, fiindcă (fig. 109) fiecare linie

din *d e c* este egală cu jumătate din linia ce-i corespunde în *a b c*.

Raționamentele lui Bradwardinus cu privire la continuu și infinit nu erau îndreptate spre crearea unor algoritmi de rezolvare a unor anumite probleme de geometrie și fizică. El, la fel ca și alți scolaști care lucrau în aceeași direcție, avusese ca scop să elucideze cu ajutorul matematicii unele proprietăți calitative foarte generale ale noțiunilor de spațiu, timp și mișcare, fără să iasă dincolo de limitele filozofiei aristotelice. Deși prin aceasta nu se obțin rezultate matematice concrete, totuși discuțiile cu privire la natura continuului au influențat elaborarea calculului infiniților mici în secolul al XVII-lea.

Nicole Oresme și teoria rapoartelor fracționare. Ca și în Anglia, și în Franța se ridică în secolul al XIV-lea un matematician eminent care întrece cu mult pe toți contemporanii săi. Acesta este magistrul Nicole Oresme (aproximativ 1323—1382), profesor la un colegiu parizian între anii 1348 și 1361, și care locuiește apoi îndeosebi la Rouen. Din anul 1377 devine episcop la Lisieux. Oresme este o personalitate strălucită, în care își găsesc ecou problemele de actualitate ale epocii sale. El este unul dintre inițiatorii literaturii științifice în limba franceză și face o serie de traduceri din operele lui Aristotel; el scrie în franțuzește lucrarea *Tratat despre sferă (Traité de la sphère)*, îmbogățind totodată considerabil terminologia științifică franceză. El ia atitudine împotriva abuzurilor bisericii, împotriva astrologiei și a ghicitului, deși el însuși mai crede în magie. Într-o lucrare specială despre bani, el condamnă sistemul de deteriorare a monedelor, practicat de autorități, care duce la scăderea nivelului de trai și provoacă o serie de dificultăți economice. Să mai amintim în treacăt că și Copernic fusese autorul unui tratat politico-economic despre bani. O serie de lucrări ale lui Oresme se referă la astronomie și mecanică.

Pentru noi, cea mai interesantă este în primul rînd elaborarea teoriei rapoartelor, căreia el îi consacră două opere. *Tratatul despre proporții (Tractatus proportionum)*, scris în jurul anului 1350, nu conține încă idei noi; aceasta este o carte obișnuită, tipărită aproximativ în anul 1500, și retipărită la Veneția mai

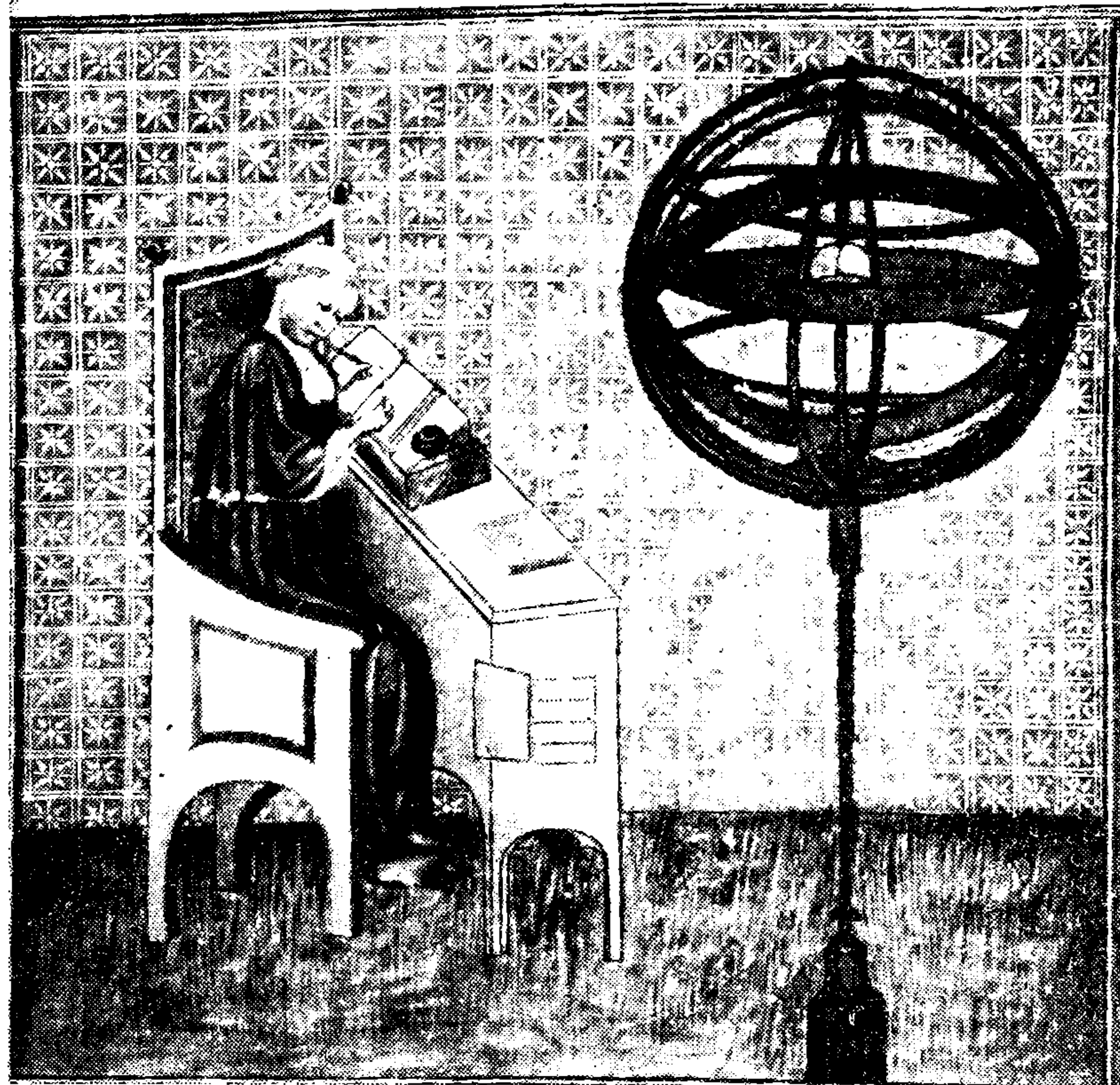


Fig. 110. N. Oresme în timpul lucrului. În dreapta lui se află sfera armilară (din traducerea franceză a operei *Despre bolta cerească* a lui Aristotel, efectuată de Oresme. Manuscris din secolul al XIV-lea).

tîrziu, în 1505. În schimb, de o importanță remarcabilă este opera *Algorismul proporțiilor (Algorismus proportionum)* [225] (fig. 111). În prima parte a acestei lucrări, Oresme introduce pe lîngă rapoarte duble, triple și în general multiple de n, rapoarte de un sfert, de o dată și jumătate și altele fracționare-raționale, corespunzătoare celor ale noastre, de felul $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{4}}$, $a^{1\frac{1}{2}}$ etc. Plecînd de la faptul că $8 = \sqrt{64}$, $4 = \sqrt[3]{64}$, el conchide că 8 stă într-un raport de o dată și jumătate față de 4, adică în

transcrierea noastră $8 = 4^{\frac{3}{2}}$, scriindu-l sub forma $\boxed{\frac{p \cdot 1}{1 \cdot 2}}\,4$ (p — fiind prima literă a cuvîntului *proportio*). Oresme numește rapoartele fracționare — iraționale, termen folosit înainte încă de Campano

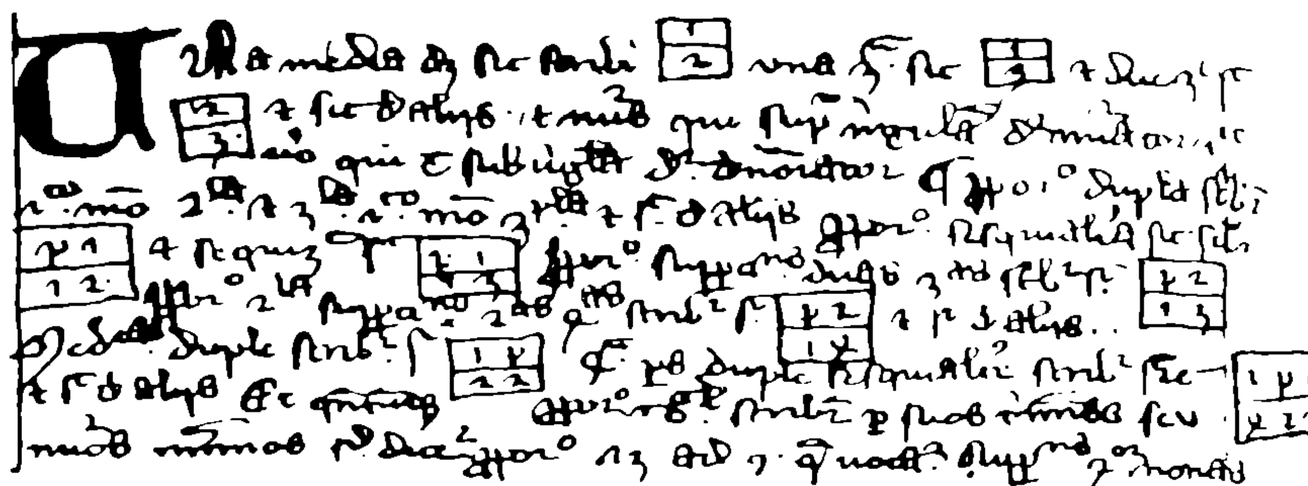


Fig. 111. O parte din prima pagină a *Algorismului proporțiilor* de N. Oresme (manuscris din secolul al XIV-lea).

și Bradwardinus. Mai departe, Oresme formulează în cuvinte numeroase reguli pentru operațiile cu rapoarte fracționare, de felul:

$$a^{\frac{n}{m}} = (a^n)^{\frac{1}{m}}, \quad a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}, \quad \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}},$$

$$a^{\frac{1}{m}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a^n b^m)^{\frac{1}{mn}}, \quad \frac{a^{\frac{1}{m}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a^n}{b^m}\right)^{\frac{1}{mn}}, \quad (a^m)^{\frac{p}{q}} = (a^{mp})^{\frac{1}{q}} = a^{\left(\frac{mp}{n}\right)\left(\frac{1}{\frac{q}{n}}\right)}$$

etc. În cap. II și III din *Algorismul proporțiilor* se dau exemple de folosirea lui în probleme de aritmetică, teoria muzicii, geometrie. Oresme se apropie și de noțiunea de exponent irațional, ca un raport a cărui „reprezentare" este „inexprimabilă" sau „incognoscibilă". Asemenea rapoarte, scrie Oresme, se pot înscrie între rapoarte întregi sau fracționare „suficient de apropiate" [II, p. 429]. Problema măsurării aritmetice a oricăror „rapoarte" a fost practic rezolvată de-abia peste 250 de ani, prin teoria logaritmilor.

Crearea unui algoritm formal al rapoartelor fracționare, adică în fond generalizarea operației de ridicare la putere în cazul

exponenților fracționari pozitivi, este o realizare importantă a algebrei medievale. Deși această operă a lui Oresme se tipărește de abia în secolul al XIX-lea, ea fusese cunoscută și în evul mediu. În particular, conținutul ei este inclus parțial în *Cartea rapoartelor (Liber proportionum)* a lui Hieronimus de Angest (decedat în 1538), tipărită la Paris în 1508, precum și în *Cartea despre mișcarea triplă... (Liber de triplici motu...)* a portughezului Alvarez Thomas, publicată de asemenea la Paris cu un an mai tîrziu. Continuatorul elaborării algoritmului lui Oresme a fost N. Chuquet.

Teoria latitudinii formelor. O altă operă matematică a lui Oresme este consacrată unui curent remarcabil al matematicii medievale, care apare sub diferite denumiri, precum: teoria configurației calității sau a latitudinii formelor, sau a uniformității și a neuniformității intensităților etc. Această teorie conține prototipurile ideilor privind relația funcțională și reprezentarea ei grafică, cristalizarea noțiunilor și metodelor respective producîndu-se abia în secolul al XVII-lea.

Originile acestui curent format la Oxford și Paris sînt legate de disputele cu privire la noțiunea logico-filozofică a „formei" și a variațiilor ei, și țin încă de Aristotel. Filozoful nominalist scoțian Duns Scott (aproximativ 1265—1308), numit de Marx „primul reprezentant al materialismului în evul mediu", înțelege prin formă un fel de calitate perceptibilă prin simțuri a lucrurilor, existente înaintea noțiunilor generale. Luînd atitudine împotriva așa-numiților realiști, urmași ai lui Toma d'Aquino, el apără multitudinea formelor, variabilitatea lor, deosebind totodată intensitatea sau întărirea *(intensio)* formei de remisia sau slăbirea *(remissio)* ei.

Pe plan matematic și al filozofiei naturii, noua teorie se dezvoltă destul de mult în *Cartea calculelor (Liber calculationum)* a lui Richard Swineshead sau Swisset, un absolvent al Universității din Oxford (al doilea sfert al secolului al XIV-lea) [16]. Intensitatea formei se manifestă ca o intensitate variabilă a calității, de exemplu ca un grad oarecare de căldură sau frig, de rarefiere sau densitate, ca viteză a mișcării mecanice etc. Folosind raționamente de multe ori neclare, Swineshead analizează exemple de variație a intensităților. Această analiză poartă un caracter pur abstract și nici premisele inițiale și nici rezultatele nu se leagă de măsurători cantitative reale, de date experimentale sau rezultate din observații. Așa, de exemplu, Swineshead spune

că dacă intensitatea crește uniform, intensitatea medie într-un interval oarecare este media aritmetică dintre intensitatea inițială și cea finală. Acest rezultat este echivalent cu formula integrală:

$$\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} v\,d\,v = \frac{t_2 + t_1}{2}$$

și în mecanică îi corespunde calculul drumului parcurs în mișcare uniform accelerată. Într-un alt caz, intensitatea medie se găsește dintr-o condiție mai complexă: intensitățile de pe porțiunile consecutive ale unui interval, divizat într-o progresie geometrică de $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3} \ldots$, cresc în progresia aritmetică 1, 2, 3, ... Atunci, după Swineshead, intensitatea medie este egală cu intensitatea de pe al doilea din aceste intervale fracționare. Acest rezultat îl putem exprima prin suma seriei infinite

$$\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2^2}\cdot 2 + \frac{1}{2^3}\cdot 3 + \ldots = 2,$$

care apare pentru prima oară în literatura scolastică; grecii cunoscuseră doar progresia geometrică infinit descrescătoare. Vorbind despre variația calității, Swineshead folosește uneori termenul „fluxul *(Fluxus)* calității"; acest cuvînt — flux — și formele lui modificate intrară ulterior în literatura de geometrie și în calculul infiniților mici din secolele al XVI-lea — al XVII-lea și îndeosebi în „metoda fluxurilor" a lui Newton (compară cu termenul modern de „coordonate curente"). Lucrarea lui Swineshead se publică de trei ori: la Padua în jurul anului 1477, la Pavia în 1498 și la Veneția în 1520. Numele lui Swineshead este bine cunoscut chiar și în secolul al XVII-lea. În două scrisori din anii 1670 și 1696, Leibniz îl apreciază ca pe unul dintre primii învățați care aplicaseră matematica în fizică și care introduseseră matematica în filozofia scolastică.

Teoria intensității formelor capătă o nouă dezvoltare la Oresme. Vasta lui lucrare privind acest domeniu, scrisă pînă la 1371, s-a păstrat în numeroase copii sub diferite titluri: *Despre configurația calităților (De configuratione quantitatum)*, *Despre uniformitatea și neuniformitatea intensităților (De uniformitate et difformitate intensionum)*, *Tratat despre structura forțelor și a măsurii neuniformităților (Tractatus de figuratione potentiarum et mensura difformitatum)* și altele [226, 227].

Oresme face ca această teorie să fie mai simplă și mai intuitivă decît la Swineshead, folosind în mod sistematic imagini geometrice pentru mărimi și corelațiile dintre ele. Încă din primul capitol al părții I a tratatului, Oresme subliniază importanța reprezentărilor geometrice. Orice obiect măsurabil, spune el, afară de numere, se imaginează ca o mărime continuă și de aceea pentru măsurare sînt necesare puncte, linii și suprafețe, în care, după Aristotel, se dezvăluie la origine măsura și raportul; la celelalte obiecte, măsura sau raportul se află raportînd mintal aceste obiecte la puncte, linii și suprafețe. Intensitățile calităților mărimilor continue măsurabile sînt, în funcție de extensiile lor, un fel de întinderi (de la *extensio* — întindere), ca de exemplu viteza mișcării unui corp și drumul parcurs sau timpul de mișcare (partea a III-a, cap. VI). Și deoarece printre diferitele feluri de continuuri, noi sesizăm cel mai ușor și mai simplu mărimi și rapoarte între linii (segmente de drepte), de aceea intensitățile trebuie reprezentate prin linii, aplicate în punctele dreptei ce caracterizează extensitățile. Primele segmente Oresme le numește latitudini *(latitudo)* ale calităților sau ale formelor, iar segmentele la capetele cărora se aplică latitudinile — longitudini *(longitudo)*. Măsura calității el o numește uneori grad (*gradus* — treaptă, măsură); „nongradul" corespunde lui zero. Lungimile latitudinilor sînt proporționale cu intensitățile; ele se pot duce în orice direcție, dar de preferință — perpendicular pe liniile longitudinilor. În acest fel, dependența între intensitate și extensitate se reprezintă printr-o figură oarecare plană, limitată sus de o curbă, numită de Oresme „linia marginii superioare" sau „linia intensității". O asemenea analiză ajută desigur la măsurare și la înțelegerea ei.

Vorbind despre mărimea calității, Oresme subliniază folosul reprezentării geometrice: unii oameni înțeleg greu, de exemplu, ce este o calitate uniform-neuniformă, dar nu e nimic mai simplu decît faptul intuitiv că înălțimile unui triunghi dreptunghic sînt uniform-neuniforme (partea I, cap. IV).

La început, Oresme vorbește despre calități ale căror intensități sînt repartizate în punctele unei linii — continuul unidimensional, fiind așa-numitele „calități liniare". Dar mai există și calități „plane" și „de volum", repartizate în punctele unor continuuri bidimensionale sau tridimensionale. Calitățile plane se reprezintă prin corpuri cu baze plane. Problema reprezentării calităților de volum prezintă, bineînțeles, o dificultate

extremă pentru Oresme și textul lui, în care se poate întrezări o oarecare idee despre spațiul cu patru dimensiuni este neclar [228].

Vom analiza aici doar teoria calităților liniare și, în primul rînd, clasificarea lor. Oresme separă trei tipuri fundamentale de calități:

1. Uniforme, cu intensitate sau latitudine constantă; dependența dintre intensitate și extensitate se reprezintă printr-un dreptunghi, adică linia intensității este un segment de dreaptă, paralel cu linia longitudinilor.

2. Uniform-neuniforme, la care diferențele dintre latitudinile oricăror perechi de puncte sînt proporționale cu diferențele respective dintre longitudini; funcția dintre intensitate și extensitate se reprezintă printr-un triunghi dreptunghic sau un patrulater cu latura superioară înclinată, după cum linia intensității intersectează sau nu dreapta longitudinilor, adică, după cum spune Oresme, calitatea se termină pe un „nongrad" sau pe un grad (partea I, cap. XI).

3. Neuniform-neuniforme sînt toate celelalte. Oresme le caracterizează într-un mod general pur negativ, ca niște calități la care rapoartele între diferențele de latitudini ale perechilor de puncte nu sînt egale cu rapoartele între diferențele longitudinilor respective. Calitățile neuniform-neuniforme se împart în două grupe:

3 a. Simple neuniform-neuniforme, cînd linia intensității este unică și nu este formată din cîteva părți. Linia intensității poate fi „rațională" — un arc de cerc sau de elipsă —, „irațională" un arc de altă curbă oarecare — , și afară de aceasta, ea poate fi concavă sau convexă. Oresme distinge în total patru genuri de neuniformitate-neuniformă simplă (partea I, cap. XIV-XV). Cuvîntul propriu-zis de elipsă el nu-l folosește, ci vorbește despre curba ale cărei înălțimi sînt proporționale cu înălțimile arcului de cerc. Este neclar de ce Oresme separă elipsele împreună cu cercurile într-o grupă „rațională" aparte.

3 b. Compuse neuniform-neuniforme, obținute prin combinarea celor șase precedente — cîte două, trei, patru, cinci și șase: asemenea combinări vor fi în număr de $6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1$, deci, în total 63 (partea I, cap. XVI). Aici, apar la Oresme și funcțiile discontinue, sub forma unor linii frînte în trepte, pe care el le numește neuniformități în trepte *(difformitas*

gradualis), precum şi linii de intensitate formate din două segmente de arce de cerc sau de elipsă etc. (fig. 112).

Reprezentările grafice ale calităţilor servesc nu numai pentru prezentarea intuitivă a funcţiilor, ci şi pentru cercetarea proprietăţilor lor. În partea a II-a a tratatului, Oresme analizează separat diferitele cazuri posibile de mişcare sau de flux *(fluxus)*. Din punctul de vedere al istoriei mecanicii este esenţială aici

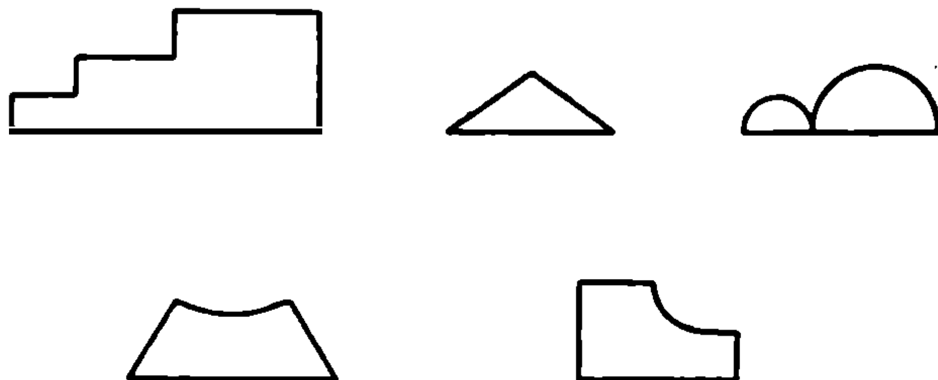


Fig. 112. Cîteva feluri de neuniformităţi-neuniforme compuse (N. Oresme).

introducerea noţiunii de acceleraţie *(velocitatio)*, ca intensitate a vitezei, iar acceleraţia propriu-zisă poate fi atît uniformă, adică constantă, cît şi în mod diferit neuniformă (partea a II-a, cap. V).

În cap. VII din partea a II-a, Oresme studiază mişcarea din punct de vedere geometric, în cazul vitezei uniform-neuniforme, adică al acceleraţiei uniforme, şi demonstrează echivalenţa unei asemenea mişcări cu mişcarea uniformă cu viteză medie, adică, teorema conform căreia viteza medie în mişcarea uniform accelerată este egală cu media aritmetică a vitezei iniţiale şi finale. Pentru aceasta el demonstrează egalitatea ariilor triunghiului dreptunghic *a b c* sau a patrulaterului *a b d c* cu aria dreptunghiului *b g f*, a cărui înălţime este egală cu jumătate din înălţimea triunghiului sau cu semisuma laturilor verticale ale patrulaterului. Primele două figuri servesc drept reprezentări ale mişcării uniform accelerate cu viteza finală egală cu zero, respectiv diferită de zero, iar dreptunghiul serveşte drept reprezentare a mişcării uniforme cu o viteză egală cu viteza mişcării precedente în momentul mediu al timpului (fig. 113). Oresme nu defineşte viteza medie sau, cum se exprimă el, viteza totală *(velocitas totalis)* şi nu spune direct că ariile figurilor considerate exprimă drumul parcurs, dar o asemenea interpretare rezultă.

evident din raționamentele lui și chiar se află la baza lor. Pentru a exprima mai clar proporționalitatea dintre drumul parcurs și aria figurii ale cărei ordonate exprimă vitezele instantanee, i-ar fi

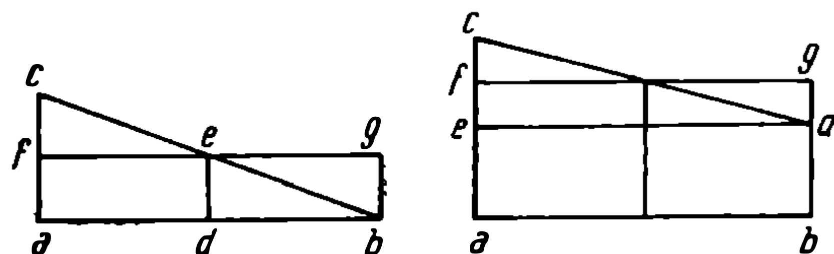


Fig. 113.

fost necesară o teorie dezvoltată a infiniților mici. Odată cu aceasta, nu se poate trece cu vederea similitudinea pregnantă între deducția lui Oresme și demonstrarea mai amănunțită a aceleiași teoreme făcută de Galileo Galilei cu 250 de ani mai tîrziu (1638).

În partea a III-a a tratatului sînt elaborate exemple de mișcare, unde viteza variază în salturi de la interval la interval. Afară de seria pe care am mai văzut-o la Swineshead. există și altele, ca de exemplu sumarea seriei

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{1}{8}+\frac{3}{32}\ldots=\frac{7}{4}.$$

Oresme însuși spune că mișcarea pe prima porțiune a intervalului $\left(\frac{1}{2}\right)$ se desfășoară uniform (adică, cu viteză constantă) într-un grad oarecare, pe a doua $\left(\frac{1}{4}\right)$, începînd cu acest grad, atinge uniform-neuniform (adică, uniform accelerat) un grad de două ori mai mare, pe porțiunea următoare $\left(\frac{1}{8}\right)$ este din nou uniformă, pe porțiunea a patra $\left(\frac{1}{16}\right)$ atinge uniform-neuniform un grad de două ori mai mare decît acela de la începutul acestui segment etc. (partea a III-a, cap. IX).

Tratatul lui Oresme nu a fost tipărit, dar a căpătat o mare răspîndire prin copii manuscrise. În unele universități, încă de la sfîrșitul secolului al XIV-lea se introduce predarea teoriei latitudinii formelor. Această teorie o răspîndește și o comentează în Italia, Biagio Pelacani din Parma (decedat în 1416); tot aici se tipărește de trei ori expunerea teoriei lui Oresme sub titlul

Tratat despre latitudinile formelor (Tractatus de latitudinibus formarum) la Padua în 1482 şi 1486, iar la Veneţia în 1505; în 1515 mai apare o ediţie la Viena [229]. În acest tratat găsim o observaţie interesantă despre comportarea unei mărimi în vecinătate cu cea mai mare valoare a ei. Autorul, probabil unul dintre elevii sau urmaşii lui Oresme, afirmă că în orice figură asemănătoare semicercului, intensitatea se termină „la cel mai înalt grad de încetinire" *(tarditas)*, iar remisia începe de la cel mai înalt grad de încetinire în punctul mediu, unde se termină intensitatea. Nu se arată totuşi că acest „grad cel mai înalt de încetinire" este, în terminologia lui Oresme, un „nongrad", adică zero. Observaţii analoge le face din nou J. Kepler în 1615 (de ambele părţi ale maximumului mărimea are la început o micşorare insensibilă), iar curînd după aceea, P. Fermat formulează condiţia necesară de extremum al unei curbe netede. Legat de aceasta, merită să amintim că Oresme în opera sa (partea I, cap. XX—XXI) se apropiase de problema aprecierii cantitative a curburii liniilor şi remarcase în particular că intensitatea curburii circumferinţei este invers proporţională cu raza; dar în general, raţionamentele lui în această chestiune sînt departe de a fi clare.

Cîteva serii noi sînt sumate în opera amintită a lui A. Thomas, asupra căruia se manifestă influenţa lui Oresme şi în această direcţie. La el găsim exemplele:

$$1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{4} + \frac{1}{2^2}\cdot\frac{11}{8} + \frac{1}{2^3}\cdot\frac{19}{16} + \cdots = \frac{5}{2},$$

$$1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3} + \frac{1}{2^2}\cdot\frac{7}{6} + \frac{1}{2^3}\cdot\frac{13}{12} + \cdots = \frac{20}{9}$$

şi chiar seria:

$$1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1} + \frac{1}{2^2}\cdot\frac{3}{2} + \frac{1}{2^3}\cdot\frac{4}{3} + \cdots,$$

despre care se spune că suma ei este cuprinsă între 2 şi 4. Bineînţeles că Thomas nu putea să ştie că această sumă este egală exact cu $2 + \ln 2$* 230.

Teoria despre latitudinile formelor conţine o serie de chestiuni care capătă dezvoltare în matematica mărimilor variabile în

* Acest lucru este uşor de văzut luînd $x = \frac{1}{2}$ în dezvoltarea lui $\ln(1 - x)$ în serie de puteri — *N.A.*

secolul al XVII-lea și următoarele. Oresme se află la porțile geometriei analitice a lui Descartes și Fermat, ale dinamicii lui Galilei și ale geometriei indivizibililor lui Cavalieri. În centrul teoriei lui Oresme se află noțiunea latitudinii variabile a formei și a reprezentării ei grafice. Cele mai remarcabile minți ale științei scolastice ajung la această noțiune în urma încercărilor de a interpreta de pe poziții noi problemele filozofiei naturii antice și contemporane lor. Dacă am transpune în limbaj modern vederile lui Oresme, atunci de felul lui de a trata dependența dintre latitudini și longitudini cel mai mult s-ar apropia, probabil, noțiunile noastre despre funcția de punct al continuului uni-, bi- și tridimensional. Procedeul lui Oresme de a-și da funcția este numai verbal și grafic, fiindcă dezvoltarea insuficientă a algebrei nu-i permite să se folosească de formulele devenite mai tîrziu, în secolele al XVII-lea — al XVIII-lea, principalul procedeu de scriere a funcțiilor. Astfel, deși prezentarea grafică a funcțiilor are pentru Oresme o importanță hotărîtoare, despre ecuația liniei intensității la el nu poate fi nici vorbă, și mai mult chiar, nici vorbă nu poate fi despre coordonatele punctelor. Oresme a dat și o clasificare originală a funcțiilor [1].

După Oresme, teoria latitudinii formelor nu a mai fost îmbogățită prin alte idei și a înghețat în acea formă pe care o căpătase la mijlocul secolului al XIV-lea. Încercările inițiatorilor ei de-a lega matematica de științele naturii nu ies din cadrul unor raționamente generale, abstracte și stabilind, de pildă, echivalența mișcării uniform accelerate cu mișcarea uniformă cu viteză medie, ei nu folosesc acest rezultat în problema fundamentală a mișcării unui corp aruncat. Teoria lui Oresme conținuse cîteva idei profunde, dar aparatul matematic propriu-zis pentru rezolvarea unor probleme concrete era sărăcăcios. Mai mult decît atît, acest aparat funcționa în gol în analiza unor exemple ingenioase, dar artificiale. Dintre „forme“ fuseseră analizate doar cele limitate de segmente de drepte și fuseseră amintite ca posibile părți din circumferință și elipsă; despre studiul algebric al curbelor care alcătuiește esența geometriei analitice nu existase nici o intenție oricît de vagă.

Teoria latitudinii formelor este un exemplu de teorie cu posibilități vaste, dar care rămîne pietrificată pe de o parte din cauza

[1] Este interesantă asemănarea neuniformităților neuniforme compuse ale lui Oresme, obținute prin amestecarea *(mixtio)* de arce de același gen, cu „funcțiile mixte“ *(functiones mixtae)* ale lui Euler, care se dau pe diferite porțiuni prin expresii analitice diferite — *N. A.*

lipsei unui contact viu cu științele naturii, iar pe de altă parte datorită dezvoltării insuficiente a unui aparat auxiliar (algebric). Nu se poate nega însă valoarea unor oameni extrem de pătrunzători, care încă în secolul al XIV-lea emit, chiar și într-o formă neclară, scolastică, cîteva din ideile conducătoare ale matematicii mărimilor variabile. Este destul de greu de apreciat influența concretă a acestei teorii asupra matematicii epocii moderne. Această teorie fusese cunoscută și se scrisese despre ea încă la începutul secolului al XVI-lea, și este foarte probabil ca informații despre ea să fi ajuns și pînă la învățații din prima jumătate a secolului al XVII-lea. Izbește apropierea între unele principii ale lui Descartes sau Galilei și cele ale lui Oresme, deși nici primul și nici al doilea nu se referă la Oresme. Nu ne putem îndoi nici asupra faptului că învățatul italian Cavalieri cunoscuse bine literatura medievală și, în particular, disputele cu privire la natura continuului. Totodată însă, stimulentele fundamentale pentru elaborarea matematicii mărimilor variabile în secolul al XVII-lea decurg din cerințele concrete ale dezvoltării impetuoase a științelor naturii și a tehnicii, iar premisa ei principală este studiul aprofundat al clasicilor antichității, și îndeosebi al lui Arhimede și Apoloniu.

Cultura matematică în Europa centrală și de sud. În urma războiului anglo-francez de o sută de ani (1338—1453), a răscoalelor țărănești, a luptei între Anglia și Scoția și a altor evenimente, viața științifică din Anglia și Franța ajunge la decadență și centrul ei începe să se deplaseze din nou spre Europa centrală și de sud. S-au păstrat mărturii cu privire la predarea matematicii în a doua jumătate a secolului al XIV-lea în universitățile din Praga, Viena, Heidelberg și alte orașe. Acolo se predă, de exemplu, un curs despre primele cărți ale *Elementelor* lui Euclid, pentru audierea căruia un student trebuia să plătească 8 groși (grosul praghez bătut de Vaclaw al II-lea era o monedă mare de argint, cu o greutate de aproximativ 3,5 *g*). Alte obiecte mai erau: „algorismul numerelor întregi“, „algorismul fracțiilor“, „proporțiile lui Bradwardinus“, „longitudinile fenomenelor“, *Almagestul* etc. Metoda de predare constă în citirea cărților pe care le aveau în mînă atît studenții cît și profesorul, însoțită de explicații verbale ale ultimului. În universități se organizează uneori discuții matematice, permițînd într-o oarecare măsură să se stabilească gradul de asimilare a materiei de către studenți.

O atenție deosebită o merită apariția generală de opere de matematică nu numai în limba latină, ci și în limbile naționale vorbite, scrise pentru negustori, funcționari de finanțe, topometri, maeștri și constructori. Acestea sînt cărți de „aritmetică practică" și de „geometrie practică", conținînd reguli de rezolvare a celor mai uzuale probleme cu descrierea amănunțită a calculelor și cu un mare număr de probleme concrete. Încă Hugo din mănăstirea Sf. Victor de la Paris (decedat în 1141) spunea că orice învățătură geometrică este fie teoretică, adică speculativă, fie practică, adică activă; prima este baza celeilalte, aceasta din urmă fiind folosită de dulgheri, fierari, mecanici etc. O asemenea literatură, la început în manuscrise, iar mai tîrziu tipărită, capătă o înflorire deosebită în secolele al XV-lea — al XVII-lea. Cităm ca exemplu bogata culegere de probleme alcătuită la mijlocul secolului al XV-lea la mănăstirea Sf. Emmeran din Regensburg, care conține — parțial în limba germană, parțial în latină și chiar combinat — aproximativ 350 de probleme cu regula de trei, regula asociației, regula amestecurilor, regula celor două false poziții etc. [231]. În secolul al XVII-lea apar și în Rusia în manuscrise, opere de aritmetică practică avînd și capitole de geometrie [203]. Mai devreme încă în Germania apăruse așa-numita *Geometria din Kulm* — un manual de agrimensură practică, cuprinzînd cinci părți, întocmită de un autor anonim la finele secolului al XIV-lea [232]. Acest autor folosise pe larg lucrarea latină *Practica geometriei (Practica geometriae)*, scrisă la Paris în 1346 de matematicianul și astrologul curții regale, Dominico de Clavasio, italian de origine.

Nu ne vom opri asupra numeroaselor manuscrise italiene din secolul al XIV-lea. Vom remarca doar că în ele se rezolvă și probleme de algebră, necunoscuta fiind numită *cosa*, — o traducere a termenului latinesc *res* — adică obiect; pătratul — *quadrato censo* sau *quadrato* sau *censo*; cubul — *censo cubo* sau *cubo*; mai departe urmează *censo*, *di censo* și *censo di cubo*; termenul liber se numește *numero* — adică număr. Afară de rezolvarea ecuațiilor de gradul al doilea, aici se întîlnesc primele încercări de a rezolva prin radicali ecuații de grad superior, la care se trece deci cu mult înainte de începutul secolului al XVI-lea, cînd o asemenea soluție a fost găsită pentru ecuația de gradul al treilea. Astfel, în opera unui autor anonim, ecuația cubică

$$x^3 + px^2 + qx = r$$

se rezolvă după regula:

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{q}{p}\right)^3 + r} - \frac{q}{p}.$$

Această formulă nu este în general corectă, dar este bună în cazul cînd $p^2 = 3q$, fapt care nu este subliniat în manuscris. De aceea, în exemplul analizat în manuscris

$$x^3 + 60\,x^2 + 1200\,x = 4\,000,$$

rezultatul $x = \sqrt[3]{12\,000} - 20$ este corect. Procedeul (neprezentat cititorului) prin care autorul și-a ales ecuația este evident. În mod analog, autorul se străduiește să rezolve ecuații de gradul al patrulea și chiar al cincilea. Inteligența incontestabilă a acestui matematician necunoscut nu l-a oprit însă de a comite și o serie de erori [21, II].

În Cehia, la Universitatea din Praga, își desfășoară activitatea astronomul și matematicianul Jan Šindel din Gradz Karlow (aproximativ 1375—1453), cunoscut de asemenea sub numele de Johannes Pragensis, adică din Praga; un timp oarecare el lucrează la Universitatea din Viena. Un alt matematician din Praga, magistrul Křišt'an din Prachowice (aproximativ 1366—1439), scrie în jurul anului 1400 *Algorismul prozaic (Algorismus prosaycus)*. Ceva mai tîrziu, la Universitatea din Praga lucrează profesorul în științe matematice Martin din Lenczíz, din apropierea Varșoviei (aproximativ 1405—1463). Dar cel mai remarcabil matematician provenit din Cehia este Jan Widmann, despre care vom vorbi mai departe [233].

La Universitatea din Cracovia, la mijlocul secolului al XV-lea lucrează Martin Krol din Przemyśl, autorul unei opere de geometrie practică. Albert Blar Brudziewski (1445—1497), fost student și apoi profesor la Universitatea din Cracovia, predă aici cursul de aritmetică, perspectivă și astronomie și se ocupă în mod special de studenții mai înzestrați. Între 1480 și 1490 aici se numără 16 profesori de matematică. Între anii 1491 și 1494 la Universitatea din Cracovia învață Copernic, care ulterior își încheie studiile în Italia.

În Austria se evidențiază Georg Peurbach sau Purbach (1423—1461) care, după Johannes din Gmunden, predă la Universitatea din Viena astronomia și matematica, precum și literatura latină. Meritele lui constau în special în elaborarea trigonometriei.

Am mai amintit despre unele traduceri latinești ale operelor arabe de trigonometrie și despre preocuparea lui Leon Gherșonide față de această știință. *Practica geometriei* a lui Dominico Clavasio amintită mai sus stă mărturie despre cunoașterea elementelor de trigonometrie. În Anglia, opere de trigonometrie avînd la bază tradiția vest arabă sînt scrise de Richard Wallingford, aproximativ în 1292—1335, fost student al Universității din Oxford, și de John Moduit, un contemporan al lui Wallingford și lector la aceeași Universitate din Oxford. Johannes din Gmunden scrie de asemenea o operă specială de trigonometrie. Dar toate aceste lucrări mai poartă un caracter destul de elementar.

Tratatul privind propunerile lui Ptolemeu despre sinusuri și coarde (Tractatus super propositiones Ptolemaei de sinibus et chordis) al lui Peurbach arată că autorul lui fusese un bun matematician. Peurbach își propusese să întocmească tabele noi de sinusuri. Apropiindu-se mult de Johannes din Gmunden, el expune cu acest scop procedeele de calcul luate din traducerile latinești ale operelor lui Ptolemeu și ale literaturii vest arabe de matematică. Tabelele lui Peurbach, calculate din 10′ în 10′ pentru o rază de 600 000, au rămas în manuscris, iar la ediția tipărită a tratatului său, publicată la Nürnberg în 1541, au fost adăugate tabelele remarcabilului său elev, Regiomontanus.

Pentru măsurători astronomice și geodezice, Peurbach propune o variantă nouă de goniometru, „pătratul geometric“, a cărui descriere se publică la Nürnberg în 1516. Acesta este un pătrat cu o diagonală rotativă, prevăzută cu dioptri, cu laturi orizontale și verticale divizate în 1 200 de părți egale și înzestrat cu un fir cu plumb pentru orientare. Peurbach întocmește un tabel auxiliar de arctangente pentru acest instrument.

Un amator de matematică este multilateralul învățat umanist, germanul Nicolaus din Cusa (1401—1464). Acest fiu al pescarului Krebs din satul Cusa de pe Mosella, fost student al Universității din Heidelberg și Padua, devenit cardinal în anul 1449, se ocupă activ de astronomie, geografie, mecanică, filozofie și drept, precum și de teologie. El propune o reformă a calendarului și întocmește o hartă a Europei. În operele sale filozofice, în care se amestecă idei panteiste și mistica scolastică, el acordă multă atenție chestiunilor de matematică — problemei infinitului, și îndeosebi disputei străvechi despre discontinuu și continuu. Între 1445 și 1459 el scrie o serie întreagă de lucrări despre rectificarea circumferinței [234]. Urmîndu-l pe Aristotel și pe mulți alții, Nicolaus din Cusa era convins de imposibilitatea cvadra-

turii exacte a cercului. Plecînd de la opera lui Arhimede despre măsurarea cercului, care împreună cu alte lucrări ale marelui învățat grec fusese tradusă atunci în limba latină de Giacobo din Cremona (decedat aproximativ în 1452), el se ocupă decăutarea unor construcții aproximative, simple, dar destul de exacte. Conform principiului său al „coincidenței opozițiilor", el consideră că cercul este un poligon cu un număr infinit de laturi. Rezultatul fundamental pentru rectificarea unui arc de circumferință, în notațiile noastre, se poate exprima prin formula:

$$\varphi \cong \frac{3 \sin \varphi}{2 + \cos \varphi} \left(= \varphi - \frac{\varphi^5}{180} \cdot \ \cdots \right).$$

Formula dă aproximări bune prin lipsă; de exemplu, pentru $\varphi = 45°$ vom obține 0,7836 în loc de 0,7854, așadar o eroare de 0,2%.

Pregătirea matematică a lui Nicolaus din Cusa fusese insuficientă, și raționamentele lui ingenioase erau îmbrăcate într-o formă imperfectă. Precizia regulii prezentate a rămas necunoscută, iar din aproximările lui proprii pentru π, doar una singură era mai bună decît $\frac{22}{7}$. Toate acestea provocară critici din partea contemporanilor săi, și printre ei a lui Regiomontanus. Studii mai aprofundate în această direcție au fost întreprinse de F. Viète, la finele secolului al XVI-lea și mai tîrziu de W. Snellius, care găsește din nou aproximarea lui Nicolaus din Cusa și adaugă la ea o aproximare analogă prin exces. Aproximări simple și mai bune sînt găsite ulterior de Ch. Huygens (care dă și o construcție elegantă a expresiei lui Nicolaus de Cusa), Newton și alți învățați din secolele al XVII-lea—al XVIII-lea.

Începutul epocii Renașterii. „Studiul modern al naturii... își are începuturile ca și toată istoria modernă în acea epocă grandioasă pe care noi, germanii, o numim, după nenorocirea națională care ne-a lovit atunci, reformă, francezii — Renaștere, iar italienii — *cinquecento*, și care nu este pe de-a-ntregul exprimată de nici una din aceste denumiri. Este epoca care începe în a doua jumătate a secolului al XV-lea" [3, p. 4]. Și mai departe, Engels remarcă o serie de particularități ale acestei epoci: crearea monarhiilor mari naționale de către regalitate în alianță cu tîrgoveții și în lupta cu nobilimea feudală, începutul noilor lupte de clasă, și odată cu aceasta împărtășirea culturii antice și înflorirea nemaivăzută a artei și apariția unei literaturi noi. Nu numai

în Italia, unde ele luaseră naștere cu mai bine de 150 de ani mai devreme, dar și în Germania, Franța, Anglia, Spania, Cehia, Polonia și Dalmația se formează relații capitaliste, pe care Engels le caracterizează astfel: „... pămîntul fu descoperit de fapt abia acum, tot acum fură puse bazele comerțului mondial de mai tîrziu, precum și ale transformării meșteșugului în manufactură, care la rîndul ei a constituit punctul de plecare pentru marea industrie modernă. Dictatura spirituală a bisericii fu înfrîntă... Aceasta a fost cea mai mare răsturnare progresistă din cîte trăise omenirea pînă atunci, o epocă care avea nevoie de titani și care a creat titani, titani ca gîndire, pasiune și caracter, ca multilateralitate și ca erudiție [3, p. 5]. Ca bază teoretică a dezvoltării forțelor de producție și ca armă ideologică a burgheziei se formează cunoașterea științifică a naturii, iar odată cu aceasta, în slujba ei și în primul rînd a mecanicii corpurilor cerești și terestre se produce „descoperirea și perfecționarea metodelor matematice" [3, p. 7].

După cum s-a mai spus, pentru răspîndirea și pentru accelerarea dezvoltării matematicii și a altor științe, o imensă importanță o capătă tiparul. Mai știm de asemenea că în ultimul sfert al secolului al XV-lea sau poate ceva mai devreme, în Germania și Italia apar primele manuale tipărite de aritmetică. În jurul anului 1484 se publică prima geometrie germană într-un volum redus, al cărei autor anonim prezintă cîteva construcții simple fundamentale (printre care și pentagonul construit cu compasul de deschidere constantă), avînd probabil în vedere cerințele constructorilor. După aceasta, în Italia, Germania, Franța și alte țări ale Europei, publicarea cărților de matematică se desfășoară într-un ritm din ce în ce mai accelerat; am mai amintit de multe ori publicații apărute în secolul al XV-lea.

Trebuie subliniată o particularitate a literaturii matematice din perioada de timp considerată. În conformitate cu cerințele societății, apar într-un număr tot mai mare opere în limbile naționale vorbite și se creează terminologia științifică în aceste limbi. Asemenea opere se întîlneau în mod excepțional și mai înainte, dar numai în noile state naționale începe procesul propriu-zis de creare a literaturii științifice naționale, destinată acum nu numai pentru vîrfurile puțin numeroase ale oamenilor culți care vorbeau limba latină. Vom vedea că unele lucrări științifice importante de la sfîrșitul secolului al XV-lea sînt scrise în mod conștient în limbile germană, franceză și italiană.

Trigonometria și algebra devin disciplinele matematice fundamentale ale epocii de timp ce o analizăm.

Regiomontanus și dezvoltarea trigonometriei. Johan Müler din Königsberg (în Koburg), poreclit Regiomontanus după numele latinesc al locului său de naștere, este un remarcabil matematician și astronom din a doua jumătate a secolului al XV-lea (1436—1476). La vîrsta de 12 ani el se înscrie la Universitatea din Leipzig, apoi este elevul lui Peurbach la Universitatea din Viena, iar din anul 1458 începe el însuși să predea cursuri. Călătorind prin Italia, el învață limba greacă.

În 1464, prezintă la Padua referate despre astronomul al-Fergani, precedîndu-le printr-o trecere generală în revistă a istoriei matematicii — prima în Europa occidentală. El spune că matematica este o știință a mărimilor și se împarte în două părți — geometrie și aritmetică după cum mărimea considerată este continuă sau numerică. Geometria apăruse în Egipt, fiind impusă de nevoia de a restabili hotarele ogoarelor inundate periodic de revărsările Nilului. Mulți au înregistrat în scris aceste cunoștințe. Euclid din Megara — Regiomontanus confundă, ca și mulți alții din acele vremuri, pe autorul *Elementelor* cu filozoful contemporan al lui Platon — reunește în 13 cărți ceea ce culesese de ici și de colo. Hipsicles mai adaugă alte două cărți la celelalte. Boethius traduce toate cele 15 cărți în limba latină, dar nu redă textul așa cum există el în limba greacă. Mai tîrziu, Adelard din Bath și Alfred, și în cele din urmă Campano, prelucrară din nou cele 15 cărți sub numele lui Euclid, primii doi — elegant și succint, iar al doilea — cu mare claritate. Apoi urmează Apoloniu, cu opera *Secțiunile conice* încă netradusă, și Arhimede, ale cărui opere fuseseră traduse de Giacobo din Cremona în timpul papii Nicolae al V-lea. În opera lui Arhimede despre spirale există o încercare de a prezenta circumferința ca o dreaptă, pentru a obține cvadratura cercului, lucru de care se ocupaseră mulți învățați din antichitate, chiar și în zilele noastre continuă să se ocupe de această problemă bărbați foarte de seamă. Însuși Arhimede scrisese și el despre măsurarea cercului. De îndată ce Apoloniu va fi tradus din limba greacă în latină, va produce o uimire unanimă. Pentru a nu se abate prea mult de la subiect. declară Regiomontanus, el va mai numi doar pe Eutokios, un comentator al lui Arhimede, pe Teodosiu și pe Menelau ca unii ce scriseseră despre sferă și, va trece sub tăcere mulți alți geometri care au scris în diferite limbi. Unde a apărut oare aritme-

tica ar fi foarte greu de spus. Deşi Pitagora a devenit nemuritor prin ştiinţa numerelor, pe care el şi-a însuşit-o de la egipteni şi arabi, totuşi baze mai meritorii a creat Euclid în cărţile a VII-a, a VIII-a, şi a IX-a, din care s-a inspirat şi Jordanus. Cu ajutorul lor Euclid a compus şi alte trei cărţi foarte bune, *Despre numerele date*. Cele 13 cărţi extrem de subtile ale lui Diofant nu le-a tradus încă nimeni în limba latină. În ele se ascunde întreaga floare a matematicii, şi anume arta necunoscutei şi a pătratului, care acum se numeşte, cu un cuvînt arab, algebră. Mai departe Regiomontanus trece la istoria astronomiei [21, II, pp. 261—262].

În timpul cît stă în Italia, Regiomontanus scrie opera *Cinci cărţi despre triunghiuri de toate genurile (De triangulis omnimodis libri quinque)* [235]. În ea sînt expuse probleme de determinare a triunghiurilor, unele fiind rezolvate cu ajutorul algebrei şi nu prin construcţie, iar mai departe urmează trigonometria plană şi sferică. Aceasta este prima lucrare în Europa, în care trigonometria este privită la scară mare ca o disciplină matematică independentă. Conţinutul fundamental al trigonometriei lui Regiomontanus este luat din literatura arabă şi are originile în lucrările lui at-Tusi şi ale altor cîtorva autori [170]. Dar lui Regiomontanus îi revine meritul de a fi sistematizat într-un mod magistral şi de a fi expus excelent un material imens, pe care el îl completează cu rezultate particulare proprii, însoţite în multe cazuri de demonstraţii originale. Această operă este scrisă între anii 1462 şi 1464; dar autorul n-a apucat s-o publice şi ea se tipăreşte de abia în anul 1533 la Nürnberg, jucînd un rol foarte mare în dezvoltarea ulterioară a trigonometriei [236].

În anul 1464, Regiomontanus întocmeşte un tratat polemic împotriva lui Nicolaus din Cusa, reproşîndu-i inexactitatea tuturor cvadraturilor propuse pentru cerc şi caracterul filozofic şi nematematic al demonstraţiilor lui. Un alt vehement tratat polemic al lui Regiomontanus este îndreptat împotriva traducătorului *Almagestului*, George din Trapezunt (1396—1486), care îl consideră pe Aristotel mai presus de Platon, ceea ce, după părerea lui Regiomontanus, nu e îndreptăţit.

Regiomontanus mai face observaţii în Italia şi asupra eclipselor lunare. În 1468 el se înapoiază la Universitatea de la Viena, iar mai tîrziu, la invitaţia regelui ungar Mathias Corvinul, lucrează la Ofen (astăzi Buda, o parte din oraşul Budapesta), unde întocmeşte tabele astronomice — chestiune căreia el îi acordă multă atenţie mai tîrziu. În 1471, Regiomontanus se stabileşte la Nürnberg, unde fostul său elev, Walter Bernhard,

construiește pentru profesorul său un observator astronomic, un atelier pentru confecționarea instrumentelor astronomice de goniometrie și o tipografie. Regiomontanus se ocupă de alcătuirea unor tabele astronomice și trigonometrice, de traduceri și de tipărirea unor lucrări străine și proprii. În 1475, Regiomontanus pleacă la Roma, fiind invitat de papă pentru a se ocupa de reforma calendarului, dar curînd moare, otrăvit pare-se de fiii lui George din Trapezunt.

Lăsînd de o parte lucrările astronomice ale lui Regiomontanus, care au jucat un rol mare în istoria acestei științe, vom arăta că el a întocmit un tabel pentru calculul catetei a dintr-un triunghi sferic dreptunghic în funcție de unghiul opus A și ipotenuza c, conform formulei $\sin a = \sin c \sin A$. El însuși își numește tabelul „cu două intrări". Mărimile c și A variază cu un interval de 1° și tabelul este însoțit de mici tabele auxiliare conținînd părțile proporționale. Într-un alt tabel al său, Regiomontanus dă tangentele unghiurilor, denumite de el, simplu, *numeri* (numere), luînd pentru prima oară raza egală cu 100 000. Într-unul din tabelele lui de sinusuri, crescătoare din minut în minut, el atinge o precizie și mai mare luînd raza egală cu 10^7 (compară cu p. 389).

Într-un manuscris de geometrie rămas de la Regiomontanus se studiază poligoanele stelate. Ampla lui corespondență conține o serie de probleme interesante pe care el le propune prietenilor săi [237]. Așa, de exemplu, într-o scrisoare adresată astronomului italian G. Bianchini (decedat în 1466) se cere să se găsească aria unui patrulater înscris într-un cerc cu diametrul egal cu 60 și ale cărui laturi să se afle într-un raport, precum 4:7:13:17. Este interesantă și o problemă de maximum — prima cunoscută nouă după problemele din antichitate. O prăjină de 10 picioare lungime este atîrnată vertical, așa încît deasupra pardoselii mai rămîn 4 picioare. La ce distanță de la capătul ei inferior se găsește pe pardoseală locul din care ea poate fi văzută sub cel mai mare unghi? Punctul căutat este acela unde circumferința ce trece prin capetele prăjinii este tangentă la pardoseală. Mersul rezolvării lui Regiomontanus nu se cunoaște, dar este reconstituit pe deplin verosimil [21, p. 283]. Printre problemele de aplicare a algebrei la geometrie întîlnite în corespondența lui Regiomontanus atrage atenția o problemă reductibilă la o ecuație de gradul al treilea și pe care el nu putuse s-o rezolve. Este însă remarcabilă indicația lui că rezolvarea acestui gen de probleme ar da posibilitatea să se construiască coarda unui unghi de 1°,

fiind cunoscută coarda unghiului de 3°. Scrisorile lui Regiomontanus mai conţin probleme cu ecuaţii nedeterminate liniare şi de gradul al doilea, unele fiind de acelaşi tip cu cele întîlnite în Orient, şi mai tîrziu la Leonardo Pisano.

Începuturile simbolicii algebrice. Dezvoltarea calculului scris şi crearea metodelor algebrice duc, în a doua jumătate a secolului al XV-lea, la introducerea unei serii întregi de semne algebrice şi la crearea bazelor calculului algebric. Primele încercări de a oglindi prin simboluri generalitatea proprie metodelor algebrei, după cum am mai văzut, nu fuseseră încununate de succes. La Leonardo Pisano şi Jordanus Nemorarius, lucrurile nu merseseră mai departe de notaţia literală a mărimilor, lipsită de vreun principiu de diferenţiere a cunoscutelor de necunoscute, a puterilor lor etc. Acum, în istoria simbolicii se produce o cotitură, legată în primul rînd de crearea semnelor pentru operaţiile algebrice. Numai după aceasta, regulile verbale au putut fi înlocuite prin formule adevărate, şi expresiile generale algebrice devin ele însele un obiect de calcul. Un alt factor hotărîtor este crearea unor simboluri diferenţiate pentru diferite categorii de mărimi algebrice. Toate acestea au avut consecinţe ce au ieşit cu mult în afara cadrului algebrei propriu-zise.

La originile simbolicii algebrice se află lucrările lui Jan Widmann. El s-a născut în oraşul ceh Heba, a studiat la Universitatea din Leipzig, şi, obţinînd diploma de magistru, devine în 1485 profesor la această universitate. Se pare că el este primul care începe să predea algebra la universitate. Lui Widmann îi aparţine opera *Calcul rapid şi frumos pentru întreaga negustorime (Behende und hübsche Rechnung auf allen Kaufmannschaft)*, tipărită întîia oară la Leipzig în anul 1489 şi retipărită ulterior în multe ediţii. În opera lui Widmann se simte atît influenţa lui Jordanus Nemorarius, cît şi a lui Leonardo Pisano. În această carte apar pentru prima oară tipărite semnele + (plus) pentru adunare şi — (minus) pentru scădere. Despre provenienţa acestor semne există pînă în prezent diferite supoziţii. Unii afirmă că ele ar fi provenit de la semnele ce se puneau pe lăzile cu mărfuri, arătînd că greutatea lor este mai mică sau mai mare decît cea standardizată. Alţii consideră că ele sînt de origine indiană. Este posibil ca ele să fi fost iniţial nişte prescurtări ale cuvintelor, în particular semnul + ar fi provenit de la semnul &, latinescul *et* (conjuncţia „şi“) în scriere prescurtată. Cu cîţiva ani mai înainte, semnele + şi — se întîlnesc în manuscrisele de algebră în limba

germană și latină folosite de Widmann și păstrate înainte vreme la Dresda (fig. 114).

Ca și toate celelalte opere din acele timpuri, cartea lui Widmann abundă în nenumărate reguli izolate, avînd fiecare denumirea sa proprie înflorită și servind pentru rezolvarea unor pro-

A) $15 - 22x$ B) $x^3 + 2x^2$

Fig. 114. Prima apariție a semnelor minus și plus în manuscrise de algebră (în jurul anului 1486).

bleme aritmetice de un anumit tip. În partea de algebră, autorul se bazează pe larg pe opere mai vechi, inclusiv pe manuscrise germane și latinești ale unor autori anonimi, alcătuite între anii 1450 și 1460 și mai tîrziu. Într-un asemenea manuscris sînt prezentate 24 de reguli pentru rezolvarea celor șase forme fundamentale ale lui al-Horezmi pe care le cunoaștem și pentru alte 18 forme reductibile la ultimele prin împărțire, sau bipătrate, sau conținînd ecuații cu doi termeni de gradul al treilea și al patrulea. În aceste manuscrise există de pe atunci elemente de terminologie și simbolică sui generis, care disting algebra Germaniei secolului al XVI-lea. Autorul unuia din aceste manuscrise caracterizează astfel importanța algebrei: el observă că tot ce se face cu ajutorul unui simbol, prin care el își notează necunoscuta, se poate face și fără el și că așa se procedase și înainte, pînă la inventarea algebrei, dar numai cu ajutorul a numeroase alte mijloace și raționamente.

Algebra în sine se cheamă de regulă *algebre* sau *kosse*. Ultimul cuvînt provine de la denumirea italiană a necunoscutei *cosa*, care, prin cuvîntul latinesc *res*, își trage originea din terminologia arabă. Sub forma de *coss* el începe să servească și pentru denumirea primei puteri a necunoscutei și a întregii științe a algebrei. Necunoscuta și puterile ei căpătară denumirea de numere cossice. În denumirile și notațiile puterilor necunoscutei se produc la început modificări neesențiale, dar spre sfîrșitul secolului al XVI-lea, terminologia cossică și simbolică se stabilesc definitiv. Vom prezenta un tabel de termeni și simboluri dintr-o carte vestită a cehului Krišt'an Rudolf din Javor (aproximativ 1500—1545): *Calculul rapid și frumos cu ajutorul regulilor iscusite ale algebrei, numite de obicei coss (Behend und hübsch Rechnung durch*

bo. Haben auch je eine von kürtz wegen mit einem character: genomen von anfang des worts oder namens: also verzeichnet

ϕ dragma oder numerus
ꝛe radix
ʒ zensus
ce cubus
ʒʒ zensdezens
ß sursolidum
ʒce zensicubus
bß bissursolidum
ʒʒʒ zenszensdezens
cce cubus de cubo

¶ Dragma oder numerus würt hie genomē gleichsam 1. ist kein zal sunder gibt andern zalen ir wesen
¶ Radix ist die seiten oder wurtzl eins quadrats.
¶ Zensus: die dritt in der ordnūg: ist allweg ein quadrat/entspringt auß multiplicirūg des radix in sich selbst. Darumb wañ radix 2 bedeüt/ ist 4 sein zens.

Fig. 115. Semne cossice pentru puterile necunoscutei în cartea lui Kr. Rudolf (anul 1525).

die kunstreichen Regeln Algebre, so gemeincklich die Coss genennt werden). Rudolf lucrează la Viena ca profesor particular de matematică și include în lucrare marea sa experiență, fapt despre care vorbesc numeroasele ediții ale cărții, publicată întîi la Strassburg în 1525 și retipărită de cîteva ori pînă în 1615.

Se cunoaște originea cîtorva termeni și semne cossice. Semnul mărimii constante, numit *drahma* (cuvîntul arab *dirhem*) sau număr, este o modificare a literei inițiale a acestui cuvînt la care s-a adăugat o codiță. Semnul pătratului este pur și simplu prima literă a cuvîntului german, care reproduce termenul latinesc. Semnul necunoscutei, numită de asemenea și *Ding* — obiect,

putea să fi provenit tot din denaturarea primei litere. Nu există o explicație satisfăcătoare pentru denumirea și notația puterii a cincea [33, II].

Oricît de sărăcăcioasă și de greoaie fusese simbolica descrisă, crearea ei reprezintă un pas important înainte. Rudolf o dezvoltă întrucîtva mai departe. Așa de exemplu, pentru ecuațiile liniare cu două necunoscute el mai întrebuințează, pentru cea de-a doua, litera gotică q, de la cuvîntul *quantitas* — cantitate. Tot lui îi aparține semnul de astăzi al radicalului, dar fără linia orizontală: √ . Rădăcina cubică el o notează prin semnul ∛, iar rădăcina de ordinul patru, ∜ . În manuscrisele germane de la sfîrșitul secolului al XV-lea, rădăcina pătrată se însemna printr-un punct pus în fața numărului, cea cubică — prin trei puncte, iar rădăcina de ordinul patru — prin două puncte, ca rădăcină pătrată dintr-o rădăcină pătrată. Pentru simplificare și scriere mai rapidă, punctele se transformă în liniuțe.

Să mai observăm că Rudolf numește de cîteva ori calculul cossic — „acest algoritm“.

Simbolica algebrică se creează simultan în Germania, Italia, Franța, pretutindeni mergîndu-se pe căi diferite spre un singur țel. Acest proces durează aproape două secole și este încheiat în părțile esențiale abia de Descartes și de succesorii săi.

dañ √4 ist 2. √9 ist 3. pringen in einer summa 5
Exempl von communicanten
√8 zu √18 item √20 zu √45 item √27 zu √48
fa: √50 facit √125 fa: √147
√6 2/3 zu √41 2/3 it. √12 1/2 zu √40 1/2 it. √8 zu √12 1/2
fa: √81 2/3 fa: √98 fa: √40 1/2
Exempl von irracionaln
√5 zu √7 facit √ des collects 12 + √140
item √4 zu √13 facit √ des collects 17 + √208

Fig. 116. Semne cossice în cartea lui Kr. Rudolf (anul 1525).

Leonardo da Vinci. Dezvoltarea matematicii în Italia e marcată prin succese noi în diferite domenii. Tot mai numeroase și mai accesibile devin traducerile clasicilor antici greci. Am mai spus că Giacobo din Cremona tradusese din limba greacă operele lui Arhimede. George din Trapezunt traduce *Almagestul*, împreună cu comentariile lui Teon. În tipografia germanului Erhardt Ratdolf (aproximativ 1443—1528), stabilit la Veneția, se tipărește în 1482 traducerea din limba arabă a *Elementelor* lui Euclid, realizată de Campano — una dintre primele ediții tipărite de literatură matematică, înzestrată cu desene. Această traducere este curînd reeditată de L. Pacioli (Veneţia 1509), iar între timp B. Zamberti (aproximativ 1473, decedat după 1539) editează și o traducere din limba greacă a acelorași opere (Veneția, 1505).

La răspîndirea cunoştinţelor matematice, cît și la elaborarea unor noi teorii matematice contribuie construcţia orașelor aflată într-o dezvoltare impetuoasă și înflorirea strălucită a artelor plastice. În epoca Renașterii, arhitecţii, inginerii, pictorii și meșteșugarii încep să se intereseze intens de matematică în general, și în special de teoria perspectivei și a proporţiilor. O pleiadă întreagă de oameni strîns legaţi de cercurile de artiști se ocupă de elaborarea teoriei perspectivei, generalizînd experiența practicienilor. Se introduce noţiunea de punct de fugă și punct principal al tabloului, se elaborează procedeele de reprezentare în perspectivă a unui obiect după proiecţiile lui orizontale și verticale etc. Apare cu rapiditate o întreagă literatură, conținînd și informaţiile necesare de geometrie [238]. Vom cita doar trei opere italiene: *Despre pictură* (*Della pictura*, 1435) a lui L.B. Alberti (1404—1472), tipărită la Veneţia în 1511, și *Despre perspectivă şi pictură* (*De perspectiva pingendi*, aproximativ în 1480) a lui Piero de Franceschi (1410?—1492), a cărui altă lucrare despre corpurile regulate apăruse într-o anexă la opera lui L. Pacioli *(Despre proporția divină)* (vezi p. 464). După italieni urmează în alte ţări francezul J. Pèlerin (1445?—1523?) cu lucrarea sa *Despre perspectiva artistică (De artificiali perspectiva)* editată la Toul în 1505 și reeditată patru ani mai tîrziu, precum și remarcabilul pictor german A. Dürer (1471—1528) care scrie special pentru pictori *Îndrumări pentru măsurători cu ajutorul compasului şi al riglei* (*Underweysung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheyt*, Nürnberg, 1525; trad. latină, Paris 1532 și alte ed.). În schimb matematicienii întreprind abia mai tîrziu un studiu sistematic al teoriei perspectivei.

Printre maeştrii artei italiene care acordă o atenţie deosebită matematicii, cel mai remarcabil este genialul pictor, învăţat şi inginer Leonardo da Vinci (1452—1519). Ocupîndu-se de ştiinţele experimentale, de mecanică, optică şi astronomie, el vede în matematică un model de demonstraţie ştiinţifică, iar mecanica o numeşte „raiul matematicii". În lucrarea sa *Tratat de pictură (Il trattato della pictura*, publicat în 1651) el recomandă pictorilor să studieze ştiinţele, printre care şi perspectiva geometrică expusă aici. El arată că „un îndrăgostit de practică dar rupt de ştiinţă este ca un cîrmaci care urcă pe o corabie fără cîrmă sau busolă; el nu-i sigur niciodată încotro pluteşte". Dar şi ştiinţa fără practică seamănă cu „o apă stătătoare, care fie putrezeşte, fie îngheaţă la frig, iar mintea omului, negăsindu-şi întrebuinţare, se ofileşte". Viaţa plină de peregrinări nu i-a dat lui Leonardo da Vinci posibilitatea de a-şi elabora ideile ştiinţifice şi de a le expune sub forma unor opere finite. Totuşi s-au păstrat caietele lui de note, conţinînd însemnări disparate şi schiţe, în cea mai mare parte neterminate [239]. Tematica matematică este prezentă în ele sub formă de exerciţii şi probleme, avînd într-un fel sau altul o destinaţie practică, precum şi sub forma unor probleme filozofice legate de noţiunile matematice. El acordă multă atenţie găsirii ariilor şi a volumelor echivalente, poligoanelor stelate, construcţiei poligoanelor regulate, fie cu latura dată, fie înscrise într-o circumferinţă dată, deseori cu condiţia ca deschiderea compasului să rămînă constantă, — chestiune de care se ocupase încă Abu-l-Vafa. Unele soluţii sînt aproximative (de exemplu, în cazul heptagonului şi al nonagonului), iar pe altele însuşi Leonardo da Vinci le recunoaşte ulterior ca fiind eronate. Caietele mai conţin şi studiul lunulelor, observaţii cu privire la diferenţele dintre curbele plane şi strîmbe, despre imposibilitatea cvadraturii cercului, despre introducerea semnelor $+$ şi $-$. Leonardo propune să se realizeze cvadratura aproximativă cu ajutorul unei roţi, a cărei lăţime să fie egală cu jumătate din raza ei. Dacă o vom roti pe un plan, atunci la o rotaţie completă, urma ei dreptunghiulară va avea o arie egală cu aria roţii însăşi $\left(\pi r^2 = 2\pi r \frac{r}{2}\right)$. Este remarcabil faptul că, studiind centrele de greutate ale figurilor şi ale corpurilor, ca de exemplu al semicercului şi al tetraedrului, precum şi în cazul determinării ariei elipsei, Leonardo aplică metodele lui Arhimede, anticipînd pe învăţaţii din secolul al XVIII-lea. El inventează

cîteva instrumente matematice, precum: compasul pentru mărirea sau micşorarea proporţională a figurilor, un dispozitiv pentru trasarea parabolei şi altele. Deşi Leonardo se pronunţă în mod teoretic împotriva indivizibilelor („Ceea ce este divizibil actual este divizibil şi potenţial, totuşi nu toate mărimile, divizibile potenţial, vor fi divizibile actual", „punctul nu este o parte din linie" ş.a.), practic el aplică totuşi metoda indivizibilelor, acordîndu-i probabil o importanţă euristică. Aşa, de exemplu, în studiul scurgerii apei dintr-un vas, el înlocuieşte apa prin mei, făcînd totodată următoarea observaţie: „Şi dacă vei spune că această experienţă nu este bună, deoarece apa prin ea însăşi este o mărime unitară şi continuă, iar meiul este o mărime discretă şi discontinuă, la aceasta eu îţi voi răspunde: vreau să-mi acord o asemenea libertate, comună tuturor matematicienilor, şi anume: similar cu felul cum împart ei timpul în grade, transformîndu-l dintr-o mărime continuă într-una discontinuă, tot aşa voi face şi eu, echivalînd cu apa meiul sau nisipul".

În a doua jumătate a secolului al XV-lea, în Italia fărîmiţată într-un mare număr de principate, şi avînd fiecare o universitate proprie, este răspîndit un obicei conform căruia profesorii — printre care se numără şi matematicienii — să se mute des de la o universitate la alta. Aceste contacte contribuie la ridicarea treptată a cunoştinţelor matematice, a căror necesitate este provocată de relaţiile capitaliste din ce în ce mai puternice, precum şi de economia şi tehnica aceluiaşi capitalism. Apar nenumărate opere de matematică cu caracter compilativ, printre care vom remarca în mod deosebit lucrarea lui Georgius Valla (1430—1499), publicată în 1501, *Despre lucrurile care rămîn pe loc şi cele care se perindă (De rebus expetendis et fugiendis)*, în care pentru prima oară în Europa occidentală se acordă atenţie secţiunilor conice. Printre aceşti profesori rătăcitori se remarcă un matematician cu totul deosebit al vremurilor sale — Luca Pacioli.

Luca Pacioli. Luca Pacioli (aproximativ 1445—1514) provine din tagma negustorească, devine călugăr şi profesor de matematică la diferite universităţi. Este posibil ca el să fi făcut o călătorie în Orient. Lucrările lui principale sînt: *Suma cunoştinţelor de aritmetică, geometrie, rapoarte şi proporţionalităţi* (*Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*; 1487, editată la Veneţia în 1494) şi lucrarea *Despre proporţia divină* (*De divina proportione*, 1497, editată la Veneţia în 1509) scrisă datorită insistenţei prietenului său Leonardo da Vinci. Ele sînt scrise în limba italiană [238, I; 240].

Linea potẽs rationale z media-
cl: vz. Riton. Radix qnti bino-
v. ℞ v.r.40.p̃.6.p̃ ℞ v.r.40 m̃.6
℞ v.r.40.p̃.6.p̃.℞ v.r.40.m̃.6
Quadrata partium ℞.40.p̃.6
℞.40.m̃.6
Sũma ℞.160.p̃.4.

Linea potẽs rõnale z irrõnale.
Radix quinti binomij.
℞ ℞.20.p̃.2.p̃.℞ ℞.20.m̃.2.
℞ ℞.20.p̃.2.p̃.℞ ℞.20.m̃.2.
Quadrata partiũ.℞.20.p̃.2.
℞.20.m̃.2.
Summa ℞.80.p̃.4.

Fig. 117. Calcule algebrice la L. Pacioli (după ediția din 1523). În al doilea exemplu s-a neglijat pretutindeni prescurtarea *u*, care înseamnă că $\sqrt{}$ se referă la $\sqrt{20} \pm \sqrt{2}$. În răspunsul la cel de-al doilea exemplu eroarea este: $\sqrt{80} + 4$ în loc de $\sqrt{80} + 8$.

Summa este o enciclopedie a cunoștințelor matematice din acele vremuri. În expunerea aritmeticii se întîlnesc principii „pitagoreice“ mistice, ca de exemplu, acela că numerele perfecte se termină numai cu 6 sau cu 8, din cauză că cei triști trăiesc dezordonat, în timp ce cei buni și perfecți respectă totdeauna ordinea stabilită; sau cugetări, de felul celeia conform căreia produsul a două fracții subunitare, întrucît este mai mic decît fiecare dintre factori, intră în contradicție cu porunca biblică „creșteți și vă înmulțiți“; cu toate acestea, cartea în ansamblu preconizează idei matematice înaintate. Ea conține diferite procedee pentru operațiile aritmetice, dublarea și înjumătățirea nemaifiind recunoscute ca operații aparte, lucru despre care se vorbește direct. Pentru înmulțire se dau opt procedee, calculele fiind aranjate uneori în chip ciudat și avînd denumiri tot atît de ciudate. De exemplu, sub denumirea de *gelosia* apare un procedeu descris mai sus și întrebuințat încă de indieni (p. 136, fig. 35). Aici, așezarea calculelor amintește niște obloane de ferestre avînd forma unei rețele, al căror scop era să ascundă de privirile trecătorilor femeile așezate la ferestre. Asemenea obloane se numeau *gelosia,* avînd semnificația de „gelozie“. În Franța și apoi și în alte țări, asemenea obloane s-au numit *jalousies* (de la *jalousie,* în romînește „jaluzea“). Nu trebuie să ne închipuim însă că în practică s-ar fi folosit pe larg toate procedeele de înmulțire, inventate în număr foarte mare. Pacioli însuși apreciază nefavorabil pasiunea de a inventa forme noi. În acele timpuri se răspîndește din ce în ce mai mult procedeul nostru actual de înmulțire, și Pacioli e primul care îl prezintă sub denumirea de *bericuocoli,*

adică turtă dulce, sau sub denumirea venețiană *scachierii*, adică tablă de șah.

Mai departe, Pacioli explică atît procedeul nostru modern de împărțire, cît și procedeul popular pe atunci de tăiere a cifrelor, repetîndu-se scrierea împărțitorului și al cărui model pentru împărțirile 15 750: 112 și 15 750 : 144 este dat în fig. 99 (p. 383). Acest ultim procedeu se numește după aspectul exterior *galea vel batello*, adică galeră sau corabie; Pacioli îl consideră cel mai rapid, la fel după cum galera este cea mai rapidă dintre vasele cu pînze. În literatura germană acest procedeu a fost numit mai tîrziu „împărțirea de sus“, deoarece în el calculele se scriu deasupra deîmpărțitului, iar procedeul folosit astăzi — împărțirea de jos. Împărțirea de sus s-a folosit uneori chiar și în secolul al XVIII-lea.

În *Summa*, un loc important îl ocupă operațiile cu fracțiile, regula de trei, proporțiile, regulile falsei poziții, precum și algebra.

Trecînd la algebra, numită de el tot *regula della cosa*, adică regula necunoscutei, sau *arte maggiora*, adică „marea artă“, Pacioli face cunoscute cititorului simbolurile algebrice — *carateri algebraici*.

Numind *surdi* (surde) iraționalele pătratice, el notează rădăcina pătrată prin semnul ***R*** (de la cuvîntul latin *radix*, în italienește *radice*) sau ***R2*** , rădăcina cubică prin ***R3*** sau ***R*** cuba, rădăcina de ordinul al patrulea prin ***R4*** sau ***RR***

Termenul liber al ecuațiilor se notează prin semnul n° *(numero)*, necunoscutele prin co. *(cosa)*, pătratul ei prin ce. *(censo)*, cubul — prin cu. *(cubo)*, puterea a patra prin ce. ce *(censo censo)*, a cincea prin $p^\circ.r^\circ$ *(primo relato)*, a șasea — ce. cu., a șaptea — $2^\circ.r^\circ$. *(secondo relato)*, a unsprezecea — $3^\circ.r^\circ$. *(tertio relato)* etc. Nu se cunoaște originea cuvîntului *relato*. Pentru a doua necunoscută, care, după cum spune el, înainte se numea *cosa seconda*, el folosește cuvîntul *quantita* și o notează prescurtat qp^a. Am văzut că în mod analog procedează mai tîrziu Kr. Rudolf. Notația noastră y^2 are la Pacioli forma ce. de qp^a. Adunarea se notează prin $\widetilde{p}$, care se citește plus sau *piu*, scăderea, prin $\widetilde{m}$, care se citește minus sau *meno*. Deși mărimile ce se scad nu se înțeleg încă drept numere negative independente, totuși regulile de înmulțire sînt indicate clar, și anume: 1) plus înmulțit cu plus dă plus;

2) minus înmulțit cu minus dă plus; 3) plus înmulțit cu minus dă minus; 4) minus înmulțit cu plus dă minus. Pacioli observă că a doua regulă pare fără sens, deoarece, „este clar, că $\tilde{m}4$ este mai mic decît zero", dar aceasta se poate demonstra: $10\tilde{m}2$ egal cu 8, înseamnă că $10\tilde{m}2$ înmulțit cu $10\tilde{m}2$ este egal cu 64, dar aplicînd înmulțirea cruciș, obținem 10 înmulțit cu 10 egal cu 100, apoi de două ori 10, înmulțit cu $\tilde{m}2$, ceea ce dă $\tilde{m}40$, și prin urmare, dau împreună 60, de unde și rezultă că $\tilde{m}2$ înmulțit cu $\tilde{m}2$ trebuie să fie 4. Se înțelege că lipsa de temei a acestei „demonstrații", pusă în evidență abia la sfîrșitul secolului al XIX-lea, nu putea fi înțeleasă de Pacioli. Fiindcă nu utiliza paranteze, Pacioli scrie expresia noastră $\sqrt{40-\sqrt{320}}$ astfel: *RV40m̃R320*. Aici litera *v* este prima din cuvîntul *universale*, adică generală (pe atunci, adesea în locul literei „u" se tipărea „v"): rădăcina dintr-un polinom se numește *radice universale* sau *legata* adică legată, reunită. Pacioli descrie regulile operațiilor cu rădăcinile pătrate, demonstrînd de exemplu că $\sqrt{10}+\sqrt{40}=\sqrt{90}$.

Pacioli lămurește că algebra constă în „completarea" și „compararea" ecuațiilor și distinge tot cele trei tipuri „simple" și altele trei „compuse" de ecuații liniare și de gradul al doilea cunoscute nouă. Pentru a ușura învățarea pe de rost, Pacioli dă regulile de rezolvare a ecuațiilor în hexametri latini, de calitate inferioară din punct de vedere literar. În legătură cu ecuațiile $ax = bx$ și $ax^2 = bx^2$, Pacioli observă că dacă $a = b$, atunci ecuațiile sînt nedeterminate; dacă însă $a \neq b$, atunci ele sînt imposibile: soluția $x = 0$ îi scapă din vedere.

Apoi Pacioli analizează unele tipuri de ecuații bipătrate care se pot reduce la precedentele, și anume:

$$ax^4 = e, \qquad ax^4 = dx \qquad ax^4 = cx^2$$
$$ax^4 + e = cx^2, \qquad ax^4 + cx^2 = e, \qquad ax^4 = cx^2 + e,$$

dar totodată prezintă tipurile:

$$ax^4 + cx^2 = dx \quad \text{și} \quad ax^4 + dx = cx^2$$

cu observația *impossibile*. Despre asemenea ecuații și altele analoge, Pacioli spune: după cum pînă-n prezent nu s-a găsit cvadratura cercului, tot așa nu s-au rezolvat încă ecuațiile ale căror termeni se găsesc între ei la distanțe „disproporționale". Totodată, el arată că la ecuații de gradul al doilea se pot reduce și alte ecuații de grad superior, analoge cu cele bipătrate.

Summa mai conține și diferite probleme de aritmetică comercială, inclusiv probleme cu dobîndă compusă. Printre acestea există și probleme care duc la ecuații transcendente. Așa de exemplu, se întreabă, în cîți ani se va dubla un capital depus cu dobîndă compusă; această problemă impune rezolvarea ecuației:

$$\left(1 + \frac{n}{100}\right)^x = 2$$

Rezolvînd-o, obținem:

$$x = \frac{\lg 2}{\lg\left(1 + \frac{n}{100}\right)} \approx \frac{69}{n},$$

în locul rezultatului lui Pacioli $\frac{72}{n}$. Într-un alt caz, cînd problema conduce la ecuația $x \cdot 2^x = 30$, Pacioli se străduiește s-o rezolve prin încercări, găsind pentru început că $3 < x < 4$. Merită atenție faptul că deși unele probleme au ca aspect exterior un caracter practic, totuși interesul lui Pacioli față de ele este pur abstract. Astfel, deși conform textului unor probleme, ca în cazul numărului de călătorii, n-are sens decît soluția în numere întregi, Pacioli o dă totuși sub forma unor rădăcini pătrate complicate, poate pentru a prezenta mai mult material pentru exerciții. De altfel, pe el îl atrage în calcule partea lor formală.

În capitolul problemelor „neobișnuite", Pacioli introduce una devenită ulterior vestită în teoria probabilităților. Un joc de zaruri în care cîștigă cel ce realizează 6 puncte se oprește cînd unul dintre jucători realizează 5 puncte, iar celălalt, 2. Se pune întrebarea, în ce proporție trebuie împărțită miza? Pacioli presupune în mod eronat că în proporția de 5:2. Primele probleme de acest gen apar în literatura tipărită încă ceva mai înainte, și anume în comentariul la *Divina comedie* a lui Dante, publicat în 1477. Aici se analizează probabilitățile combinărilor posibile de puncte pe trei zaruri, considerîndu-se în mod greșit că apariția sumelor $1 + 1 + 1 = 3$ și $2 + 1 + 1 = 4$ are aceeași probabilitate. Combinările care se pot realiza numai într-un singur fel sînt numite *azari* (de la denumirea arabă *azar* — dificil).

În *Summă* se acordă multă atenție regulilor de contabilitate în partidă dublă; în ea mai sînt incluse tabele comparative de monede și greutăți, adică se prezintă tot ceea ce corespundea cerințelor acelor vremuri. În partea de geometrie a lucrării, Pacioli

urmează într-o măsură și mai mare pe Leonardo Pisano decît în partea de aritmetică și algebră, dar și aici există probleme proprii ale lui Pacioli; dintre acestea fac parte problemele de înscriere într-o figură dată a unor cercuri tangente între ele (de exemplu, trei cercuri egale, într-un triunghi echilateral). O problemă, și anume: cînd se vor întîlni din nou două persoane care, pornind simultan, aleargă pe un cerc cu viteze în raportul 12:1, — s-a păstrat și pînă azi, ca problemă a coincidenței acului orar cu minutarul unui ceas. Ocupîndu-se de volumele poliedrelor regulate, Pacioli spune că a construit modele de poliedre (probabil din plăci de sticlă) pentru colecțiile unor mari dregători.

Cartea *Despre proporția divină*, intitulată astfel după „secțiunea de aur", conține chestiuni privitoare la arhitectură (după Vitruviu), la cele cinci poliedre regulate și la poliedrele obținute din acestea prin „tăiere" și „suprapunere" (tăierea vîrfurilor sub formă de piramide regulate, sau construirea de astfel de piramide pe fețe), precum și la proporțiile corpului omenesc, exprimate în numere întregi mai mici decît 10. Pacioli expune *Secțiunea de aur* după așa-numita carte a XV-a din *Elementele* lui Euclid (în realitate a lui Hipsicles). Leonardo da Vinci desenează pentru prietenul său poliedrele pe 59 de tabele, iar Pacioli la rîndul său calculează pentru Leonardo da Vinci cantitatea de metal necesară pentru o statuie ecvestră.

În afară de aceste lucrări fundamentale și de ediția corectată în oarecare măsură a traducerii lui Campano a *Elementelor* (după intenția lui Pacioli, această ediție din 1509 urma să înlocuiască traducerea lui Zamberti apărută cu patru ani mai devreme), Pacioli mai întocmește o culegere de probleme distractive, „de istețime", conținînd probleme de felul celei foarte cunoscute despre lupul, capra și varza ce trebuie trecuți peste un rîu, despre cele trei perechi de soți, despre turci și creștini, precum și pătratele magice și construcțiile aproximative ale poligoanelor cu 9, 11 și 17 laturi.

Nicolas Chuquet. Un aport original în algebră îl aduce în Franța bacalaureatul în medicină Nicolas Chuquet, născut la Paris, dar care a lucrat la Lyon, un mare centru comercial, unde exista o colonie de italieni. Această din urmă împrejurare nu a rămas fără consecințe asupra lucrării manuscrise a lui Chuquet, *Știința despre numere în trei părți (Le triparty en la science des nombres)*, terminată în anul 1484. Această operă, scrisă în limba franceză, conține reguli de calcul cu numere raționale, apoi cu rădăcini

iraționale, și, în sfîrșit, o teorie a ecuațiilor. După cum s-a mai spus, aci se întîlnesc odată cu „milionul", termenii „bilion", „trilion" etc., pînă la „nonilion".

Merită să fie amintită comparația făcută de Chuquet între progresia aritmetică.

$$1, 2, 3, \ldots, n$$

și cea geometrică

$$a, a^2, a^3, \ldots, a^n.$$

Scriindu-le una sub alta, el observă că produsului a doi termeni din progresia de jos îi corespunde suma termenilor aflați în progresia de deasupra. Aici există o întrezărire a proprietăților viitorilor logaritmi, lucru care apare de fapt încă la Arhimede. La fel ca și Pacioli, Chuquet prezintă regulile operațiilor cu numere negative, iar pentru adunare și scădere folosește semnele $\tilde{p}$ și $\tilde{m}$. Semnul $\tilde{m}$ servește și pentru notarea numerelor negative numite de Chuquet *ung moins*, adică „ mai puțin". Numerele negative se folosesc chiar în prima parte a cărții, la rezolvarea problemelor prin regula de trei și regula falselor poziții. După cum vom vedea curînd, ele au găsit aplicații mult mai importante în algebră. Ca o descoperire proprie și originală, Chuquet prezintă „regula numerelor medii". Afirmînd (fără demonstrație) că $\frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}$ se află între $\frac{a_1}{b_1}$ și $\frac{a_2}{b_2}$, el aplică această medie la rezolvarea problemelor prin metoda dublei false poziții, obținînd de exemplu, pentru ecuația

$$x^2 + x = 39\frac{13}{81}, \text{ cînd } x_1 = \frac{5}{1}, \quad x_2 = \frac{6}{1} \text{ și } x_1 < x < x_2,$$

$$x_3 = \frac{11}{2}, \quad x_4 = \frac{17}{3}, \quad x_5 = \frac{23}{4}, \quad x_6 = \frac{29}{5} \text{ și în fine } x_7 = \frac{52}{9}$$

care este valoarea exactă. Avantajul acestei medii constă în faptul că numitorul crește lent, dar calculul în ansamblu este desigur destul de laborios. Notînd rădăcinile respectiv prin R^2, R^3 etc. Chuquet face observația că „pentru a păstra ordinea" s-ar fi putut considera chiar numărul dat ca o rădăcină de ordinul întîi din el însuși. notîndu-l prin R^1 în locul parantezelor, el folosește sublinierea. scriind de exemplu expresia noastră $\sqrt{14 + \sqrt{180}}$

sub forma: $R^2_{\cdot}14.\bar{p}.R^2_{\cdot}180.$ La extragerea rădăcinilor el arată că pătratele perfecte nu pot avea terminația în cifrele 2, 3, 7 și 8, iar bipătratele — în 2, 3, 4, 7, 8 și 9, în timp ce cuburile pot avea orice terminație, el prezintă și un tabel al primelor 10 puteri ale numerelor de la 1 la 10.

În locul vechii denumiri a necunoscutei: *chose*, adică obiect, Chuquet introduce termenul *premier*, adică primul număr sau, tratînd geometric necunoscuta, o numește *nombre liniar* — număr liniar. În același fel, el introduce al doilea, al treilea și al patrulea număr, corespunzător puterilor necunoscutei. Înainte vreme, spune Chuquet, ele se numeau cîmpuri, *champs*, cele cubice — *cubics*, cîmpuri ale cîmpurilor. Pentru a nota puterile necunoscutei, sus, în dreapta coeficientului se scrie un indice mic al puterii. Expresiilor noastre $12x$, $12x^2$, $12x^3$, la Chuquet, corespund 12^1, 12^2, 12^3. În conformitate cu aceasta, termenul liber al ecuației, de exemplu, 12, el îl scrie cu 12^0, spunînd că asemenea numere „au ca nume pe zero". În același fel, în locul relației noastre $8x^3 \cdot 7x^{-1} = 56x^2$, el scrie că „$.8^3.$, înmulțit cu $.7^{1.\bar{m}}$, dă $.56.^2$", introducînd așadar cu îndrăzneală nu numai exponentul nul, ci și pe cei negativi. Este posibil ca Chuquet să fi fost influențat de lucrarea lui Oresme, deși el nu utilizează indicii fracționari ai acestuia. O folosire atît de largă a simbolurilor, cu toată lipsa semnelor lor pentru înmulțire, împărțire și egalitate, precum și a însăși necunoscutei, apropie scrierea algebrică a lui Chuquet de scrierea noastră modernă. Dăm mai jos un model al unei asemenea scrieri, și anume ecuația:

$$R^2 4^2 \bar{p}\, 4^1 \bar{p}\, 2^1 \bar{p}\, 1 \text{ egaulx a } 100,$$

adică:

$$\sqrt{4x^2 + 4x} + 2x + 1 = 100.$$

Chuquet numește ecuația *epuipolence des nombres*, adică echivalența numerelor. Acest termen nu s-a înrădăcinat în limba franceză, dar a intrat în uz termenul *equation*, ecuație, de la cuvîntul latinesc *equatio*, folosit uneori încă de Leonardo Pisano.

În comparație cu precursorii, de la care Chuquet a preluat bineînțeles multe lucruri, expunerea lui privind teoria ecuațiilor se distinge nu numai printr-o mare claritate, ci și prin faptul că

pleacă deodată de la cazul general, reducînd toate ecuațiile analizate la patru „canoane“:

$$ax^m = bx^{m+n}, \quad ax^m + bx^{m+n} = cx^{m+2n}$$

$$ax^m = bx^{m+n} + cx^{m+2n}, \quad ax^m + cx^{m+2n} = bx^{m+n}.$$

La fel ca și Pacioli, Chuquet nu ține seama de rădăcina $x = 0$. El declară pur și simplu că încă nu există reguli pentru rezolvarea ecuațiilor de alte canoane cu trei termeni așezați la distanțe inegale unul de altul sau cu patru sau mai mulți termeni, așezați la distanțe egale sau inegale unul față de altul (compară cu p. 462). „Asemenea cazuri — scrie Chuquet — noi le lăsăm acelora care vor dori să le adîncească mai departe“ [241, 13 p. 814].

În același manuscris se află o vastă culegere de probleme conexă cu *Știința despre numere în trei părți* alcătuită probabil tot de Chuquet. Aici sînt interesante problemele în a căror rezolvare intră numerele negative. Așa de exemplu, chestiunea împărțirii numărului 20 în părți care să satisfacă anumite condiții se reduce la ecuația:

$$\left(\frac{x}{4} + \frac{x}{5} + 20 - x\right)\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 10,$$

unde $x = -7\frac{3}{11}$, așa încît $20 - x = 27\frac{3}{11}$. Despre rezolvare se spune că „acest calcul, pe care alții îl socotesc imposibil, este corect“ [241, 14 p. 419]. Într-o altă problemă, soluția negativă se explică ca o datorie de bani.

Cartea lui Chuquet a rămas în manuscris și nu s-a răspîndit prea larg: totuși, unele idei ale lui devin cunoscute prin intermediul altor autori, îndeosebi prin Etienne de la Roche amintit mai înainte. Lucrarea lui Chuquet, lipsită de caracterul enciclopedic, de volumul și bogăția în probleme a *Summei* lui Pacioli, este mult mai bogată în ce privește conținutul de idei.

Pacioli fusese doar un pedagog care stăpînea bine o seamă de cunoștințe matematice accesibile lui; în schimb, Chuquet este un gînditor original și un creator de concepții noi generalizatoare, care duc înainte algebra.

Încheiere. Către începutul secolului al XVI-lea, matematica din Europa iese din cadrul cunoștințelor moștenite de la grecii antici și de la popoarele Orientului. Către această perioadă de timp, lupta dintre abaciști și algoritmiști este de mult încheiată

prin victoria hotărîtoare a aritmeticii zecimale poziționale. În aritmetică și în algebră, se pregătește încetul cu încetul crearea unei simbolici dezvoltate, a cărei lipsă frînase înainte vreme progresul teoriei ecuațiilor. Se introduc exponenții fracționari și negativi, precum și numerele negative; vine rîndul rezolvării prin radicali a ecuațiilor de gradul al treilea și al patrulea — problemă în fața căreia se opriseră învățații țărilor Islamului și a cărei rezolvare, plină de consecințe importante, a fost găsită în prima decadă a secolului al XVI-lea. Continuă cu succes elaborarea trigonometriei și în deosebi calculul tabelelor. În matematica universitară, se naște ideea dependenței funcționale și a reprezentării ei geometrice; în paralel, învățații trec la studiul secțiunilor conice ale lui Apoloniu și a cvadraturilor și cubaturilor lui Arhimede. Un fapt important este că matematica devine un mijloc viguros de rezolvare a unui cerc din ce în ce mai vast de probleme nu numai din comerț și agrimensură, ci și de tehnică dezvoltată și de științe ale naturii. Cele mai luminate minți încep în mod just să întrezărească în matematică, alături de experiment, metoda fundamentală de studiu al naturii. Perioada lungă a matematicii mărimilor constante se apropie de sfîrșit, se deschide epoca matematicii mărimilor variabile, a algebrei simbolice, a geometriei analitice, a calculului diferențial și integral.

1. K. Marx, *Capitalul*, vol. I, ed. a III-a, E.S.P.L.P., București, 1957.
2. F. Engels, *Anti-Dühring*, ed. a III-a, E.S.P.L.P., București, 1955.
3. F. Engels, *Dialectica naturii*, Editura Politică, București, 1959.
4. K. Marx și F. Engels, *Ideologia germană*, E.S.P.L.P., București, 1956.
5. К. Маркс и Ф. Энгельс, *Об Англии*, М., 1953.
6. К. Маркс и Ф. Энгельс, *Избранные письма*, М., 1957.
7. V. I. Lenin, *Materialism și empirio-criticism*, ed. a II-a, Editura Politică, București, 1959.
8. V. I. Lenin, *Caiete filozofice*, E.S.P.L.P., București, 1956.
9. В. И. Ленин, *Сочинения*, изд. 4-ое.
10. А. Н. Колмогоров, *Математика*, БСЭ, т. 26, изд. 2-ое, 1954.
11. Ф. Кэджори, *История элементарной математики*, пер. с англ. под ред. с примеч. и прибавл. И. Ю. Тимченко, изд. 2-ое, Одесса, 1917.
12. Г. Г. Цейтен, *История математики в древности и в средние века*, пер. П.С. Юшкевича, предисл. М.Я. Выгодского, изд. 2-ое, подготовл. А.П. Юшкевичем, М.-Л., 1938.
12a. История естествознания, Литература, опубликованная в СССР, т. I (1917—1947), М., -Л., 1949; т. 2 (1948—1950), М., -Л., 1955.
13. R. Cl. Archibald, *Outline of the history of mathematics*, 6th ed., Oberlin, Ohio, 1949.
14. E. T. Bell, *The development of mathematics*, 2d ed., N. Y.-L., 1940.
15. E. Bortolotti, *Storia della matematica elementare, Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi*, vol. 3, Milano, 1950.
16. G. B. Boyer, *The concepts of the calculus*, 2d ed., N. Y. — L., 1949.
17. Idem, *History of analytic geometry*, N.Y., 1956.
18. A. v. Braunmühl, *Vorlesungen über die Geschichte der Trigonometrie*, Bd. 1—2, Leipzig, 1900—1903.
19. F. Cajori, *A history of mathematical notations*, vol. 1—2, Chicago, 1928—1930.
20. F. Cajori, *A history of mathematics*, N. Y., 1929.
21. M. Cantor, *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik*, Bd. 1—2, Aufl. 3, Leipzig, 1907 u. folg. Corecturi vezi în „Bibliotheca mathematica“ (Kleine Bemerkungen zur letzten Ausgabe von Cantors Vorlesungen), Bd. 1, Aufl. 4, Leipzig, 1922.
22. J. Coolidge, *A history of geometrical methods*, Oxford, 1940.
23. Idem, *A history of the conic sections and quadric surfaces*, Oxford, 1945
24. E. Fettweis, *Das Rechnen der Naturvölker*, Leipzig, 1927.
25. S. Günther, *Geschichte der Mathematik*, Teil 1, Leipzig, 1908.

26. J. H o f m a n n, *Geschichte der Mathematik*, Teil 1, Berlin, 1953.
27. G. L o r i a, *Guido allo studio della storia della matematiche*, ed. 2, Milano, 1946.
28. G. L o r i a, *Storia delle matematiche dall' alba della civilta al secolo XIX*, ed. 2, Milano, 1950.
29. K. M e n n i n g e r, *Zahlwort und Ziffer. Eine Kulturgeschichte der Zahl*, Teil 1—2, Göttingen, 1957—1958.
30. G. S a r t o n, *Introduction to the history of science*, vol. 1—3, Baltimore, 1927—1947.
31. D. E. S m i t h, *History of mathematics*, vol. 1—2, Boston-London, 1930.
32. D. J. S t r u i k, *A concise history of mathematics*, vol. 1—2, N. Y., 1948.
33. J. T r o p f k e, *Geschichte der Elementarmathematik in systematischer Darstellung*, Bd. 1—7, 2 Aufl., Berlin — Leipzig, 1921—1934; Bd. 1—4, 3 Aufl., 1930—1940.
33a. Е в к л и д, *Начала, перев. и коммент.* Д. Д. Мордухай-Болтовского, т. 1, кн. I — VI; М.—Л, 1948; т. II кн. VII—X, М.—Л., 1949; т. III, кн. XI — XV, М.—Л., 1950.
34. Y. M i k a m i, *The development of mathematics in China and Japan*, Leipzig und Berlin, 1913.
35. Ţ i a n B a o-ţ z u n, *Despre originile matematicii în China*, 1935 (în limba chineză).
36. L i Y a n, *Istoria matematicii în China*, Şanhai, 1937, ed. a 2-a, 1955 (în limba chineză).
37. I d e m, *Culegere de lucrări de istoria matematicii în China*, vol. I—V, Pekin, 1954—1955 (în limba chineză).
38. I d e m, *Dezvoltarea matematicii în China*, Siusiue tunbao, nr. 10, 1959.
39. Ч ж у К э-ч ж э н, *Вклад китайских ученых в астрономию в древние и средние века*, Природа, № 10, 1953.
40. J. N e e d h a m (with the collaboration of W a n g L i n g), *Science and civilisation in China*, vol. 3 *(Mathematics and the science of the heavens and the earth)*, Cambridge, 1959.
41. И. Б е р е з к и н, *Арфиметические вопросы в древнекитайском трактате «Математика в девяти книгах»*. В кн.: *Из истории наукии техники в сраанах Востока*, вып. I, М., 1960.
42. *Математика в девяти книгах*, перев. с примеч. Э.И. Березкиной. В: кн. *Историко-математические исследования*, вып. 10, М., 1957.
43. Э. И. Б е р е з к и н а, О *«Математике в девяти книгах»*. В кн. Историко-математические исследования, вып. 10, М., 1957.
43a. М. Я.: В ы г о д с к и й, *Происхождение «правила двух ложных положений»*, Историко-математические исследования, вып. 13, М., 1960.
43b. Э. И. Б е р е з к и н а, *О математическом трактате Суньцзы*, Историко-математические исследования, вып. 13, М., 1960.
44. L. W a n g and J. N e e d h a m, *Horner's method in Chinese mathematics: its origins in the root-extraction procedures of the Han dynasty*, *T'oung Pao*, vol. 43, nr. 5, 1955.
45. S i u i C i u n-f a n, *Matematicienii Chinei antice şi realizările lor; Teorema lui San Gao şi Cen-ţzî despre egalitatea sumei pătratelor cate-*

telor cu pătratul ipotenuzei, Kasiue dacijun, nr. 9, 1953 (în limba chineză).
46. L. van Hée, *Le classique de l'île maritime, ouvrage chinois du III-ème siecle, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*, Astronomie und Physik, Abt. B, Studien, 2, 1933.
47. Du-Si-jan, *Noțiunea de limită la matematicianul antic Liu Huei*, Siusiue tunbao, nr. 2, 1954 (în limba chineză).
47a. L. van Hée, *Li Jeh, mathématicien chinois du XIII-ème siècle*, T'oung Pao, vol. 14, 1913.
47b. Idem, *Le Précieux miroir des quatre éléments*, Asia Major, vol. 7, 1932.
48. А. П. Юшкевич, *Об одной задаче теории чисел в русских математических рукописях XVII в.* Труды Ин-та истории естествознания и техники, т. 17, М., 1957.
48a. O. Neugebauer, *The exact sciences in antiquity*, 2^{d} ed., Brown University Press, 1957.
48b. О. Нейгебауер, *Лекции по истории античных математических наук*, М. -Л., 1937.
49. Siui Ciun-fan, *Metode antice chineze de sumare a seriilor*, Kesiue dacijun, nr. 6, 1956 (în limba chineză).
50. А. П. Юшкевич, *О достижениях китайских ученых в области математики.* В кн.: *Из истории науки и техники Китая*, М., 1955.
51. Siui Ciun-fan, *Matematicienii Chinei antice și realizările lor. Talentatul matematician Șen Ko*, Kesiue dacijun, nr. 11, 1953 (în limba chineză).
52. Li Yen, *The interpolation formulae of early Chinese mathematicians.* În cartea: *Actes du VIII-ème Congrès International d'Histoire des Sciences*, Florence, 3—9 Septembre, 1956.
53. L. Gauchet, *Note sur la trigonométrie sphérique de Kouo Cheou-King*, T'oung Pao, vol. 18, 1917.
54. B. Datta and A. N. Singh, *History of Hindu mathematics* vol. 1—2, Lahore, 1935—1938 (1. *Numerical notation and arithmetic*; 2. *Algebra)*.
55. G. R. Kaye, *Indian mathematics*, Calcutta-Simla, 1915.
56. Ibidem, Isis, 12, 1919.
57. S. Ganguli, *Notes on Indian mathematics. A criticism of G. R. Kaye interpolation*, Isis, 12, 1929.
58. *The Sulvasûtra of Baudâyana*, ed. by G. Thibaut, Journal of the Asiatic Society of Bengal, v. 9—10, 1874—1876; New Series, 1, 1876—1877; Das Âpastamba-Sulvasûtra, hsgeg. von. A. Bürk, Zeitschr. d. Deutsch. Morgenlsnd. Gesellschaft, 55, 1901; Kâtyâyanas Sulvaparišishta, ed. by G. Thibaut, Journal of the Asiatic Society of Bengal, New Series, 4, 1882.
59. E. Burgess and G. Whitney, *The Surya Siddhanta*, Journal of the American Oriental Society, 6, 1859—1860.
60. *Pañca-siddhântikâ of Varâha-Mihira*, ed. by G. Thibaut and S. Dvivedi, Benares, 1889; 2^{d} ed., Lahore, 1930.
61. W. E. Clark, *The Āryabhatiya of Āryabhata*, An ancient Indian work on mathematics and astronomic. Transl. with notes, Chicago, 1930.

62. *Algebra, with arithmetic and mensuration from the sanscrit of Brahmagupta and Bhascara*, transl. by H. T. Coolbrooke, London, 1817. Reprinted with Sanscrit text by Haran Chandra Banerji, Calcutta, 1927.
63. M. Rangācārya, *The Ganita-Sāra-Sangraha of Mahāvīrācārya*, With English transl. and notes, Madras, 1912.
64. G. R. Kaye, *The Bakhshali manuscript. A study in medieval mathematics*, Calcutta, 1927—1933.
65. N. Rāmānujācārya and G. R. Kaye, *The Trisatikā of Srīdharācārya*, Bibliotheca mathematica, 3. Folge, Bd. 13 ,1912—1913.
66. В. В. Бобынин, *Древнеиндусская математика и отношения к ней Древней Греции*, Известия Физ. — мат. общества при Казанском университете, 1916.
67. C. Müller, *Die Mathematik der Sulvasûtra, Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, Leipzig, 7, 1929.
68. B. Datta, *The science of the Sulva. A study of early Hindu mathematics*, Calcutta, 1932.
69. D. E. Smith and L. C. Karpinski, *The Hindu-Arabic numerals*, Boston, 1911.
70. И. Г. Башмакова и А. П. Юшкевич, *Происхождение систем счисления*. В кн.: *Энциклопедия элементарной математики*, под ред. П. С. Александрова, А. И. Маркушевича и А. Я. Хинчина, кн. I, М. -Л., 1951.
70a. Б. Л. ван дер Варден, *Пробуждающаяся наука. Математика древнего Египта, Вавилона и Греции*, перев. И. Н. Веселовского, М., 1959.
71. F. Nau, *Notes s'astronomie syrienne*, Journal asiatique, 16, 1910.
72. G. Coedès, *A propos de l'origine des chiffres arabes*, „Bulletin of the London School of Oriental Studies", 6, 1931.
73. R. Venchakalan Lyer, *The Hindu abacus*; *Scripta mathematica*, vol. 20, nr. 1—2, 1954.
74. S. Ganguli, *India's contribution to the theory of indeterminate equations of the first degree*, Journal of Indian mathematical Society, 19, 1931.
75. A. N. Singh, *On the use of series in Hindu mathematics*, Osiris, vol. 1, 1936.
76. А. Шопенгауер, *Мир как воля и представление*, т. I, пер. Ю.И. Айхенвальда, М., 1900.
77. K. Mukunda Marar and C. T. Rajagopal, *On the Hindu quadrature of the Circle*; K. Balangadharan, Appendix, Journal of Bombay Branch of the Royal Asiatic Society, 20, 1944 (texte sanscrite traduse în limba engleză).
78. C. T. Rajagopal and T. V. Vedamurta, *A neglected chapter of Hindu mathematics*, Scripta mathematica, 15, 1949.
79. C. T. Rajagopal and T. V. Vedamurta, *On the Hindu proof of Gregory's series*, Scripta mathematica, 17, 1951.
80. C. T. Rajagopal and T. V. Vedamurta, *A Hindu approximation of π*, Scripta mathematica, 18, 1952.
81. J. E. Hofmann, *Über eine altindische Berechnung von π und ihre algemeine Bedeutung*, Mathematisch-Physikalische Semesterberichte, Bd. 3, H. 3—4, 1953.

81a. Э. Я. Бахмутская, *Степенные ряды для sin θ и cos θ в работах южноиндийских математиков XV — XVIII веков*, Историко-математические исследования, вып. 13, 1960.
82. Абу Рейхан Бируни, *Избранные произведения*, т.1. *Памятники минувших поколений*, пер. М.А. Салье, Ташкент, 1957.
83. F. Woepcke, *Sur le mot kardaga et sur une méthode indienne pour calculer les sinus*, Nouvelles annales mathématiques, 13, 1854.
84. H. Suter, *Die Mathematiker und Astronomer der Araber und ihre Werke*, Leipzig, 1900—1902, completări de H. P. J. Renaud, Isis, 18, 1932.
85. C. Brockelmann, *Geschichte der arabischen Literatur*, B. 1 — 5, Weimar, Berlin und Leiden, 1898—1942.
86. A. Mieli, *La science arabe et son rôle dans l'évolution scientifique mondial*, Leiden, 1839.
87. P. Luckey, *Zur islamischen Rechenkunst und Algebra des Mittelalters*, Forschungen und Fortschritte, Bd. 24, H. 17—18, 1948.
88. H. I. J. Winter, *Formative influences in Islamic sciences*, Archives Internationales d'Histoire des Sciences, 1953.
89. А. П. Юшкевич, *О математике народов Средней Азии в IX—XV веках*, Историко-математические исследования, вып. 4, М., 1951.
90. A. P. Yuschkévitch, *Sur certaines particularités du développement des mathématiques arabes*. În cartea: *Actes du VIII-ème Congrès International d'histoire des sciences*, Florence, 3—9 Septembre 1956.
91. Б. А. Розенфельд и А. П. Юшкевич, *Математика стран Ближнего и Среднего Востока в средние века*, Советское востоковедение, № 3 и 6, 1958.
92. F. Vera, *Historia de la matematica en España*, I. *Tiempos primitivos hasta el siglo XIII*, Madrid, 1929—1931.
93. M. Steinschneider, *Die Mathematik bei den Juden*, „Bibliotheca mathematica", Neue Folge, 7—13, 1893—1899".
94. M. Steinschneider, *Die arabische Literatur der Juden*, Leipzig.
95. М. Салье, *Мухаммед аль-Хорезми, великий узбекский ученый*, Ташкент, 1954.
96. *Trattati d'aritmetica* publicati de Baldasare Boncompagni, 1. *Algorithmi de numero indorum*. II. Joanni Hispalensis liber algorismi de pratica aritmetice, Rome, 1957.
96a. K. Vogel, *Beiträge zur griechischen Logistik*, München, 1936.
97. J. Ruska, *Zur ältesten arabischen Algebra und Rechenkunst*, Sitzungsberichte der Heidelberger Akad. d. Wissenschaften, 1917.
98. А. П. Юшкевич, *Арифметический трактат Мухаммеда бен Муса ал-Хорезми*, Труды Ин-та истории естествознания и техники, т. 1, М., 1954.
99. S. Gandz, *Did the arabs know the abacus?* American mathematical monthly, 24, 1927.
100. H. Suter, *Über das Rechenbuch des Ali ben Ahmed al-Nasawi*, „Bibliotheca mathematica", 7, 1906—1907.
101. Нури Юсупов, *Очерки по истории развития арифметики на Ближнем Востоке*, Казань, 1933.

102. М. И. Медовой, *Об арифметическом трактате Абу-л-Вафы*, Историко-математические исследования, вып. 13, 1960.
103. H. Suter, *Das Rechenbuch des Abu Zakariya el-Hassar*, „Bibliotheca mathematica", 2, 1901.
104. *The Algebra of Mohammed ben Musa*, ed. and transl. by F. Rosen, London, 1831.
105. *Liber Maumeti filii Moysi alchoarismi de algebra et almuchabala*... În cartea: G. Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, vol. 1, Paris, 1838 (Traducere latină a unei părţi din algebra lui al-Horezmi, pp. 253—297).
106. L. Ch. Karpinski, *Robert of Chester's latin translation of the Algebra of al-Khowarizmi*, N. Y., 1915; ed. a 2-a: L. Ch. Karpinski and J. G. Winter, *Contributions to the history of science*, Ann. Arbor, University of Michigan, 1930.
107. H. Wieleitner, *Die Erbteilungsaufgaben bei Muhammed ibn Musā Alchwārazmi*, — Zeitschrift f. mathem. u. naturwiss. Unterricht, 53, 1922.
108. H. Hankel, *Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter*, Leipzig, 1874.
109. S. Gandz, *The sources of al-Khowārismis algebra*, Osiris, 1, 1936.
110. Idem, *The origin and development of the quadratic equations in Babylonian, Greek and early Arabic algebra*, Osiris, 3, 1937.
111. *Liber augmenti et diminutionis*... În cartea: G. Libri, *Histoire de sciences mathématiques en Italie*, vol. 1, Paris, 1833, 304—371.
112. H. Suter, *Die Abhandlung Qostā ben Lūqās und zwei andere Anonyme über die Rechnung mit zwei Fehlern und mit der angenommenen Zahl*, „Bibliotheca mathematica", 9, 1908.
113. Idem. *Über die im „Liber augmenti et diminutionis" vorkommenden Autoren*, „Bibliotheca mathematica", 3, 1902.
114. A. Marre, *Le Talkhys d'Ibn Albanna*. Atti dell'Acad. Pontif. de nuovi Lincei, 17, 1865.
115. S. Gandz, *The Mishnat ha Middot, the first Hebrew Geometry of about 150 C. E. and the Geometry of Muhammad ibn Musa al-Khowarismi the first Arabic Geometry* (c. 820), Quellen und studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Abt. A., 2, 1932.
116. *Muhammed al-Horezmi, Istihradj tarah al-iahud*. În cartea: *Rasail mufarica*, Haiderabad, 1940.
117. Die astronomischen Tafeln des Muhammed ibn Musā in der Bearbeitung des Maslama ibn Ahmed al-Madjriti und der lateinischen Übersetzung des Atelhard von Bath auf Grund der Vorarbeiten von A. Björnbö und R. Besthorn, hsg. und kommentiert von H. Suter, Memoires de l'Acad. des sciences de Danemark, section des lettres, 3, Copenhague 1914.
118. L. Ch. Karpinski, *The algebra of Abū Kāmil Shoja ben Aslam*, „Bibliotheca mathematica", 12, 1912.
119. J. Weinberg, *Die Algebra des Abū Kāmil Šoğā ben Aslam*, München, 1935.
120. H. Suter, *Die Abhandlung des Abu Kamil Shoğā ben Aslam über Fünfeck und Zehneck*, „Bibliotheca mathematica", 10, 1910.
121. A. Hochheim, *Al Kāfī fil Hisāb des Abu Bekr Muhammed Alhusein* Alkarkhi, Halle (Saale), 1—3, 1877—1880.

121a. F. Woepcke, *Extrait du Fakhrî, traité d'algèbre* par... Alkarkhî, Paris, 1853.
122. H. Suter, *Das Buch der Seltenehiten der Rechenkunst von Abû Kâmil el Misri*, „Bibliotheca mathematica", 11, 1911.
123. F. Woepcke, *Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise* III. Traduction... d'un traité... par... Alhoçain, Atti del 'Acad. Pont. de Nuovi Lincei, 14, 1861.
124. F. Woepcke, *Notice sur une théorie ajoutée par Thabit ben Korrah a l'aritmétique spéculative des Grecs*, Journal asiatique, 20, 1852.
125. P. Luckey, *Die Rechenkunst bey Gamšid b. Mas'ûd al-Kāši mit Rückblicken auf die ältere Geschichte des Rechnens*, Wiesbaden, 1950.
126. Джемшид Гиясэддин ал-Каши, *Ключ арифметики. Трактат об окружности*, пер. Б.А. Розенфельда, ред. В. Сс Сегаля и А.П. Юшкевича, коммент. А. П. Юшкевича и Б. А. Розенфельда, М., 1956.
126a. E. S. Kennedy, *The Planetary equatorium of Jamshid Ghi Yath al-Din, al-Kashi*, Princeton, 1960.
127. P. Luckey, *Die Ausziehung des n-ten Wurzel und der binomische Lehrsatz in der islamischen Mathematik*, Mathematische Annalen, 120, 1948.
128. *Комментарии Абу Насра ал-Фараби к трудностям во введениях к первой и пятой книгам Евклида*, пер. М. Ф. Бокштейна, введ. и примеч. Б. А. Розенфельда, Проблемы востоковедения, 4, 1959.
129. H. Suter, *Über den Kommentar des Muhammed ben Abdelbâqî zum zehnten Buche des Euklides*, „Bibliotheca mathematica", 7, 1906—1907.
130. E. B. Plooij, *Euclid's conception of ratio and his definition of proportional magnitudes as criticized by arabian comentators*, Rotterdam, 1950.
131. *Discussion of difficulties of Euclid by Omar Khayyam*, ed. by T. Erani, Teheran, 1936.
132. Омар Хайям, *Математические трактаты*, пер. Б.А. Розенфельда, примеч. Б. А. Розенфельда и А. П. Юшкевича, Историко-математические исследования, вып. 6, 1953.
133. O. Becker, *Eudoxos — Studien*, I, *Eine voreudoxische Proportionenlehre und ihre Spuren bei Aristoteles und Euklid*; II. *Warum haben die Griechen die Existenz der 4. Proportionale angenommen?*, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Abt. B. II, 1933.
134. М. И. Медовой, *Об одном случае применения отрицательных чисел у Абу-л-Вафы*, Историко-математические исследования, вып. 11, 1958.
135. И. Г. Башмакова, *Лекции по истории математики в древней Греции*, Историко — математические исследования, вып. 11, М., 1958.
136. M. Baker, *Alhazen's problem. Its. bibliography and an extension* of it, American Mathematical Monthly, 4, 1881.
137. *L'algèbre d'Omar Alkhayyâmî, publiée, traduite et accompagnée d'extraits de manuscrits inédits* par F. Woepcke, Paris. 1851.
138. А. П. Юшкевич, *Омар Хайям и его «Алгебра»*. Труды Ин-та истории естествознания и техники, II, 1948.

139. С. Б. Морочник, Б. А. Розенфельд, *Омар Хайям — поэт, мыслитель, ученый*, Сталинабад, 1957.
140. F. Woepcke, *Traduction du traité d'arithmétique d'Aboûl Haçan Alî ben Mohammed Alkalçadi*, „Atti,dell'Acad. pontif. de'Nuovi Lincei", 12, 1859.
140a. M. Curtze, *Der Liber trium fratrum de Geometria*, „Nova Acta Acad. germ. naturae curiosorum", 49, 1885.
141. H. Suter, *Über die Geometrie der Söhne des Mūsā b. Schakir*, Bibliotheca mathematica, 3, 1902.
142. Idem, *Das Buch der geometrischen Konstruktionen des Abu'l Wefa*, „Abhandl. zur Geschichte der Naturwissenschaften und Medizin", 1932.
143. F. Woepcke, *Analyse et extrait d'un recueil de constructions géométriques par Aboûl Wafâ*, Journal asiatique, 5, 1855.
144. Л. С. Бретаницкий и Б. А. Розенфельд, Архитектурная глава тракктата *«Ключ арифметики» Гияс-ад-дина Каши*, Искусство Азербайджана, Баку, 5, 1956.
144a. Насир ад-Дин ат-Туси, *Трактат, исцеляющий сомнение по поводу паралельных линий*, пер. с арабского Б. А. Розенфельда, статьи и комментарии Б. А. Розенфельда и А. П. Юшкевича, Историко-математические исследования, вып. 13, 1960.
144b. Г. Б. Петросян и Б. А. Розенфельд, Доказательство Аганиса пятого постулата Евклида, Известия АН Арм. ССР, сер. физ.-матем. наук, т. XIII, 1960.
145. Eucleidos, Elementa ex interpretatione *Al-Hadschdschadschii cum Commentarii Nairizii*. Arabice et latine ediderunt... R. O. Besthorn et I. L. Heiberg, 1—3, Havniae, 1893—1905.
146. Anaritii *in decem libros priores Elementorum Euclidis commentarii*, ed. M. Curtze, Leipzig, 1899.
147. Proklus Diadochus, *Euklid, Kommentar. Besorgt und eingeleitet* von M. Steck, Halle (Saale), 1945.
148. В. Ф. Каган, *Основания геометрии*. Учение об обосновании геометрии в ходе его исторического развития, ч. 1, М. -Л., 1949.
149. Б. А. Розенфельд, *Доказательство пятого постулата средневековых математиков Хасана ал-Хайсама и Льва Герсонида*, Историко-математические исследования, вып. 11, 1958.
150. Хасан ибн ал-Хайсам, *Книга комментариев к введениям книги Евклида «Начала»*, Историко — математические исследования, вып. 11. 1958.
151. Б. А. Розенфельд, *О математических работах Насирэддина Туси*, Историко — математические исследования, вып. 4, 1951.
152. Р. М. Султанов, *Насирэддин о постулате паралельности*, Известия Ак. наук Азерб. ССР, № 10, 1951.
153. Б. А. Розенфельд, *Новые исследования по предыстории, неевклидовой геометрии*. В кн.: В. Ф. Каган, *Основания геометрии, т.* 2, М., 1956.
153a. Г. Д. Мамедбейли, *Мухаммед Насирэддин Туси о теории параллельных линий и теории отношений*, Баку, 1959.

154. Eucleidos *Elementorum geometricorum libri tredecim ex traditione doctissimi Nasiridini Tusini nunc primum arabice impressi*, Roma, 1594.
155. Idem, *Elementorum libri tredecim studio Nasseredini*, Roma, 1657.
156. J. H. Heiberg und E. Wiedemann, *Ibn al-Haithams Schrift über parabolische Hohlspiegel*, „Bibliotheca mathematica", 10, 1910.
156a. H. Suter. *Die Kreisquadratur des Ibn el-Haitham*, „Zeitschrift f. Mathematik und Physik, hist. Abt." 44, 1899.
157. Idem, *Über die Ausmessung der Parabel von Thabit ben Qurra al-Harrani*, „Sitzungsber. d. physik.-mediz. Sozietät", 48, Erlangen, 1918.
158. Idem, *Die Abhandlungen Thabit ben Qurras und Abu Sahl al-Kūhīs über die Ausmessung der Paraboloïde* (ibid.).
159. Idem, *Abhandlung über die Ausmessung der Parabel von Ibrahim ben Sinan ben Thābit ben Qurra*, „Vierteljahrsschrift der Naturforsch. Gesellschaft in Zürich, 63, 1918.
160. Idem, *Die Abhandlung über die Ausmessung des Paraboloides von Ibn al Haitham*, „Bibliotheca mathematica", nr. 12, 1912.
160a. M. Clagett, *The impact of Archimedes on medieval science*, Isis, 50, nr. 162, 1959.
161. C. Schoy, *Beiträge zur arabischen Trigonometrie*, Isis, 5—6, 1923—1924.
162. Idem, *Über den Gnomonschatten und die Schattentafel*, Hannover 1923.
163. *Al-Battani sive Albatanil, Opus Astronomicum*, Arabice editum, latine versum, adnotationibus instructum a C. A. Nallino, 1—3, Milano, 1899—1907.
164. Carra de Vaux, *L'Almageste d'Abū-l-Wafa al-Buzdjani*, Journal asiatique, 19, 1892.
165. Х. У. Садыков, *Бируни и его работы по астрономии и математической географии*, М., 1953.
166. Abu Rayhan Muhommad b. Ahmad al-Biruni, *Al-Qānunu'l-Mas'ūdī* (Canon Masudicus), t. 1—3, Hyderabad, 1954—1956.
167. C. Schoy, *Die trigonometrischen Lehren des persischen Astronomen Abu'l Raihān Muhammed ibn Ahmad al-Biruni, dar-gestellt nach al-Qānon al-Mas'ūdi*. Nach dem Tode des Verfassers hsg. von J. Ruska und H. Wieleitner, Hannover, 1927.
168. Г. Д. Мамедбейли, *Из истории Марагинской обсерватории*. В кн.: *Труды совещания по истории естествознания* 24—26 декабря, 1946 г., М.-Л., 1948.
169. Мухаммед Насирэддин Туси, *Трактат о полном четырехстороннике* (Шаклул Гита), пер. под ред. Г. Д. Мамедбейли и Б. А. Розенфельда, Баку, 1952.
170. A. v. Braunmühl, *Nassir Eddin und Regiomontan*, Abhandl. d. Leopold. Akad. der Naturforscher, 71, 1897.
171. E. S. Kennedy, *A survey of Islamic astronomical tables*, Transactions of the American Philosophical Society 46, 1956.
172. Б. А. Розенфельд, *Попытка квадратичного интерполирования у Абу-р-Рейхана ал-Бируни*, Историко-математические исследования, вып. 12, 1959.

173. P. Luckey, *Der Lehrbrief über den Kreisumfang von Gamšid b. Mas'ūd al-Kaši*, Berlin, 1953.
174. Т. Н. Кары-Ниязов, *Астрономическая школа Улугбека*, М.-Л., 1950.
175. L. A. Sédillot, *De l'algèbre chez les Arabes*, Journal asiatique 2, 1853, Trad. rusă a unui fragment din *Regulile operațiilor și corecțiile tabelelor*, a lui *Mariam Celebi*, vezi în cartea indicată mai sus a lui al-Kași.
175a. [Кази-заде ар-Руми], *Трактат об определении синуса одного градуса*, пер. с арабского, Б. А. Розенфельда, статья и комментарии Б. А. Розенфельда и А. П. Юшкевича, Историко-математические исследования, вып. 13, 1960.
176. E. S. Kennedy and W. R. Transue, *A medieval iterative algorism*. „American Mathematical Monthly", v. 63, nr. 2, 1956.
177. *Beha-eddin's Essenz der Rechenkunst*, hsg. von G. H. F. Nesselmann, Berlin, 1843.
178. P. Tannery, *Moschopoulos et Rhabdas*. În: *Mémoires scientifiques*, 4. Paris, 1920.
179. Г. Б. Петросян, *Математика в Армении в древних и средних веках*, Ереван, 1959. На армянском языке с резюме на русском и английском языках.
180. *Вопросы и решения вардапета Анании Ширакца, армянского математика VII века*, Издал и перевел И. А. Орбели, Пб., 1918.
181. Г. Т. Туманян, *«Начала» Евклида по древнеармянским источникам*, Историко-математические исследования, вып. 6, 1953.
182. Д. Г. Цхакая, *История математических наук в Грузии с древних времен до начала XX века*, Тбилиси, 1959.
183. И. Петрици, *Рассмотрение платоновской философии и Прокла Диадоха*, перев. и исследование И. Д. Паницхава, Тбилиси, 1942.
184. Bedae Venerabilis, *Opera omnia*, 1—12, ed. J. A. Gilles, London, 1843—1844.
185. Alcuini *Opera omnia*, 2, ed. I. F. Migne, Paris, 1851.
186. Gerberti *postea* Silvestri papae, *Opera mathematica*, ed. N. Bubnov, Berlin, 1899.
187. M. Steinschneider, *Die europäischen Übersetzungen aus dem arabischen bis Mitte des 17 Jahrhunderts*, Graz, 1956.
188. M. Curtze, *Der Liber Embadorum des Savasorda in der Übersetzung des Plato von Tivoli*, Abh. Gesch. Math. Wissensch., 12, 1902.
189. J. M. Guttmann, *Chiber ha Meschicha Tischbereth, Lehrbuch der Geometrie des Abraham bar Chija*, Berlin, 1913.
190. A. Nagl, *Der arithmetische Tractat* von Radulph von Laon, Abh. Gesch. Math., 5, 1890.
191. F. Woepcke, *Journal asiatique*, 13, 1863, pp. 69—79, 514—529.
192. Н. М. Бубнов, *Арифметическая самостоятельность европейской культуры*, т. 1—2, Киев, 1908.
193. В. В. Бобынин, *Отзыв о сочинениях Н. М. Бубнова*... СПб., 1911.
194. A. Nagl, *Über eine Algorismusschrift des XII. Jahrhundert sund über die Verbreitung der indisch-arabischen Rechenkunst und Zahlzeichen im christlichen Abendlande*, Zeitschrift für Mathematik und Physik, 34, 1889.

195. M. Curtze, *Über eine Algorismusschrift des XII. Jahrhunderts*, Abh. Gesch. Math., 8, 1898.
196. M. Cantor, *Über einen Codex des Klosters Salem*, Zeitschr, für Mathematik und Physik, 10, 1865.
197. Petri Philomeni de Dacia *in Algorismus vulgarem Iohannis de Sacrobosco commentarius. Una cum algorismo ipso edidit et praefatus est* Max Curtze, Havniae, 1897.
198. G. Eneström, *Über die Demonstratio Jordani de algoritmo*, „Bibliotheca mathematica", 7, 1906.
198a. Idem, *Über eine dem Nemorarius zugeschrieben ekurzel Agorismusschrift*, „Bibliotheca mathematica", 8, 1908.
199. Idem, *Über den Algorismus de integris*, „Bibliotheca mathematica", 13, 1913; *Über den Algorismus de minutii*, „Bibliotheca mathematica", 14, 1914.
200. L. C. Karpinski, *The italian arithmetic and algebra of master Jacob of Florence*, Archeion, 11, 1929.
201. B. Boncompagni, Atti dell'Accad. Pontif. Nuovi Lincei, 16, 1862—1863.
202. Кирик Новгородцев, *Учение им же ведати человеку числа всех лет*, прим. В. П. Зубова, Историко-математические исследования, вып. 6, 1953.
203. В. В. Бобынин, *Очерки истории развития физико-математических знаний в России*, вып. 1—2, М., 1886—1893.
204. И. Ф. Копиевский, *Краткое и полезное руковедение по ариметику, или в обучение и познание всякого счету в сочетании всех вещей*, Амстердам, 1699.
205. Л. Ф. Магницкий, *Арифметика сиречь наука числительная*, М., 1703.
206. J. Mundi, *John of Gmunden*, Isis, 1942.
207. S. Gandz, *The invention of the decimal fraction and the application of the exponential calculus by Immanuel Bonfils of Tarascon*, Isis, 25, 1936.
208. *The principal works of* Simon Stevin, vol. 2, Mathematics, edit. by D. J. Struik, Amsterdam, 1958.
209. G. Sarton, *The first explanation of decimal fractions and measures* (1585), Isis 23, 1935.
210. В. Беллюстин, *Как постепенно дошли люди до настоящей арифметики*, под ред. А. П. Юшкевича, М., 1940.
211. И. Г. Спасский, *Происхождение и история русских счетов*, Историко-математические исследования, вып. 5, 1952.
212. *Scritti di Leonardo Pisano*... publicati da B. Boncompagni 1—2, Roma, 1857—1862.
213. *Памятники древней письменности*, СПб., 1878—1879.
214. K. Vogel, *Zur Geschichte der linearen Gleichungen mit mehreren Unbekannten*, Deutsche Mathematik, 53, 1940.
215. Leonardo Pisano, *Capitulum quintum decimum de regulis geometriae pertinentibus et de qaestionibus algebrae et almuchabile*... In cartea: G. Libri. *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, vol. 2, Paris, 1838, pp. 307—476.
216. G. Eneström, *Über die Arithmetica des Nemorarius*, „Bibliotheca mathematica", Bd. 9, 1909.

216a. M. Curtze, *Commentar zu dem Tractatus de numeris datis des Jordanus Nemorarius*, Zeitschr. f. Math. u. Phys., 36, 1891.
217. Иордан Неморарий, *О данных числах*, пер. С. Н. Шрейдера под ред. И. Н. Веселовского, Историко-математические исследования, вып. 12, 1959.
218. M. Curtze, *Jordani Nemorarii Geometria vel de Triangulis*, Libri 4, Mitteil. des Coppernicus-Vereins, Thorn, 6, 1887.
219. Лев Герсонид, *Комментарии к введениям книги Евклида*, пер. И. Г. Польского, примеч. Б. А. Розенфельда, Историко-математические исследования, вып. 11, 1958.
220. В. П. Зубов, *Из истории средневековой атомистики*, Тр. Ин-та ист. естествознания, т. 1, 1947.
221. В. П. Зубов, *Калориметрическая формула Рахмана и её предыстория*, Тр. Ин-та ист. естествознания, т. 5, 1955.
222. J. E. Hofmann, *Zum Gedenken an Thomas Bradwardine*, Centaurus, 1951.
223. Thomas Bradwardine, *His Tractatus de proportionibus, Its significance for the development of mathematical physics*. Ed. and transl. by, H. Lamar Crosby, jr. The University of Wisconsin Press, Madison, 1955.
224. В. П. Зубов, *Трактат Брадвардина «О континууме»*, Историко-математические исследования, вып. 13, М., 1960.
225. M. Curtze, *Der Algorismus proportionum des Nicolaus Oresme*, Berlin, 1868.
226. Николай Орем, *Трактат о конфигурации качеств*, пер. и примеч. В. П. Зубова, Историко-математические исследования, вып. 11, 1958.
227. В. П. Зубов, *Трактат Николая Орема «О конфигурации качеств»*, Историко-математические исследования, вып. 11, 1958.
228. H. Wieleitner, *Zur Frühgeschichte der Räume von mehr als drei* Dimensionen, Isis, 7, 1925.
229. Idem, *Der „Tractatus de latitudinibus formarum" des Oresme*, „Bibliotheca mathematica", m. 13, 1913.
230. Idem, *Zur Geschichte der unendlichen Reihen im christlichen Mittelalter* „Bibliotheca mathematica", nr. 14, 1914.
231. K. Vogel, *Die Practica des Algorismus Ratisbonensis*, München, 1954.
233. Г. Феттер, *Краткий обзор развития математики в чешских землях до Белогорской битвы*, Историко-математические исследования, вып. 11, 1958.
234. Nicolaus von Cues, *Die mathematischen Schriften*, *übers. v. J. Hofmann mit einer Einführung und Amerkungen versehen* v. J. E. Hofmann, Hamburg, 1952.
235. Ioannis de Regio Monte, *De triangulis omnimodis libri quinque*, Norimbergae, 1533.
236. M. C. Zeller, *The development of trigonometry from Regiomontanus to Pitiscus*. Ann. Arbor, Univ. of Michigan, 1946.
237. M. Curtze, *Der Briefwechsel Regiomontan's mit G. Bianchini, J. von Speier und Chr. Roder*, Abh. Gesh. Math., 12, 1902.

238. Л. Ольшки, *История научной литературы на новых языках*, т. 1, Литература техники и прикладных наук от средних веков до эпохи Возрождения, пер. Ф. А. Коган-Бернштейн и И. С. Юшкевича, М.-Л., 1933, т.2, Образование и наука в эпоху Ренессанса в Италии, пер. Е. А. Косминского, М.-Л., 1934.
239. Леонардо да Винчи, *Избранные естественнонаучные произведения*, ред. пер., статья и комментарии В. П. Зубова, М., 1955.
240. D. I. Ricci, *Luca Pacioli, l'uomo e lo scienzato, con documenti inediti*, Sansepolcro, 1940.
241. A. Marre, *Le Triparty en la science des nombres par Maistre Nicolas Chuquet Parisien*, Bulletino di bibliografia e storia delle scienze mathematiche e fisiche di Boncompagni, 13, 1880; Appendice au Triparty en la science des nombres de Nicolas Chuquet (*ibidem*, 14, 1881).

INDICE DE NUME

CUPRINS

